

? À rendre jeudi 13 novembre 2025

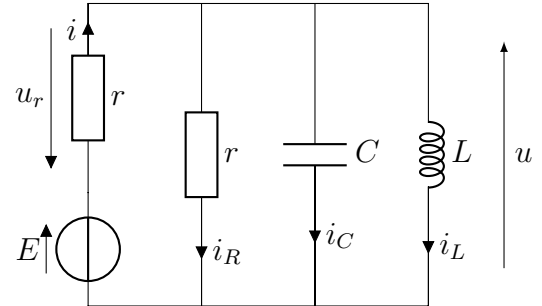
Devoir Maison n°6 : Oscillateurs amortis — Corrigé

Exercice n°1 Étude d'un circuit RLC

On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre alimenté par un générateur de tension de fem $E = 5,00 \text{ V}$ et de résistance interne $r = 50 \Omega$.

On donne : $C = 1,0 \mu\text{F}$.

Pour $t < 0$, aucun courant ne circule dans le circuit et le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. On souhaite étudier l'évolution de la tension u en fonction du temps pour les temps $t > 0$.



R1. **Représenter** le circuit à $t > 0$, et introduire toutes les grandeurs électriques nécessaires*.

R2. **Justifier** parfaitement que les conditions initiales à $t = 0^+$ s'écrivent : $u(0^+) = 0 \text{ V}$ et $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{rC}$ †.

Solution:

- Le condensateur était initialement déchargé, donc $u(t < 0) = 0$. De plus, **la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps**, donc $u(0^+) = u(0^-)$, ainsi

$$u(0^+) = 0$$

- Le circuit n'était traversé par aucun courant pour $t < 0$, donc $i(t < 0) = i_L(t < 0) = i_C(t < 0) = i_R(t < 0) = 0$. De plus, **l'intensité du courant à travers une bobine est une fonction continue du temps**, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-)$, donc

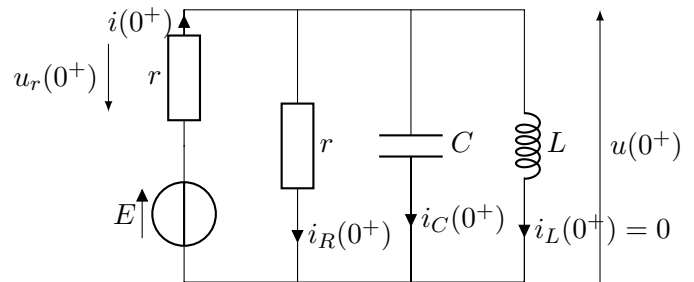
$$i_L(0^+) = 0$$

Afin de déterminer $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$, il nous faut donc déterminer $i_C(0^+)$.

La loi des nœuds à $t = 0^+$: $i(0^+) = i_C(0^+) + i_L(0^+) + i_R(0^+)$, or $i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{r} = 0$ et $i_L(0^+) = 0$. Ainsi $i(0^+) = i_C(0^+)$.

La loi des mailles nous donne que $u(0^+) + ri(0^+) = E$, donc $i(0^+) = i_C(0^+) = \frac{E}{r}$.

On en déduit (enfin !) que $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{rC}$



⚠ Remarque —

† Il faut bien distinguer les différentes intensités.

*. Indication : il faut 3 intensités, et 1 tension (rien de plus)

†. Indications :

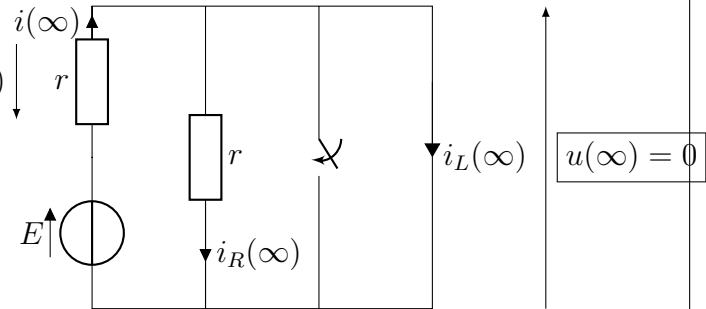
- Suivre les 2 premiers points de la méthode du cours : u et l'intensité à travers la bobine.....
- Avec $u(0^+)$, déterminer l'intensité à travers la résistance.
- En déduire la relation entre $i(0^+)$ et l'intensité à travers le condensateur à 0^+ .
- La loi des mailles et la loi du condensateur permet d'en déduire $\frac{du}{dt}(0^+)$.

R3. **Représenter** le circuit équivalent en régime permanent, et en déduire la valeur de la tension u atteinte en régime permanent.

Solution:

En régime permanent, aucune grandeur électrique ne dépend du temps, donc toutes les dérivées temporelles sont nulles. La tension aux bornes la bobine vaut $u(\infty) = L \frac{di}{dt} = 0$, donc la bobine se comporte comme un fil en RP. L'intensité du courant à travers du condensateur $i_C(\infty) = C \frac{du}{dt} = 0$, donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en RP. Ainsi, on peut représenter le circuit étudié.

Ainsi $u(\infty) = 0$



La loi d'Ohm nous permet également d'en déduire que $i_R(\infty) = \frac{u(\infty)}{r} = 0$.

La loi des mailles nous donne enfin $u(\infty) + ri(\infty) = E$, et donc $i(\infty) = \frac{E}{r}$.

Remarque – ATTENTION

La bobine est équivalente à un fil, vous ne pouvez pas supprimer la branche (le fil), le fil court-circuite r et C .

R4. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension u .

L'écrire sous forme canonique[‡]

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

et **identifier** les expressions de ω_0 (en fonction de L et C) et Q (en fonction de L , C , et r).

Comment s'appellent ces deux grandeurs ? Quelles sont leurs unités ?

Solution:

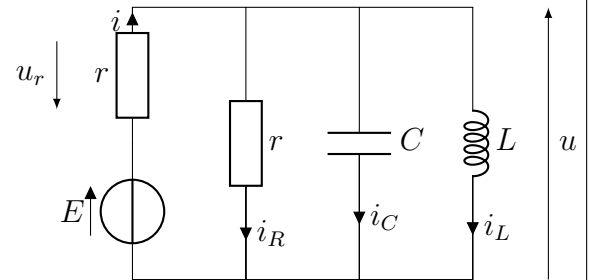
Remarque –

Poser les 6 équations proprement.

Il y a 6 inconnues, donc il faut 6 équations indépendantes :

- (1) Loi des mailles : $u + u_r - E = 0$
- (2) Loi des nœuds : $i = i_C + i_L + i_R$
- (3) Pour C : $i_C = C \frac{du}{dt}$
- (4) Pour L : $u = L \frac{di_L}{dt}$
- (5) Pour R : $u = ri_R$; (6) Pour r : $u_r = ri$

Il faut combiner ces 6 équations afin d'obtenir une équation différentielle vérifiée par u , il faut donc tout exprimer en fonction de u .



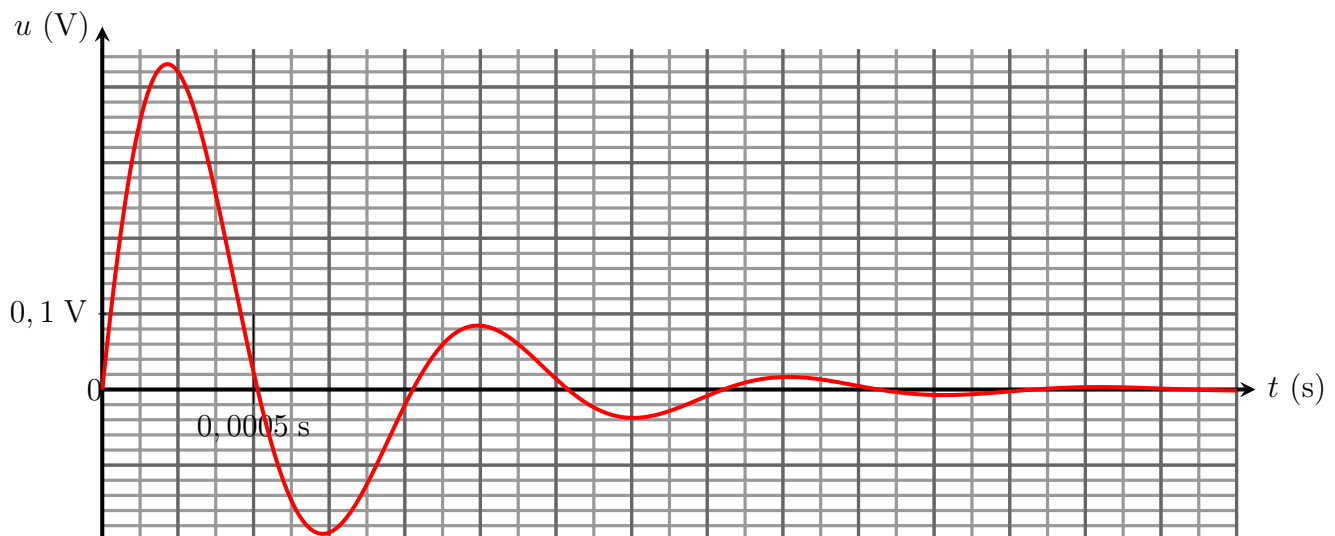
[‡]. Il n'y a pas d'erreur, le second membre est bien nul.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u + ri &= E \\
 (2) \quad u + ri_C + ri_L + ri_R &= E \\
 (3), (5) \quad u + rC \frac{du}{dt} + ri_L + u &= E \\
 rC \frac{du}{dt} + ri_L + 2u &= E \\
 i_L &= \frac{E}{r} - \frac{2u}{r} - C \frac{du}{dt} \\
 (4) \quad u &= L \frac{di_L}{dt} \\
 u &= L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{r} - \frac{2u}{r} - C \frac{du}{dt} \right) \\
 u &= -\frac{2L}{r} \frac{du}{dt} - LC \frac{d^2u}{dt^2} \\
 LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2L}{r} \frac{du}{dt} + u &= 0 \\
 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{rC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u &= 0 \\
 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u &= 0
 \end{aligned}$$

Par identification :

- La pulsation propre, en rad/s : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Le facteur de qualité Q , sans unité : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{rC} \Leftrightarrow Q = \omega_0 \frac{rC}{2} = \frac{rC}{2} \sqrt{\frac{1}{LC}}$, d'où $Q = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

On donne l'évolution de u en fonction du temps :



R5. Quel type de régime transitoire est observé ? Que peut-on en déduire sur le facteur de qualité Q ?

Solution: On observe des pseudo-oscillations, il s'agit donc d'un régime pseudo-périodique. On peut en déduire que $Q > \frac{1}{2}$.

R6. **Résoudre complètement** l'équation différentielle précédente, et montrer que la solution se met sous la forme suivante

$$u(t) = \frac{E}{rC\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)$$

Exprimer Ω et τ . Comment s'appellent Ω et τ ? Quelles sont leurs unités? Que représentent ces grandeurs? Cette question doit être parfaitement traitée même si vous n'avez pas réussi à faire les questions précédentes, l'énoncé vous fournit tout.

Solution: L'équation différentielle se résout en 4 étapes, à suivre scrupuleusement :

1. **Résolution de l'équation différentielle homogène :**

Étape 1 Équation caractéristique : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$

Étape 2 Discriminant : $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{(2Q)^2} - 1 \right)$

D'après la courbe de $u(t)$ fournie, on est dans le cas d'un régime pseudo-périodique, donc $\Delta < 0$.

Étape 3 Racines de l'équation caractéristique réelles : $X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 j \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$

Étape 4 Solution de l'équation homogène : $u_H(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$

2. Il n'y a pas de solution particulière à rechercher ici car l'équation a un second membre nul.

3. Ainsi $u(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$

4. **Recherche des deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales :**

$u(0) = A = 0$, donc $A = 0$

$$\frac{du}{dt} = e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \times B \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \right)$$

Ainsi $\frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{rC} = B\Omega$, soit $B = \frac{E}{rC\Omega}$

Ainsi $u(t) = \frac{E}{rC\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)$

On vérifie l'homogénéité en se souvenant que rC est homogène à un temps, donc $rC\Omega$ est sans dimension.

Ne disposant que d'un ohmmètre et d'un capacimètre, on souhaite utiliser l'évolution temporelle précédente de u pour déterminer la valeur l'inductance de la bobine.

On définit le décrement logarithmique, avec T la pseudo-période, par :

$$\delta = \ln \left(\frac{u(t)}{u(t+T)} \right)$$

R7. **Déterminer graphiquement** la valeur de δ .

Solution: Graphiquement, on lit : $u(t) = 0,43$ V et $u(t+T) = 0,08$ V, donc $\delta = \ln \frac{0,43}{0,08} = \ln(2) = 1,68$

Pour les AN suivantes, bien utiliser la valeur fournie par la calculatrice avec tous les chiffres, pour éviter les arrondis.)

R8. ♪ ♪ **Établir l'expression** du décrement logarithmique en fonction de τ et T .

Puis montrer que δ s'exprime en fonction de Q uniquement selon : $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t)}{u(t+nT)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)}{e^{-\frac{t+nT}{\tau}} \sin(\Omega(t+nT))} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^{\frac{nT}{\tau}} \sin(\Omega t)}{\sin(\Omega t + n\Omega T)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{e^{\frac{nT}{\tau}} \sin(\Omega t)}{\sin(\Omega t + n2\pi)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{nT}{\tau}\end{aligned}$$

D'où $\delta = \frac{T}{\tau}$

Or $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$, on en déduit $\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \times \frac{\omega_0}{2Q}$

Soit $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

Le résultat précédent peut être admis pour traiter la suite, qui doit être traitée même si vous n'avez pas réussi à traiter la question R8.

R9. À partir des deux questions précédentes, en déduire la valeur de Q .

En déduire la valeur de L .

Solution:

À partir de δ , on peut en déduire Q facilement :

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \\ 4Q^2 - 1 &= \frac{4\pi^2}{\delta^2} \\ 4Q^2 &= \frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1 \\ Q^2 &= \frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} = 2$$

Enfin, on en déduit L avec : $L = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \times \frac{C}{Q^2} = 0,167 \text{ mH}$

Exercice n°2 Diapason 🎵 🎵

Pour estimer le facteur de qualité et la fréquence propre du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore. On obtient les deux enregistrements.

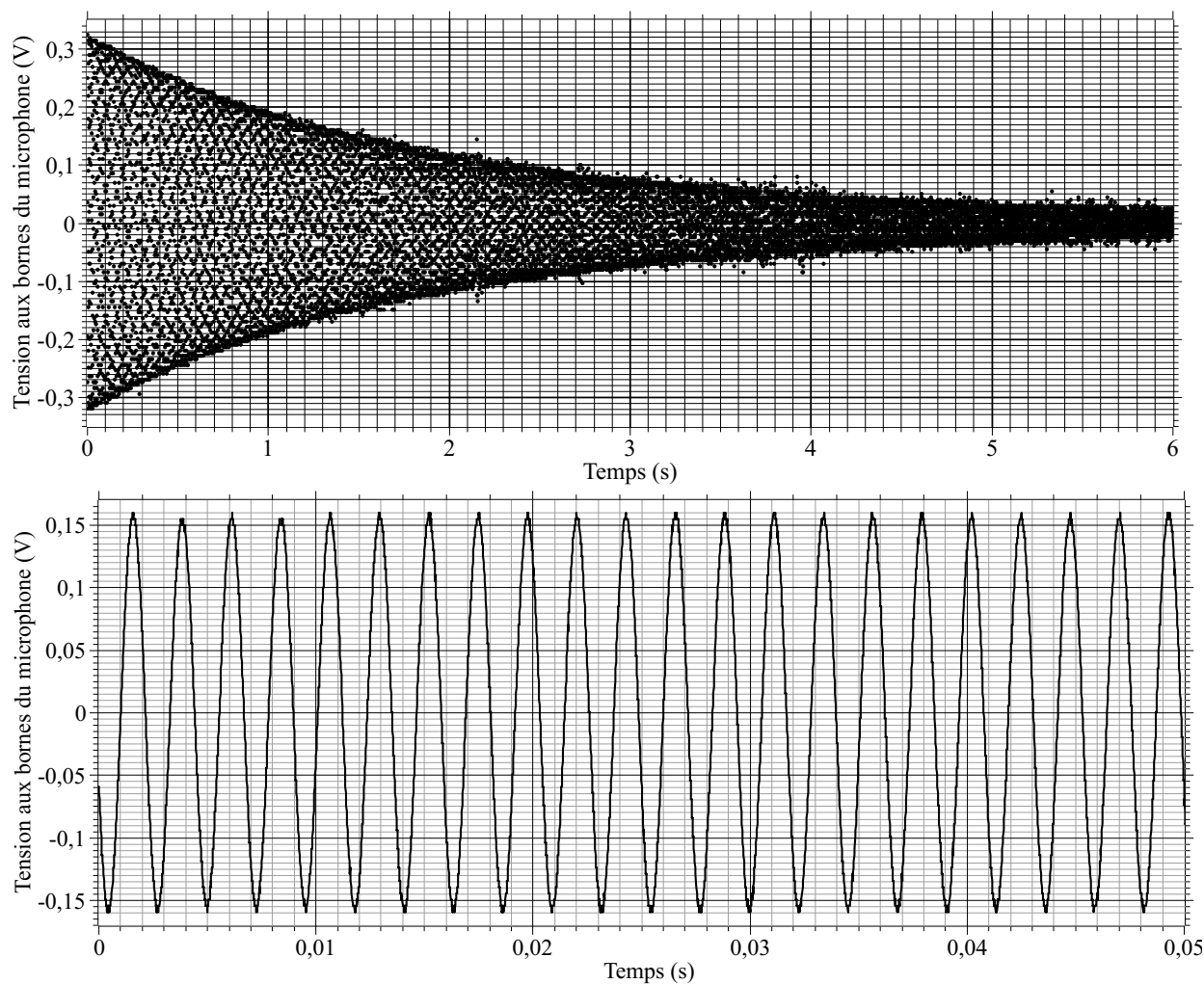


FIGURE 1 – Étude de la réponse percussionnelle : Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason en réponse à une percussion avec le marteau

Exploiter les enregistrements pour **estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité** du diapason (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations).

Solution: Le diapason oscille très longtemps, sur le deuxième graphe on ne perçoit pas de diminution de l'amplitude sur les 20 périodes présentes. Par conséquent Q a une valeur très élevée.

- Ainsi la pseudo-pulsation est peu différente de la pulsation propre : $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$

D'après le 2^e graphe, on lit la pseudo-période ($\approx$ période propre) : $T \approx T_0 = \frac{0,618 - 0,6}{8} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ s}$,

soit $\Omega \approx \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2790 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (soit $f_0 = 444 \text{ Hz}$)

- Sur le premier graphe, on lit la durée τ caractéristique (cf décharge du condensateur : temps de décharge à 37 %) : $u(0) = 0,33 \text{ V}$

$u(\tau) = 0,37 \times u(0) = 0,12 \text{ V}$: τ est l'antécédent de cette valeur : $\tau = 2,1 \text{ s}$

$$\text{Or } \tau = \frac{2Q}{\omega_0},$$

On conclut : $Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = 2900$: c'est un oscillateur de facteur de qualité très élevé.