

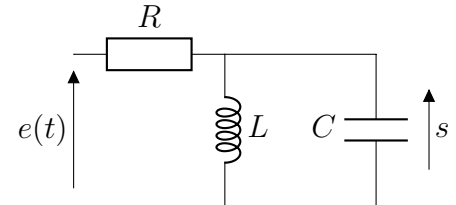
? Pour jeudi 11 décembre 2025
Devoir Maison n°8 – Corrigé

I Exercices du DM

Exercice n°1 Étude d'un filtre

On étudie le circuit ci-contre alimenté en régime sinusoïdal par un générateur de fem $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

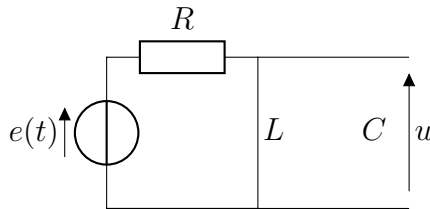
On étudie la tension aux bornes de l'association parallèle du condensateur et de la bobine.



R1. Par analyse asymptotique du circuit, déterminer la nature du filtre.

Solution:

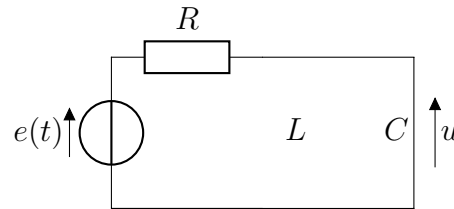
À basse fréquence



$$u = 0$$

C'est donc un filtre passe-bande.

À haute fréquence



$$u = 0$$

R2. Établir l'expression de la fonction de transfert et l'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q en fonction de R , L et C . On pourra admettre la forme canonique fournie, et ne pas passer trop de temps dans l'identification de ω_0 et Q .

Solution: Le condensateur et la bobine sont en parallèle, $\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{Lj\omega} + Cj\omega$.

Pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \underline{Z}_{\text{eq}}} \underline{e} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{Lj\omega} + Cj\omega \right)} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{Lj\omega} + Cj\omega \right)} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + Rj \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} \end{aligned}$$

Par identification : $RC = \frac{Q}{\omega_0}$ (1) et $\frac{R}{L} = Q\omega_0$ (2)

$$(1) \times (2) : R^2 \frac{C}{L} = Q^2, \text{ soit } \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

$$\frac{(2)}{(1)} : \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \text{ soit } \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

R3. Exprimer le gain de ce filtre.

Solution: gain :
$$G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

R4. Justifier qu'il y a résonance pour une pulsation que l'on établira en fonction de ω_0 . Y a-t-il une condition sur le facteur de qualité pour son existence ?

Solution:



Remarque –

↑ L'étude du dénominateur seul est possible car le numérateur ne dépend pas de ω .

Le numérateur est indépendant de ω , donc U_m est maximal quand $\omega \mapsto 1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$, quand

$$\omega \mapsto \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$$

Or $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \geq 0$ et peut s'annuler.

Ainsi G présente une résonance en $\omega = \omega_0$, quelque soit la valeur de Q .

R5. Exploiter le graphique ci-dessous pour déterminer les valeurs de la fréquence propre f_0 et Q . La démarche devra être décrite précisément.

Solution:



Remarque –

↑ L'abscisse du diagramme de Bode est graduée en fréquence, vous pouvez ne pas passer par la pulsation.

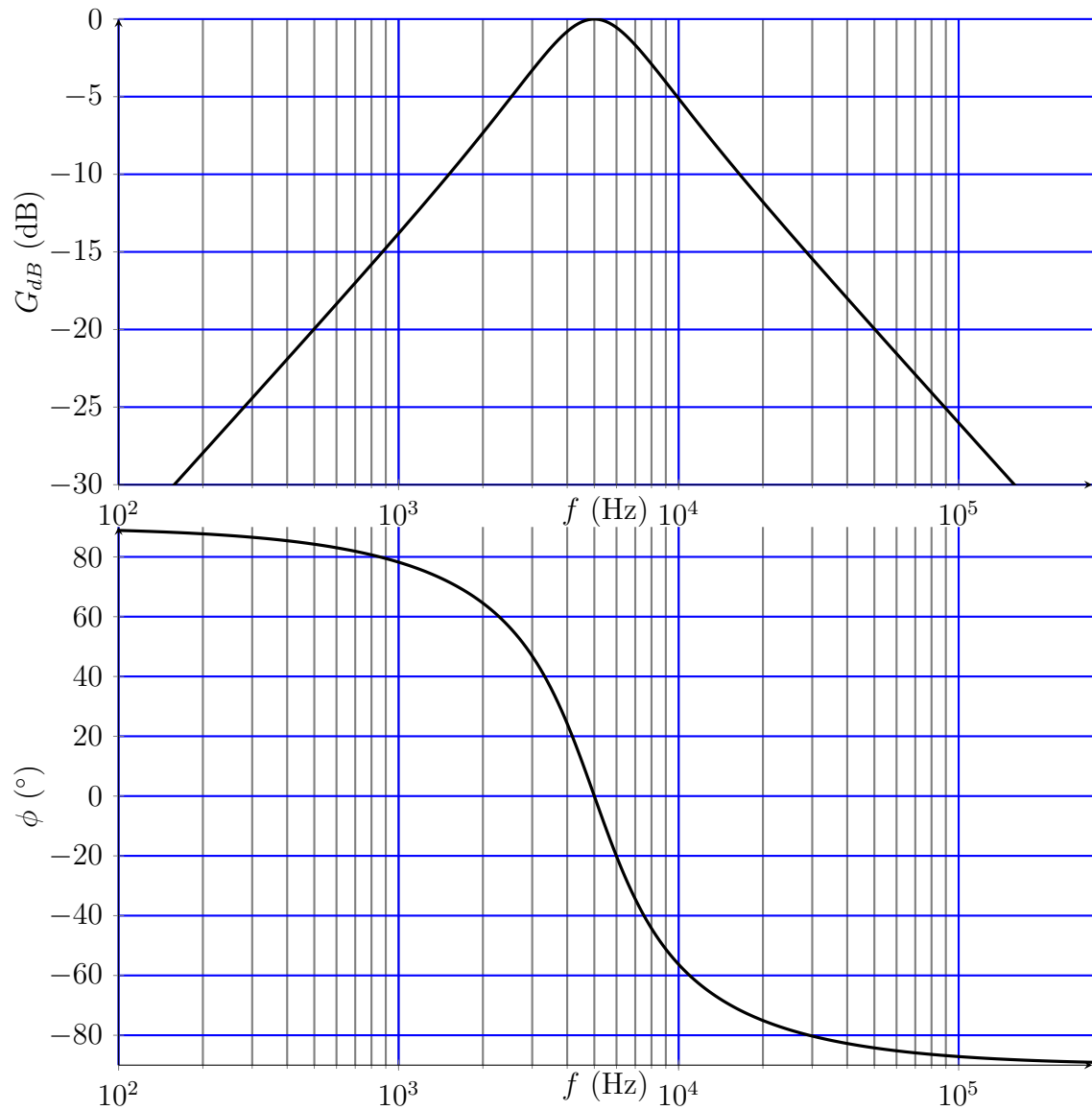
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{2\pi f_0}{2\pi \Delta f} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

On lit à la résonance $f_0 = 5$ kHz.

On lit les fréquences de coupure à -3 dB : $f_{c1} = 3$ kHz et $f_{c2} = 8$ kHz

Ainsi la largeur de la bande passante vaut $\Delta f = 5$ kHz

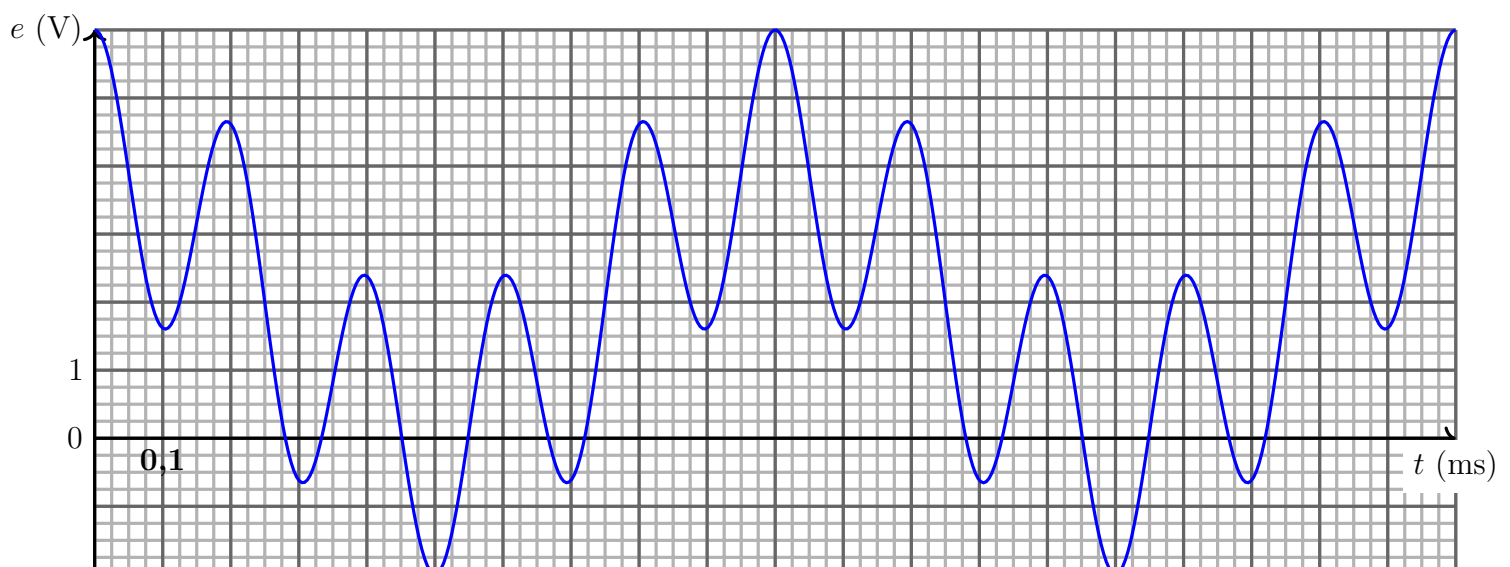
On en déduit le facteur de qualité
$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{5}{5} = 1}$$



R6. À partir de la fonction de transfert, déterminer les équations des asymptotes au diagramme de Bode en gain. Comparer au diagramme fourni.

En entrée de ce filtre est envoyé un signal périodique, représenté ci-dessous et d'expression :

$$e(t) = E_0 + E \cos(2\pi ft) + E \cos(2\pi \times 5ft)$$



R7. Déterminer la fréquence du signal.

Solution:



Remarque –

⚠ Attention à la lecture graphique, notamment au niveau de l'échelle !

On lit la période : $T = 1 \text{ ms}$, soit $f = 1 \text{ kHz}$.

R8. On recherche la tension de sortie sous la forme :

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) + S_2 \cos(2\pi \times 5ft + \varphi_2)$$

(a) Pourquoi $S_0 = 0$?

Solution: $S_0 = 0$, car le filtre passe-bande coupe les signaux continus (de basse fréquence).

Ou, par le calcul : $S_0 = G(\omega = 0) \times E_0$, or $\lim_{\omega \rightarrow 0} G = 0$

(b) Par exploitation du diagramme de Bode, déterminer S_1 , S_2 , φ_1 et φ_2 .

Solution:

• $f = 1 \text{ kHz}$

$$\begin{aligned} S_1 &= G(f = 1 \text{ kHz}) \times E \\ &= 10^{\frac{G_{dB}(1 \text{ kHz})}{20}} \times E \\ &= 10^{-\frac{14}{20}} E \\ &= \frac{2}{10} E \\ &= \frac{E}{5} \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \phi(1 \text{ kHz}) = 80^\circ = 80 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$$

• $f = 5 \text{ kHz}$

$$\begin{aligned} S_2 &= G(f = 5 \text{ kHz}) \times E \\ &= 10^{\frac{G_{dB}(5 \text{ kHz})}{20}} \times E \\ &= E \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \phi(5 \text{ kHz}) = 0$$

(c) En déduire l'expression complète du signal de sortie.

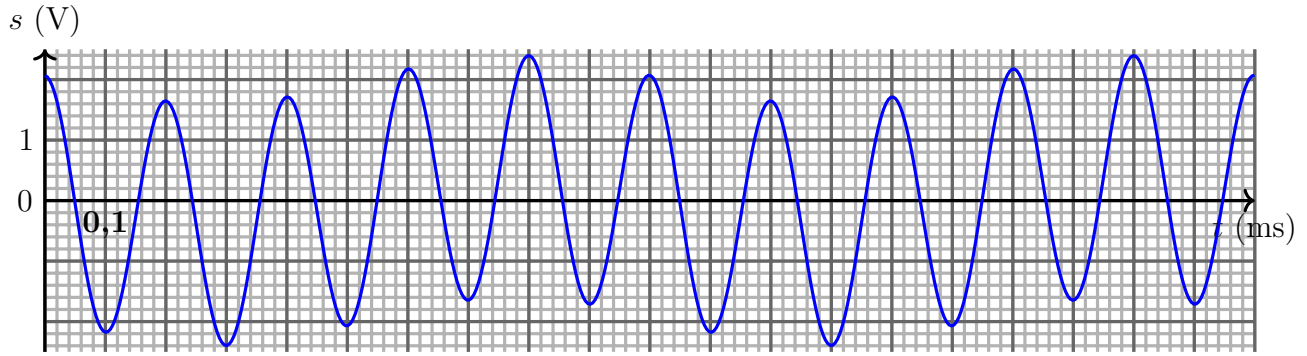
Solution: On en déduit : Ainsi

$$s(t) = \frac{E}{5} \cos(2\pi ft + 4\pi/9) + E \cos(2\pi 5ft)$$

(d) Représenter l'allure de s .

Solution: La composante continue est supprimée par le filtre passe-bande, donc s est centrée sur 0. La composante à 5 kHz est d'amplitude cinq fois plus importante que celle à 1 kHz, qui est plus

lente. Ainsi, on obtient un signal « presque » sinusoïdal à 5 kHz dont l'amplitude varie un peu à 1 kHz.



Exercice n°2 Trains à sustentation magnétique (Concours Centrale-Supélec PSI)

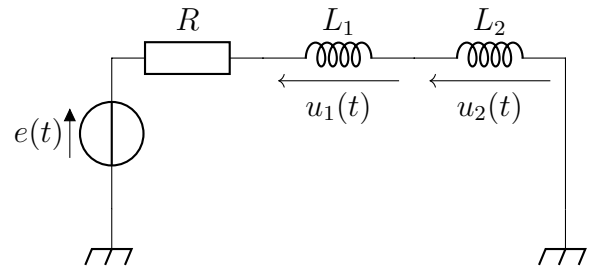
On envisage une variation Δz de la position du train par rapport à la position d'équilibre $z_e = \delta$, en considérant $\Delta z \ll \delta$, on montre que $L_1 = L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right)$ et $L_2 = L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$.

Mesure des variations d'inductance

Les bobines $B1$ et $B2$ qui se situent de part et d'autre du rail sont d'inductance respective L_1 et L_2 .

Elles sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique $e(t) = E \cos(\omega t)$, de pulsation ω , en série avec une résistance R .

On néglige ici les résistances des deux bobines.



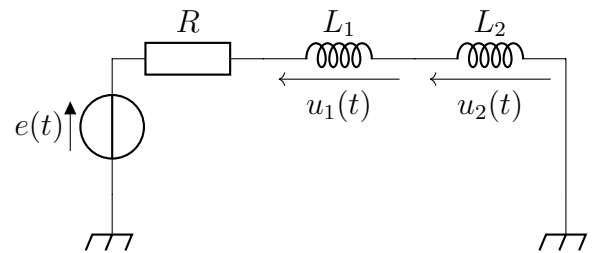
R1. Déterminer les expressions des tensions électriques complexes $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ en fonction de R , L_1 , L_2 , ω et $\underline{e}(t)$.

Solution: Le circuit est alimenté en RSF, on utilise donc la notation complexe et les impédances pour résoudre le problème.

Les trois dipôles sont en série, on peut donc utiliser la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_1 = \frac{L_1 j\omega}{R + L_1 j\omega + L_2 j\omega} \underline{e}, \text{ soit } \underline{u}_1 = \frac{L_1 j\omega}{R + (L_1 + L_2) j\omega}$$

$$\text{De même : } \underline{u}_2 = \frac{L_2 j\omega}{R + (L_1 + L_2) j\omega}$$



Ces deux tensions u_1 et u_2 sont placées en entrée d'un montage soustracteur qui délivre en sortie une tension $u_s = u_1 - u_2$.

R2. Établir la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}}$ et la mettre sous la forme $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ où H_0 et ω_0 sont des fonctions de L_e , R , Δz et δ , que l'on déterminera.

Solution: En sortie du soustracteur, on récupère $\underline{u}_s = \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \frac{(L_1 - L_2) j\omega}{R + (L_1 + L_2) j\omega} \underline{e}$

$$\text{Ainsi la fonction de transfert s'écrit } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = \frac{(L_1 - L_2) j\omega}{R + (L_1 + L_2) j\omega}, \text{ soit } \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{L_1 - L_2}{R} j\omega}{1 + \frac{L_1 + L_2}{R} j\omega}$$

$$\text{On peut identifier avec la forme fournie (au dénominateur) : } \frac{L_1 + L_2}{R} = \frac{1}{\omega_0}, \text{ soit } \omega_0 = \frac{R}{L_1 + L_2} = \frac{R}{2L_e}$$

Et au numérateur : $\frac{L_1 - L_2}{R} = \frac{H_0}{\omega_0}$, soit $H_0 = \omega_0 \times \frac{L_1 - L_2}{R} = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}$, soit $H_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$ (qui peut donc être positif ou négatif).

R3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$. La réponse devra être parfaitement justifiée à partir de l'étude précise de la fonction de transfert.

Pour le diagramme de Bode en phase, deux cas devront être distingués selon le signe de Δz .

Solution:

— À basse fréquence, $\omega \ll \omega_0$, soit $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$: $\underline{H}_{BF} \approx \frac{H_0 j\omega}{\omega_0}$

$G_{dB,BF} = 20 \log \left(\left| H_0 \right| \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 20 \log(|H_0|) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$: il s'agit d'une asymptote de pente +20 dB/dec.

$$\varphi_{BF} = \arg \left(\frac{H_0 j\omega}{\omega_0} \right) = \arg \left(j \frac{\Delta z}{\delta} \right)$$

— Si $\Delta z > 0$, $\underline{H}_{BF} \in j\mathbb{R}^+$, soit $\varphi_{BF} = +\frac{\pi}{2}$

— Si $\Delta z < 0$, $\underline{H}_{BF} \in j\mathbb{R}^-$, soit $\varphi_{BF} = -\frac{\pi}{2}$

— À haute fréquence, $\omega \gg \omega_0$, soit $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$: $\underline{H}_{HF} \approx \frac{H_0 j\omega}{\omega_0} = H_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$

$G_{dB,HF} = 20 \log(|H_0|)$: il s'agit d'une asymptote horizontale à $20 \log(|H_0|)$.

$$\varphi_{HF} = \arg(H_0) = \arg \left(\frac{\Delta z}{\delta} \right)$$

— Si $\Delta z > 0$, $\underline{H}_{HF} \in \mathbb{R}^+$, soit $\varphi_{HF} = 0$

— Si $\Delta z < 0$, $\underline{H}_{HF} \in \mathbb{R}^-$, soit $\varphi_{HF} = -\pi$

$$\text{En effet : } \underline{H} = \frac{H_0 j(\omega/\omega_0)(1 - j\omega/\omega_0)}{1 + (\omega/\omega_0)^2} = \frac{H_0(j\omega/\omega_0 + \omega^2/\omega_0^2)}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

Ainsi $\Re(\underline{H})$ et $\Im(\underline{H})$ sont du signe de H_0 .

Ainsi, si $H_0 > 0$: $\varphi \in [0, \pi/2]$; si $H_0 < 0$: $\varphi \in [-\pi, -\pi/2]$.

Diagramme de Bode en gain

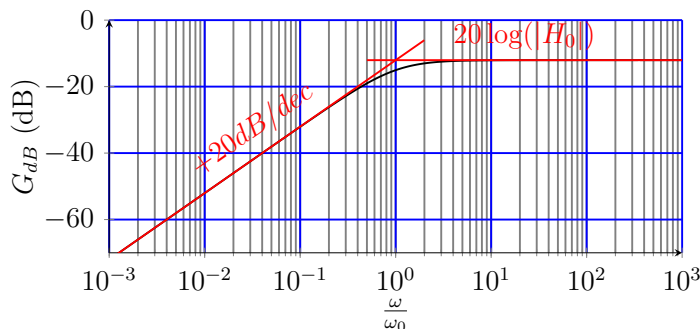


Diagramme de Bode en phase pour $H_0 > 0$

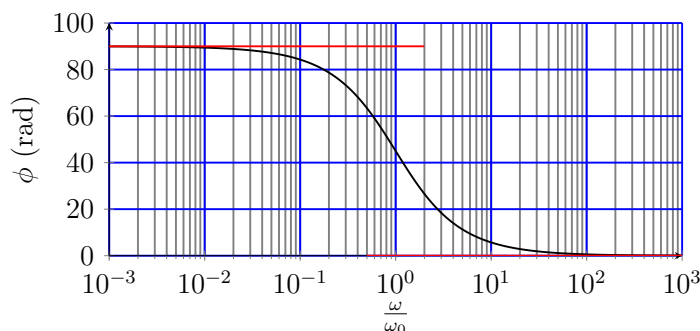
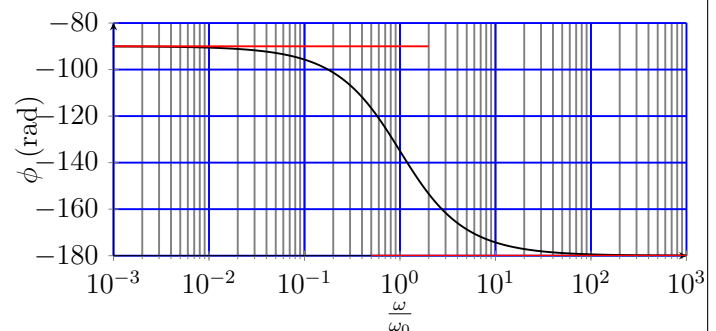


Diagramme de Bode en phase pour $H_0 < 0$



R4. De quel type de filtre s'agit-il ?

Solution: Il s'agit d'un filtre passe-haut du premier ordre, du 1^{er} ordre car la fonction de transfert ne contient que des polynômes du 1^{er} ordre, et passe-haut car il transmet les signaux haute fréquence sans transmettre les signaux basse fréquence.

R5. Quelle est la signification de la pulsation ω_0 ?

Solution: La pulsation ω_0 est la pulsation de coupure à -3 dB.

En effet $|\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{H_0}{1 + j}$, ainsi $|\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|H_{\max}|}{\sqrt{2}}$



Remarque —

Il faut justifier !

R6. Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $\underline{H}(j\omega)$ soit indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la rame ?

On a $R = 750 \, \Omega$, $L_e = 60 \, \text{mH}$ et une fréquence d'utilisation $f = 4 \, \text{kHz}$.

Solution: $\underline{H}(j\omega)$ est indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la rame à « haute fréquence », c'est-à-dire pour des fréquences f très grandes devant $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{R}{2L_e}$

A.N. : $f \gg f_0 = 9,9 \cdot 10^2 \, \text{Hz}$, on peut considérer qu'on se situe dans ce cadre là si la fréquence du signal est de $f = 4 \, \text{kHz}$.

R7. Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme $u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$.

Solution: Pour $f \gg f_0$: $\frac{u_s}{\underline{e}} \approx \frac{\Delta z}{\delta}$, ainsi $\underline{u_s} = \frac{\Delta z}{\delta} \underline{e}$, avec $\underline{e}$ d'amplitude E .

Ainsi $u_s(t) = \frac{|\Delta z|}{\delta} E \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est le déphasage de u_s par rapport à e .

R8. Exprimer et calculer le déphasage φ .

Solution: $\varphi = 0$ ou $\varphi = -\pi$ selon le signe de Δz :

— Si $\Delta z > 0$, $\varphi = 0$ et ainsi $u_s(t) = \frac{\Delta z}{\delta} E \cos(\omega t)$

— Si $\Delta z < 0$, $\varphi = -\pi$ et $|\Delta z| = -\Delta z$, ainsi $u_s(t) = \frac{-|\Delta z|}{\delta} E \cos(\omega t - \pi)$, soit $u_s(t) = \frac{\Delta z}{\delta} E \cos(\omega t)$

Donc on peut écrire, quelque soit le signe de Δz : $u_s(t) = \frac{\Delta z}{\delta} E \cos(\omega t)$

Électronique de conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position z de la rame.

On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication K_m . En sortie du multiplieur, la tension s'écrit $s_m(t) = K_m \times e(t) \times u_s(t)$.

- R9. Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale (linéariser $s_m(t)$).
Préciser le terme représentatif de la position z de la rame.

Solution:

Tension électrique à la sortie du multiplieur : $s_m(t) = K_m \times E \cos(\omega t) \times \frac{|\Delta z|}{\delta} E \cos(\omega t) = K_m E^2 \frac{\Delta z}{\delta} \cos^2(\omega t)$

On peut linéariser avec $\cos(2\omega t) = 1 + 2 \cos^2(\omega t)$, soit $\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$

On en déduit : $s_m(t) = \frac{K_m E^2 \Delta z}{2\delta} (1 + \cos(2\omega t))$

La valeur moyenne de $s_m(t)$ et l'amplitude de $s_m(t)$ sont tous les deux proportionnels au déplacement Δz .

- R10. Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature et les caractéristiques du montage.

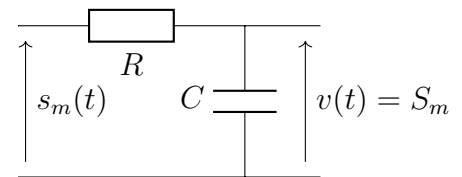
Solution: Pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz à la sortie du multiplieur, il faut supprimer la composante variable de pulsation 2ω .

Il faut réaliser un moyenneur, c'est-à-dire un filtre passe-bas de fréquence de coupure très faible devant la fréquence du signal. Alors, on récupère, en sortie $S_m = \langle s_m(t) \rangle = \frac{K_m E^2 \Delta z}{2\delta}$, qui est bien proportionnelle au déplacement.

Le circuit que l'on peut réaliser est un circuit RC série aux bornes du condensateur, de fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v}{s_m} = \frac{1}{1 + RCj\omega}, \text{ de pulsation de coupure } \omega_c = \frac{1}{RC}.$$

Il faut $\frac{1}{RC} \ll 2\pi f$.



- R11. Exprimer la sensibilité du capteur définie par $\frac{S_m}{\Delta z}$.

Solution: La sensibilité du capteur s'exprime par $\frac{S_m}{\Delta z} = \frac{K_m E^2}{2\delta}$.

- R12. *Application numérique* Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10 mV près. En déduire le plus petit écart relatif par rapport à la position d'équilibre. On prendra $E = 6,00 \text{ V}$, $K_m = 1,00 \text{ V}^{-1}$.

Solution: L'écart relatif par rapport à la position d'équilibre s'exprime par $\frac{\Delta z}{\delta} = \frac{2S_m}{K_m E^2}$

Si la tension de sortie S_m peut être mesurée à 10 mV près, alors, on peut mesurer

$$\frac{\Delta z}{\delta} \text{ à } \frac{2 \times 10 \text{ mV}}{1,00 \text{ V}^{-1} \times (6,00 \text{ V})^2} = 5,6 \cdot 10^{-4}$$