

? Pour mardi 30 décembre 2025 & Lundi 5 janvier 2026 Devoir Maison n°9 – Corrigé

I Travail des vacances

II Exercices du DM

Exercice n°1 Mécanique et fêtes de fin d'année (Pour mardi 30 décembre 2025 à 18h)

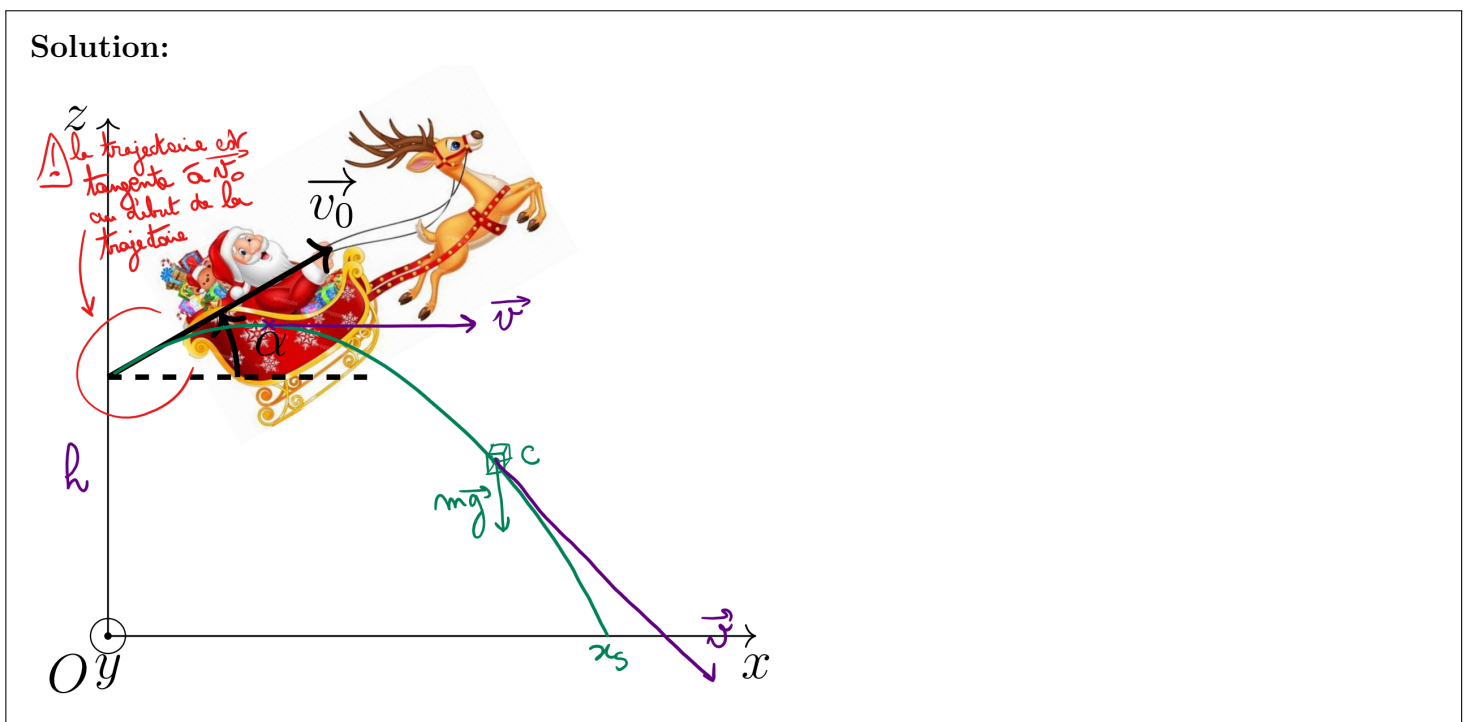
Partie A Chute d'un cadeau depuis le traineau

Le père Noël a son traineau chargé de cadeaux qui déborde. Lancé à toute allure dans les airs pour avoir le temps de les distribuer à tous les enfants sages, il fait tomber un cadeau...

On se place dans le référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience. L'origine O est placée, sur Terre, à la verticale du point auquel le cadeau quitte le traineau, les axes (Ox) et (Oy) sont dans le plan horizontal, et (Oz) est vertical ascendant.

À l'instant $t = 0$ où le cadeau quitte le traineau, son vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est dans le plan vertical incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal, et il se situe à la hauteur h du sol.

R1. Faire un schéma de la situation : axes et bases cartésiennes, position et vecteur vitesse initial du traineau.



R2. Exprimer le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ et le vecteur position initial $\vec{OC}(t = 0)$ du cadeau dans la base cartésienne.

Solution: Vecteur position initiale : $\vec{OC}(t = 0) = h\vec{u}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse initiale : $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\vec{u}_x + v_0 \sin(\alpha)\vec{u}_z = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

R3. Après avoir défini clairement le système, le référentiel et le bilan des forces, établir l'expression du vecteur accélération du cadeau en fonction de $\vec{g}$.

Solution: Système : le cadeau $C(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

— poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

— on négligera les frottements

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au cadeau : $m\vec{a}(C) = m\vec{g}$, soit $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

R4. Établir les équations horaires du cadeau.

Solution: $\vec{a}(C) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

On primitive par rapport au temps : $\vec{v}(C) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ -gt + C \end{pmatrix}$

Or à $t = 0$: $\vec{v}(t = 0) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ +C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

On en déduit $\vec{v}(C) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

On primitive une deuxième fois par rapport au temps : $\vec{OC} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha)t + D \\ E \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t + F \end{pmatrix}$

Or à $t = 0$: $\vec{OC}(t = 0) = \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$

Ainsi, les équations horaires, sont :
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + h \end{cases}$$

R5. En déduire l'équation de la trajectoire. La représenter sur le schéma de R1.

Solution: $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

On obtient l'équation de la trajectoire :
$$z(x) = -\frac{g}{2(v_0 \cos(\alpha))^2}x^2 + \tan(\alpha)x + h$$

R6. Dans le cas où l'angle α est nul, déterminer l'abscisse du point d'arrivée du cadeau au sol.

Solution: Si $\alpha = 0$, alors $z(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h$

Le cadeau touche le sol en x_s tel que $z(x_s) = 0$, soit $\frac{g}{2v_0^2}x_s^2 = h$, soit
$$x_s = \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g}} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



Remarque – Soyez efficaces !

Ne refaites pas tous les calculs : repartez de la question précédente, en remplaçant α par 0.
Donner un nom particulier à l'abscisse à laquelle le cadeau tombe.

Partie B Freinage du traineau

Peu avant d'arriver en ville, le traineau se pose sur terre.

On le suppose décrire une trajectoire rectiligne le long de l'axe (Ox) . À $t = 0$, le traineau se trouve en $x = 0$, son vecteur vitesse est de norme $v_0 = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et dirigé dans le sens de l'axe (Ox) .

Il se met à freiner avec un vecteur accélération $\vec{a}(T) = a_x \vec{u}_x$, de norme $a = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On décrit sous mouvement dans le référentiel terrestre.

R7. Le mouvement étant décéléré, comment sont les vecteurs vitesse et accélération ? En déduire le signe de a_x et son expression en fonction de a .

Solution:

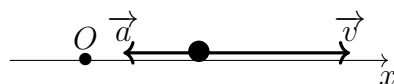


Remarque –

N'oubliez pas les bonnes habitudes : système, référentiel, schéma.

Système : le traineau

Référentiel : terrestre



Au cours d'un mouvement décéléré, $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$. Le mouvement est ici rectiligne selon (Ox) , donc les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont selon (Ox) . Les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont donc de sens opposés.

Or $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$ est dirigé selon $+\vec{u}_x$, donc $\vec{a} = a_x \vec{u}_x$ est dirigé selon $-\vec{u}_x$. Or $\|\vec{a}\| = a$, donc $a_x = -a < 0$.

R8. Établir l'expression de $v_x(t)$ puis $x(t)$.

Solution: Par une première primitive : $v_x(t) = -at + C$, or $v_x(0) = v_0 = C$, ainsi $v_x(t) = -at + v_0$

par une deuxième : $x(t) = -a \frac{t^2}{2} + v_0 t + C'$, or $x(0) = 0 = C'$

Ainsi $x(t) = -\frac{a}{2} t^2 + v_0 t$

R9. Déterminer l'expression de l'instant t_f auquel le traineau s'arrête, en fonction de a et v_0 .

Solution: L'instant auquel s'arrête le traineau t_f est tel que $v_x(t_f) = 0$, soit $t_f = \frac{v_0}{a}$

R10. En déduire l'expression de la distance de freinage en fonction de a et v_0 . Faire l'application numérique.

Solution: La distance de freinage est l'abscisse x à l'instant t_f :

$$\begin{aligned} D_f &= x(t_f) \\ &= -\frac{a v_0^2}{2 a^2} + v_0 \times \frac{v_0}{a} \\ &= \frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

A.N. : $D_f = \frac{(50/3,6)^2}{2 \times 4} = 24 \text{ m}$

⚠ Remarque – Unités

Convertissez la vitesse en m/s, plutôt que l'accélération en $\text{km} \cdot \text{h}^{-2}$.

Conversion de l'unité de l'accélération : $\text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \frac{m}{s^2} = \frac{10^{-3} \text{km}}{\left(\frac{1}{3600}\right)^2 h^2} = 3600^2 \cdot 10^{-3} \text{km} \cdot \text{h}^{-2}$: ce

n'est pas si simple, et donc pas pertinent.

Partie C Dans une grande roue

La Ville de Valence a installé une grande roue de diamètre $D = 35 \text{ m}$. Elle effectue un tour en $T = 3 \text{ min}$.

On note $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire.

On souhaite décrire le mouvement d'un passager, assimilé à un point M , assis dans une nacelle, dans le référentiel terrestre.

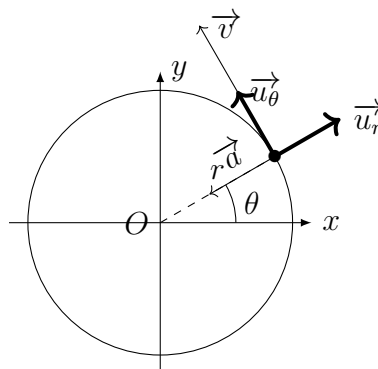
Son mouvement est circulaire uniforme de rayon $R = \frac{D}{2}$.



R11. Représenter la trajectoire, les coordonnées polaires de M , et la base polaire.

Solution: Système : le passager

Référentiel : terrestre



Avec $r = \frac{D}{2}$

R12. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans la base polaire, en fonction de D , $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire et les vecteurs de la base polaire.

Solution: Le mouvement est circulaire de rayon $\frac{D}{2}$, et la roue tourne à vitesse angulaire constante, donc $\omega = \dot{\theta}$ est constante.

$$\begin{aligned} \text{Vecteur position : } \overrightarrow{OM} &= \frac{D}{2} \vec{u}_r \\ \text{Vecteur vitesse : } \vec{v}(M) &= \frac{D}{2} \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \frac{D}{2} \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ &= \frac{D}{2} \omega \vec{u}_\theta \\ \text{Vecteur accélération : } \vec{a}(M) &= \frac{D}{2} \omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ &= \frac{D}{2} \omega (-\dot{\theta}) \vec{u}_r \\ &= -\frac{D}{2} \omega^2 \vec{u}_r \end{aligned}$$

R13. Exprimer la norme v du vecteur vitesse et la norme a du vecteur accélération en fonction de D et ω , puis en fonction de D et T . Faire les applications numériques.

Solution: La vitesse angulaire, constante, est reliée à la période du mouvement par $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\text{Norme du vecteur vitesse : } v = \frac{D}{2} \omega = \frac{D\pi}{T} = 0,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Norme du vecteur accélération : } a = \frac{D}{2} \omega^2 = \frac{2D\pi^2}{T^2} = 0,021 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Exercice n°2 Étude d'un filtre actif (Pour LUNDI 5 janvier 2026 au plus tard)

Dans cet exercice, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Soit le filtre de la figure 1.

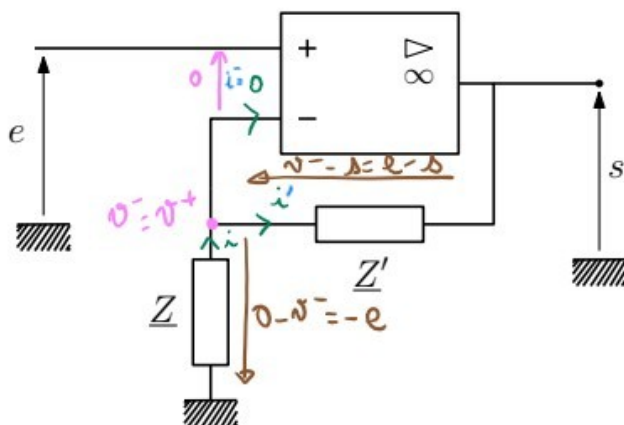


FIGURE 1 – Filtre à ALI

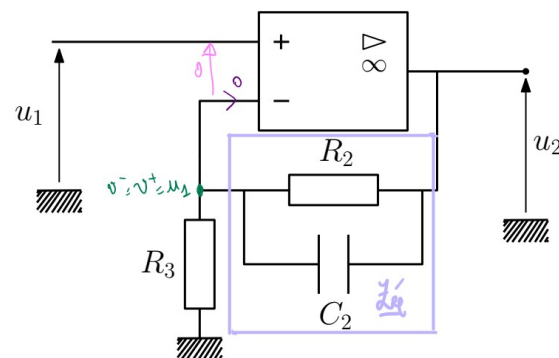


FIGURE 2 – Filtre (F_b)

R1. Rappeler les hypothèses du modèle de l'ALI idéal.

Solution: Dans le modèle de l'ALI idéal :

- les courants de polarisation sont nuls,
- l'impédance de sortie est nulle,
- la réponse est instantanée,
- le gain statique est infini.

R2. Pourquoi peut-on supposer que les ALI des deux montages figures 1 et 2 fonctionnent en régime linéaire ?

Solution: Les deux montages à ALI présentent une rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse, sans rétroaction sur l'entrée non inverseuse. On peut donc supposer qu'ils fonctionnent en régime linéaire (tant que leur tension de sortie n'atteint pas la tension de saturation).

R3. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}$ du montage de la figure 1 en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$.

Solution:



Remarque —

Reproduisez le schéma du circuit sur votre copie et complétez-le avec toutes les grandeurs électriques nécessaires.

Les courants de polarisation sont nuls, donc les deux impédances sont traversées par le même courant.

L'ALI idéal fonctionne en régime linéaire, donc $v^+ = v^-$, or $v^+ = e$

Au niveau de l'entrée inverseuse, d'après la loi des nœuds

$$\begin{aligned} i &= i' + i^- \\ \frac{0 - V^-}{\underline{Z}} &= \frac{V^- - s}{\underline{Z}'} \\ -\frac{e}{\underline{Z}} &= \frac{e - s}{\underline{Z}'} \\ -\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}} e &= e - s \\ e \left(1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}} \right) &= s \\ \frac{s}{e} &= 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}} \end{aligned}$$

Soit $\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$

R4. Que devient $\underline{H}$ si $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

Solution: Dans le cas où les dipôles sont des résistances : $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R} > 1$: ce montage amplifie le signal d'entrée. Il s'agit d'un montage amplificateur non inverseur.

Le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 2 (filtre (F_b)).

R5. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{eq}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

Solution: L'impédance équivalente de l'association parallèle de R_2 et C_2 est $\frac{Z_{\text{éq}}}{1 + R_2 C_2 j\omega}$

R6. Dédurre de la question R3 l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ de ce filtre en fonction de R_2, R_3 et C_2 .

Solution: On peut (et il le faut!!) utiliser le résultat de R3 avec $\underline{Z} = R_3$ et $\underline{Z}' = \underline{Z}_{\text{éq}}$, soit :

$$\underline{H} = 1 + \frac{Z_{\text{éq}}}{R_3}$$

Donc : $\underline{H}_2 = 1 + \frac{1}{R_3} \times \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 j\omega}$

R7. Mettre $\underline{H}_2$ sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

Solution: On identifie immédiatement : $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$

R8. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

Solution:



Remarque –

Il faut garder LE terme dominant : un seul terme donc.

Ne calculez pas le module, cela complique grandement le raisonnement.

⚠ $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$.

À basse fréquence, c'est-à-dire $\omega \ll \omega_2$: $\underline{H}_2 \underset{0}{\sim} 1 + \frac{R_2}{R_3}$

À haute fréquence, c'est-à-dire $\omega \gg \omega_2$: $\underline{H}_2 \underset{+\infty}{\sim} 1$

Ce filtre amplifie les signaux basses fréquences et transmet sans amplification les signaux hautes fréquences.

R9. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{k}\Omega$, $R_3 = 6\text{k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce filtre.

Solution: Fréquence caractéristique : $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 498\text{ Hz}$ et Gain : $G_0 = 113$

Ce filtre permet d'amplifier d'un facteur important les signaux de fréquences faibles devant 500 Hz et transmet sans amplification les signaux de fréquences grandes devant 500 Hz.