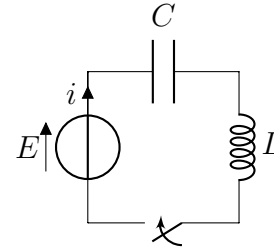


? À déposer AVANT le mardi 28 octobre 2025 à 9h00
Devoir Maison n°5 : Électronique – Corrigé

Exercice n°1 Circuit LC

On étudie le circuit ci-contre. Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem E constante au condensateur et à la bobine.



R1. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i qui circule dans le circuit et l'écrire sous forme canonique

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$

Identifier ω_0 . Quels sont son nom et son unité ?

Solution:

Loi des mailles : $u_c + u_L = E$

Relation du condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt}$

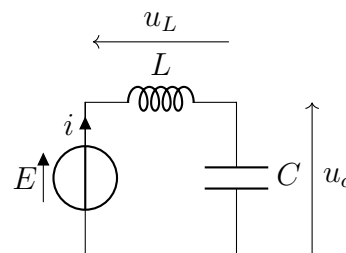
Relation de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$

Ainsi $i = C \frac{d(E - u_L)}{dt}$, soit $i = -C \frac{du_L}{dt}$

Enfin : $i = -LC \frac{d^2 i}{dt^2}$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i(t)}{LC} = 0$$

Pour $t > 0$:



Remarque –

↑ Écrire la phrase complète

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

R2. **Déterminer** proprement les valeurs de $i(0^+)$ et $\frac{di}{dt}(0^+)$.

Solution:

Remarque –

↑ Respecter la rédaction du cours et des corrigés (nombreux) des DM/TD...

Une fonction nulle en 0 n'y passe pas a priori avec une tangente horizontale.

⚠ $\frac{di(0^+)}{dt} \neq \frac{di}{dt}(0^+)$: la première est TOUJOURS nulle, la deuxième pas a priori.

Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Or l'intensité à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Enfin, d'après la loi des mailles à $t = 0^+$: $u_c(0^+) + u_L(0^+) = E$, soit $L \frac{di}{dt}(0^+) = E$

Enfin $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$

R3. Résoudre complètement l'équation différentielle.

Solution: La solution générale s'écrit $i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.

$i(0^+) = 0 = A$

Dérivée de i par rapport au temps : $\frac{di}{dt} = B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

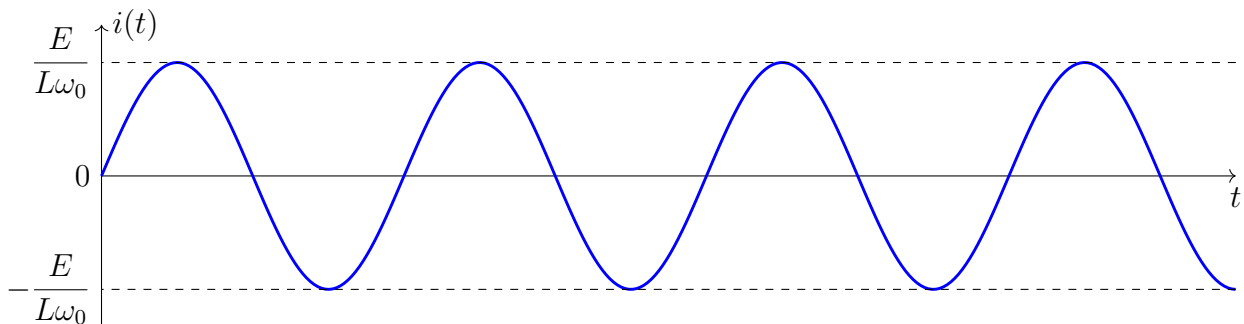
$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} = B\omega_0$, donc $B = \frac{E}{L\omega_0}$.

Ainsi $i(t) = \frac{E}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

R4. Représenter l'allure de $i(t)$.

Solution:

⚠ Remarque –
à soigner : condition initiale, valeur moyenne, 0 des axes, ...



R5. Établir le bilan de puissance de ce circuit, et interpréter les différents termes y apparaissant.

Solution:

Loi des mailles : $E = u_c + u_L$

$E \times i = u_c \times i + u_L \times$

$Ei = u_c \times C \frac{du_c}{dt} + L \frac{di}{dt} i$

$\underbrace{Ei}_{\text{puissance fournie par le générateur}} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2}_{\text{Énergie totale stockée dans le condensateur et la bobine}} \right)$

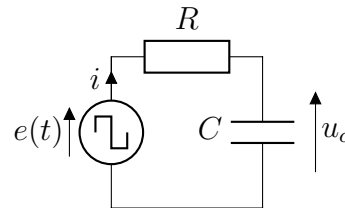
L'énergie fournie par le générateur est stockée par la bobine et le condensateur.

Remarque –

Attention, i et u_c évoluent au cours du temps. Et notamment, i change de signe il est donc difficile de prédire le signe des puissances algébriquement reçues par la bobine et le condensateur.

Exercice n°2 Circuit RC soumis à une tension créneau : Algorithme d'Euler

On étudie le circuit RC ci-contre alimenté par un générateur délivrant une tension e qui peut dépendre du temps.



La tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{e(t) - u_c(t)}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

Pour résoudre ce système, en utilisant la méthode d'Euler, sur un intervalle $I = [t_0, t_f]$, on commence par discrétiser le temps. Soit N le nombre d'intervalles de temps souhaité dans I , on obtient alors le **pas** de résolution : $h = \frac{t_f - t_0}{N}$

L'instant t_i est donné par, avec i entier variant entre 0 et N (pour avoir N intervalles, il y aura donc $N + 1$ points) : $t_i = t_0 + i \times h$.

On note u_i la valeur approchée de $u_c(t_i)$ dans le cadre de l'algorithme d'Euler.

R1. **Établir** la relation de récurrence entre $u_{i+1} = u_c(t_{i+1})$ et $u_i = u_c(t_i)$ s'écrit, en fonction de $e_i = e(t_i)$:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{e_i - u_i}{\tau} \times h$$

Solution: L'algorithme d'Euler consiste à approcher la fonction u_c sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ par sa tangente en t_i .

La tangente en t_i est de pente $\frac{du_c}{dt}(t_i) = \frac{e(t_i) - u_c(t_i)}{\tau}$

Ainsi, à l'instant $t_{i+1} = t_i + h$:

$$\begin{aligned} u_c(t_i + h) &= u_c(t_i) + \frac{du_c}{dt}(t_i) \times h \\ u_c(t_{i+1}) &= u_c(t_i) + \frac{e(t_i) - u_c(t_i)}{\tau} \times h \\ u_{i+1} &= u_i + \frac{e_i - u_i}{\tau} \times h \end{aligned}$$

On considère le cas où le circuit est soumis à une tension créneau de période $\frac{T}{2}$: $e(t)$, avec $e(t) = 0$ pendant la première moitié de la période et $e(t) = E$ pendant la deuxième moitié de la période.

On met en œuvre la méthode d'Euler pour résoudre l'équation différentielle précédente, avec $u_c(0) = 0$, pour $N = 1000$ intervalles, et avec une période du créneau $T = 5.10^{-3}$ s.

R2. **Compléter** et compiler le code sur

<https://capitale2.ac-paris.fr/web/c/c5f8-7465461>

c5f8-7465461



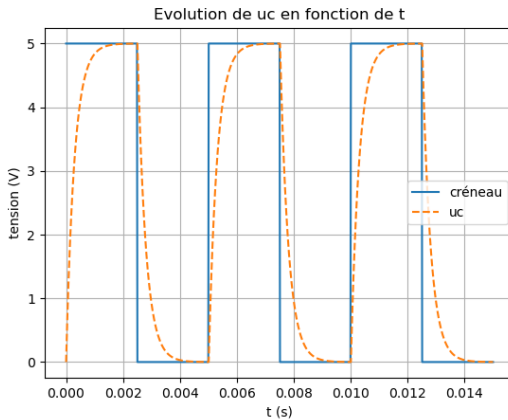
R3. Recopier sur votre copie et compléter le code ci-dessous qui traduit la relation de récurrence :

Solution:

```
1 for i in range(0,N):
2     liste_u[i+1] = liste_u[i] + (liste_e[i]-liste_u[i])*tau*h
```

R4. Recopier l'allure de $u_c(t)$ obtenue.

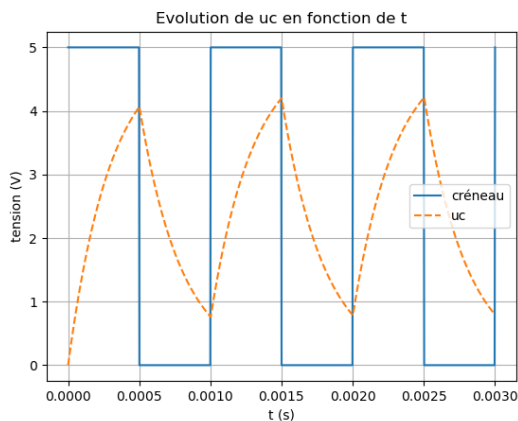
Solution:



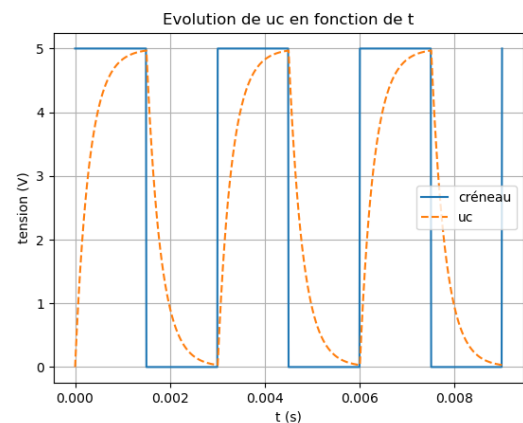
R5. Influence de la période du créneau

- (a) **Modifier**, successivement (il faudra tout compiler pour chaque valeur), la valeur de la période du créneau : $T = 1.10^{-3}$ s ; $T = 3.10^{-3}$ s ; $T = 10.10^{-3}$ s
- (b) **Recopier l'allure** du graphe obtenue dans les différents cas. Commenter.

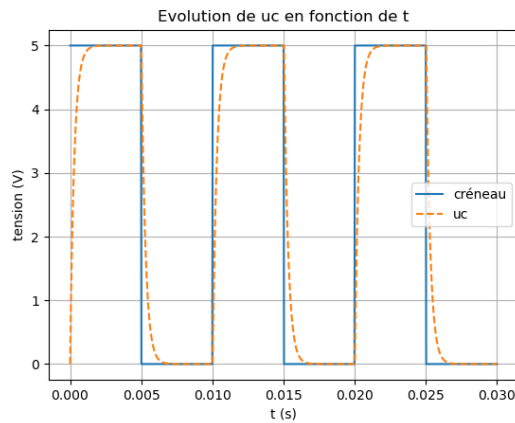
Solution:



$\frac{T}{2} < 5\tau$: le régime transitoire n'a pas le temps d'avoir lieu en totalité avant que le générateur bascule.



$\frac{T}{2} \approx 5\tau$: le régime transitoire a eu lieu à 99%, le régime permanent semble tout juste atteint.



$\frac{T}{2} \approx 10\tau$: le régime transitoire a lieu entièrement, et le régime permanent occupe une durée importante de $T/2$.

(c) **Conclure** sur la valeur à choisir pour la période du créneau permettant d'étudier le régime transitoire et le régime permanent. On pourra faire le lien avec le TP n°4.

Solution: Pour étudier le régime transitoire et le régime permanent, il est nécessaire de laisser le régime permanent s'installer, mais pas trop pour ne pas « tasser » le régime transitoire. Le choix $T = 5 \text{ ms}$ tel que $\frac{T}{2} \approx 8\tau$ paraît un compromis adapté.

Solution: Code complet :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt # pour le tracé graphique
2 # paramètres du circuit
3 R = 1000
4 C = 300*10**-9
5 tau = R*C
6 # paramètres du créneau
7 T = 5e-3 #s : période
8 E = 5 # V
9 # paramètres de résolution
10 t0 = 0 # instant initial
11 tf = 3*T # résolution sur l'intervalle [0,3*RC]
12 n = 1000 # nombre d'intervalles
13 h = (tf-t0)/n # à compléter : pas de calcul
14 liste_t = [ t0 + i*h for i in range(0,n+1) ] # initialisation de la liste
    des instants
15 # définition du créneau
16 liste_e = [0 for i in range (0,n+1) ] # initialisation de la liste des
    valeurs de la tension délivrée par le générateur
17 for i in range (0,n+1):
18     if int ( liste_t [i] // (T/2)) % 2 == 0:
19         liste_e [i]=E
20     else :
21         liste_e [i]=0
22 # Résolution avec Euler
23 liste_u = [ 0 for i in range(0,n+1) ] # initialisation de la liste des
    tensions
24 liste_u[0] = 0 # condition initiale sur la tension u
25 for i in range(0,n):
26     liste_u[i+1] = liste_u[i] + (liste_e[i]-liste_u[i])/tau*h
27 # Tracés :
```

```

28 plt.plot(liste_t, liste_e, label='créneau') #représentation du créneau
29 plt.plot(liste_t, liste_u, '--', label='uc') #représentation de uc(t)
30 plt.title('Evolution de uc en fonction de t')
31 plt.xlabel('t (s)')
32 plt.ylabel('tension (V)')
33 plt.grid()
34 plt.legend()
35 plt.show()

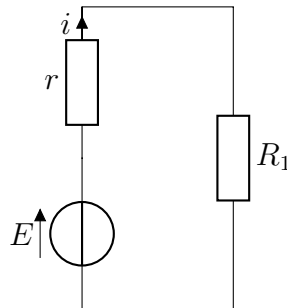
```

Exercice n°3 Guirlande de Noël

R1. On considère l'interrupteur K ouvert.

(a) **Établir** l'expression de l'intensité i , notée i_{ouvert} en fonction de E , r et R .

Solution:



D'après la loi des mailles et d'Ohm : $E - (r + R)i_{\text{ouvert}} = 0$, donc $i_{\text{ouvert}} = \frac{E}{r + R}$

(b) **Déterminer** l'expression de la puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{ouvert}}$ reçue par la guirlande R_1 .

Solution:

⚠ Remarque – Puissance reçue par une résistance

Vous devez connaître et utiliser directement le fait que la puissance reçue par une résistance traversée par un courant i est $\mathcal{P} = Ri^2$.

À part si on vous demande de l'établir explicitement, adapter de suite la formule à la situation étudiée.

La puissance reçue par la guirlande R_1 est $\mathcal{P}_{\text{ouvert}} = Ri_{1,\text{ouvert}}^2 = Ri_{\text{ouvert}}^2 = \frac{RE^2}{(R + r)^2}$

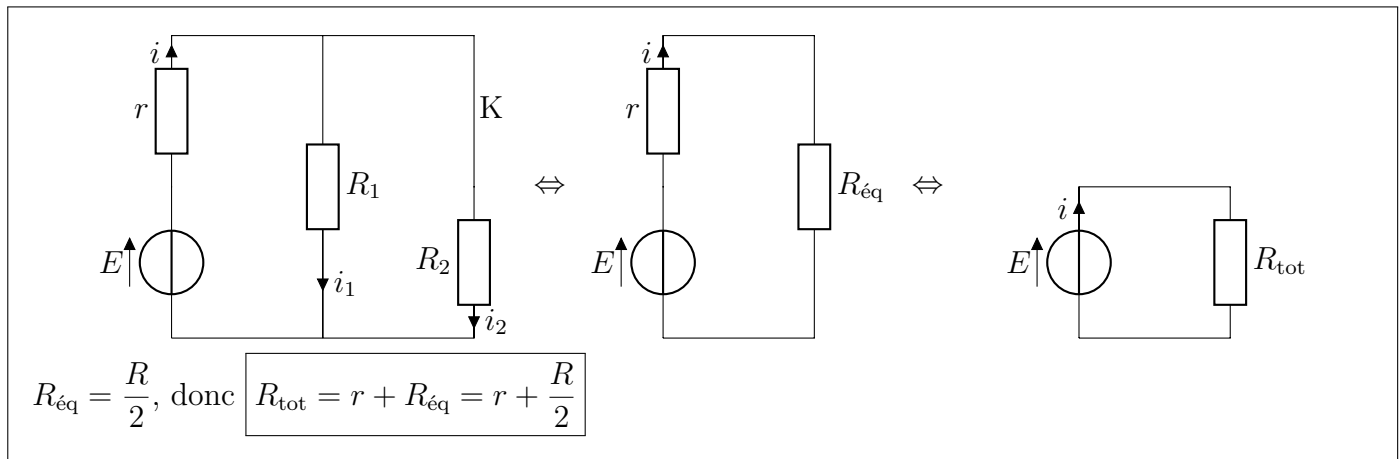
(c) Quelle est dans cette configuration la puissance reçue $\mathcal{P}_{2\text{ouvert}}$, reçue par la seconde guirlande R_2 ?

Solution: La guirlande R_2 n'est traversée par aucun courant, donc $\mathcal{P}_{2\text{ouvert}} = 0$

R2. On considère maintenant le cas où l'interrupteur K est fermé.

(a) **Associer** l'ensemble des résistances ensemble, on notera R_{tot} la résistance équivalente.

Solution:



(b) Quelle est alors la **nouvelle expression** pour l'intensité i , notée $i_{\text{fermé}}$?

Solution: D'après la loi d'Ohm et des mailles : $i_{\text{fermé}} = \frac{E}{R_{\text{tot}}} = \frac{E}{r + \frac{R}{2}}$

(c) Sans utiliser de loi d'Ohm, des nœuds et des mailles, mais une formule bien pratique dans cette configuration, établir les expressions des intensités i_1 et i_2 circulant dans les deux guirlandes.

Solution: Les résistances R_1 et R_2 sont en parallèle, nous pouvons utiliser la relation du pont diviseur de tension : $i_1 = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} i_{\text{fermé}} = i_2$

Ainsi : $i_1 = i_2 = \frac{i_{\text{fermé}}}{2} = \frac{E}{2r + R}$

(d) Quelles sont alors les puissances $\mathcal{P}_{1\text{fermé}}$ et $\mathcal{P}_{2\text{fermé}}$ reçues par les deux guirlandes ?

Solution: Les deux guirlandes reçoivent la même puissance : $\mathcal{P}_{1\text{fermé}} = \mathcal{P}_{2\text{fermé}} = \frac{RE^2}{(R + 2r)^2}$.

R3. ♪ ♪ La puissance reçue par la première guirlande (celle qui ne doit pas clignoter) est-elle identique lors des deux régimes étudiés ? **Interpréter** ce résultat.

Solution: Lors des deux régimes, la guirlande 1 reçoit plus de puissance quand l'interrupteur est ouvert que quand ce dernier est fermé.

$i_{\text{fermé}} > i_{\text{ouvert}}$, donc la puissance fournie par le générateur est plus importante quand l'interrupteur est fermé, mais elle n'est pas deux fois plus importante dans le cas où l'interrupteur est fermé. Or cette puissance doit alimenter deux guirlandes et non une seule.

R4. ♪ ♪ Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter cet effet ? Cette condition est-elle vérifiée pour $r = 1 \, \Omega$ et $R = 2 \, \Omega$?

Solution: Pour limiter cet effet, il faudrait que r soit très faible devant R , pour que $R + r \simeq R$ et $R + 2r \simeq R$. Cette condition n'est pas vérifiée ici.

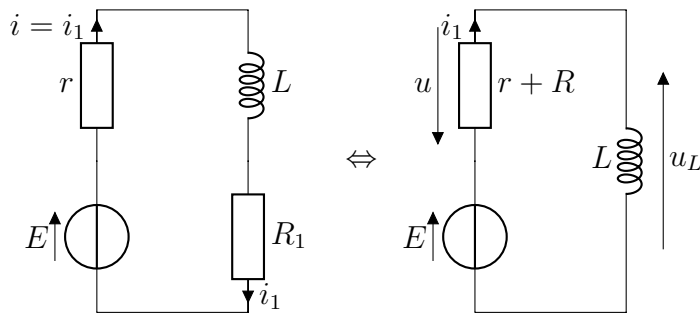
On étudie le circuit sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ sur lequel l'interrupteur K est ouvert.

R5. **Établir** l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right]$:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_0} = \frac{i_{1\text{ouvert}}(\infty)}{\tau_0}$$

Exprimer le temps caractéristique τ_0 , et vérifier ensuite que l'ajout de la bobine ne modifie pas la valeur du courant i en régime permanent. Pour pouvoir comparer, on prendra comme valeur de référence (sans bobine), c'est-à-dire vérifier que $i_{\text{ouvert}}(\infty) = i_{\text{ouvert}} = \frac{E}{R+r}$.

Solution:



Loi des mailles : $u_L + u = E$
Loi d'Ohm : $u = (r + R)i_1$
Loi de la bobine : $u_L = L \frac{di_1}{dt}$

Ainsi $L \frac{di_1}{dt} + (R + r)i_1 = E$

Soit $\frac{di_1}{dt} + \frac{R + r}{L}i_1 = \frac{E}{L}$

On identifie $\frac{1}{\tau_0} = \frac{R + r}{L}$, soit $\tau_0 = \frac{L}{R + r}$

Et on vérifie $\frac{E}{L} = \frac{R + r}{L} \times \frac{E}{R + r} = \frac{1}{\tau_0} \times i_{\text{ouvert}}$

La bobine n'a pas modifiée la valeur atteinte en régime permanent.

R6. Résoudre complètement cette équation différentielle si pour $t < 0$, aucun courant ne circulait dans le circuit.

Solution:

Remarque –

La question était formulé différemment de d'habitude, mais la question posée était bien « établir l'équation différentielle vérifiée par i_1 . »

Solution générale : $i_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_0}} + i_{\text{ouvert}}(\infty)$

Pour $t < 0$, aucun courant ne circule, donc $i_1(0^-) = 0$. Or l'intensité i_1 à travers la bobine ne subit pas de discontinuité, donc $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$

Ainsi $i_1(0) = A + i_{\text{ouvert}}(\infty) = 0$

Conclusion : $i_1(t) = i_{\text{ouvert}}(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$

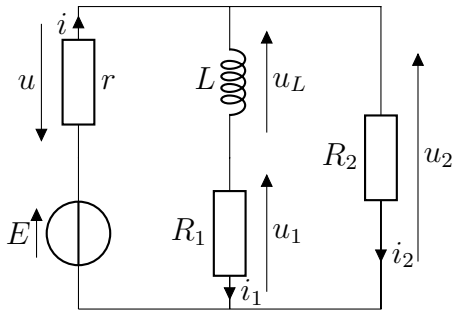
On s'intéresse maintenant à l'intervalle $\left[\frac{T}{2}, T\right]$, lorsque l'interrupteur K est fermé.

R7. Montrer que i_1 est alors solution de l'équation suivante :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L \left(1 + \frac{r}{R}\right)}$$

On donnera l'expression de τ_f en fonction de L, R et r .

Solution:



7 inconnues !

1. Loi des mailles à gauche : $u_1 + u_L + u = E$
2. Loi des mailles à droite : $u_2 = u_L + u_1$
3. Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$
4. Loi d'Ohm : $u = ri$
5. Loi d'Ohm : $u_1 = Ri_1$
6. Loi d'Ohm : $u_2 = Ri_2$
7. Loi de la bobine : $u_L = L \frac{di_1}{dt}$

$$(1), (5), (7) \quad Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + ri = E$$

$$(3) \quad Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + ri_1 + ri_2 = E$$

$$(R + r)i_1 + L \frac{di_1}{dt} + ri_2 = E \quad (8)$$

$$(2) \quad u_2 = L \frac{di_1}{dt} + Ri_1$$

$$(6) \quad Ri_2 = L \frac{di_1}{dt} + Ri_1$$

$$i_2 = \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} + i_1 \quad (9)$$

$$(9) \text{ dans } (8) \quad (R + r)i_1 + L \frac{di_1}{dt} + r \left(\frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} + i_1 \right) = E$$

$$L \left(1 + \frac{r}{R} \right) \frac{di_1}{dt} + (R + 2r) i_1 = E$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{(R + 2r)R}{(r + R)L} i_1 = \frac{R}{L(R + r)} E$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L \left(1 + \frac{r}{R} \right)}$$

On identifie : $\tau_f = \frac{(R + r)L}{(R + 2r)R}$

R8. Résoudre complètement cette équation différentielle si pour, dans le cas où avant que l'interrupteur se ferme, à $t = \frac{T^-}{2}$, le régime permanent était atteint.

Solution: Solution homogène : $i_1(t) = Be^{-\frac{t}{\tau_f}} + \frac{E}{R + 2r}$

Le régime permanent était atteint, donc $i_1(T^-/2) = i_{\text{ouvert}}(\infty) = \frac{E}{R + r}$

Par continuité de i_1 à travers la bobine : $i_1(T^+/2) = i_1(T^-/2)$

⚠ Remarque –

Utiliser la condition initiale à $t = T/2$, ne consiste pas du tout à considérer que $T/2 = 0$. T est la période du créneau qui est donc une grandeur non nulle.

C'est comme en maths quand vous déterminer la primitive F d'une fonction f avec la contrainte $f(2) = 3$. Cette contrainte vous permet de déterminer la constante d'intégration. Et vous n'écrivez pas $2 = 0$.

$$\text{Ainsi } Be^{-\frac{T}{2\tau_f}} + \frac{E}{R+2r} = \frac{E}{R+r}$$

$$\text{Soit } B = E \left(\frac{R+2r-R-r}{(R+2r)(R+r)} \right) e^{\frac{T}{2\tau_f}} = \frac{Er}{(R+2r)(R+r)} e^{\frac{T}{2\tau_f}}$$

$$\text{Ainsi } i_1(t) = \frac{Er}{(R+2r)(R+r)} e^{-\frac{t-T/2}{\tau_f}} + \frac{E}{R+2r}$$

R9. ♪ ♪ **Vérifier**, qu'une fois le régime permanent est atteint, notée $i_{1,\text{fermé}}(\infty)$, est identique à $i_{1,\text{fermé}} = \frac{E}{R+2r}$.

Solution: $\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R+2r}$ est bien la valeur de i_1 en l'absence de bobine.

On étudie ensuite expérimentalement les variations du courant i_1 en mesurant la tension aux bornes de la guirlande R_1 à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant pour deux valeurs différentes de l'inductance L :

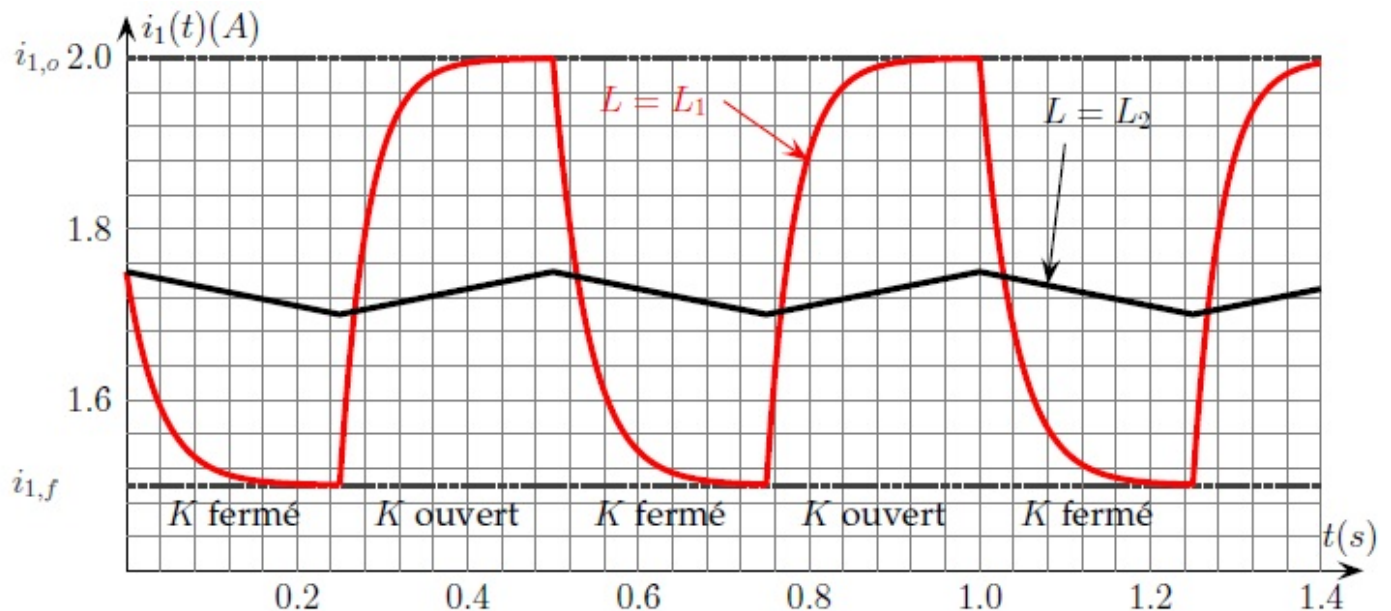
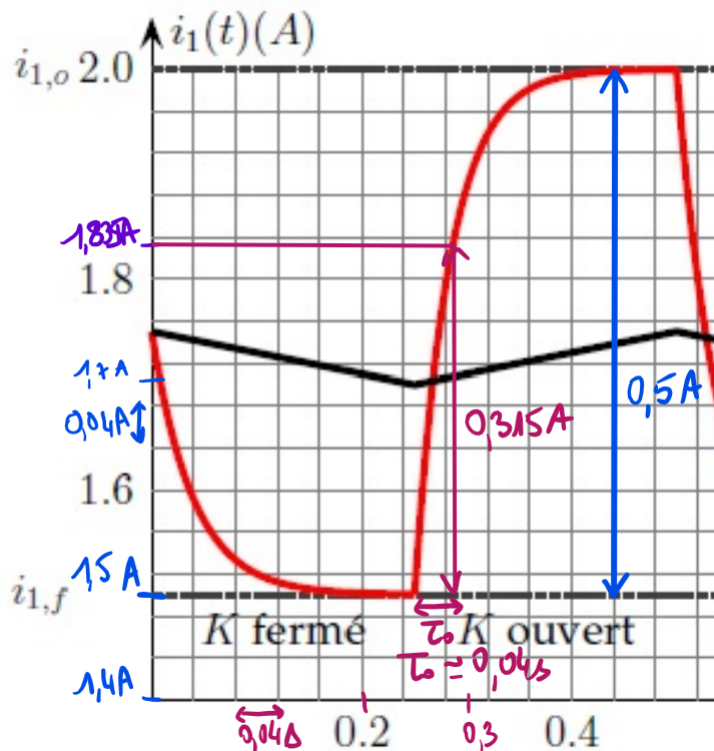


FIGURE 1 – Intensité du courant dans la branche de la guirlande 1 pour 2 valeurs d'inductance

R10. **Déterminer** la valeur de L_1 à partir de l'étude graphique (on rappelle que $r = 1 \Omega$ et $R = 2 \Omega$) en expliquant votre démarche.

Solution: Exploitions la portion de graphe quand K est ouvert. Lisons la constante de temps τ_0 . Attention, i_1 évolue durant cette portion entre 1,5 A et 2,0 A, doit de 0,5 A. Calculons 63% de 0,5 A : 0,315 A.



$$\tau_0 = 0,04 \text{ s} = \frac{L_1}{R + r}, \text{ soit } L_1 = (R + r) \times \tau_0 = 3 \times 0,04 = 0,12 \text{ H}$$

Ce qui représente une valeur élevée par rapport aux valeurs habituelles.

⚠ Remarque –

Si vous utilisez τ_f pour déterminer L , il faut étudier la décharge, et utiliser le fait que :

$$i(t_0 + \tau_f) = i(t_0) - 0,63 \times (i(t_0) - i(\infty)) = i(\infty) + 0,37(i(t_0) - i(\infty)).$$

R11. ♪ ♪ **Justifiez** ensuite qualitativement que $L_2 \gg L_1$ (sans chercher à déterminer la valeur de L_2), ainsi que l'allure de la courbe pour cette valeur L_2 .

Solution: L'allure pour $L = L_2$ ne fait apparaître que le tout début des régimes transitoires, ce qui signifie donc que la constante de temps τ'_0 est bien supérieure à τ_0 . Or τ_0 est proportionnel à L , donc

$$L_2 \gg L_1$$

R12. ♪ ♪ Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi L_1 ou L_2 pour minimiser les variations du courant passant dans la première guirlande ? **Justifier** soigneusement votre réponse.

Solution: Les variations de courant dans la première guirlande sont bien moins importantes pour L_2 : i_1 varie entre 1,7 A et 1,75 A, soit de 0,05 A. Pour L_1 , i_1 varie de 0,5 A, soit d'un facteur 10 de plus qu'avec L_2 . Ainsi, il faudra choisir L_2 pour minimiser les variations du courant passant dans la première guirlande.