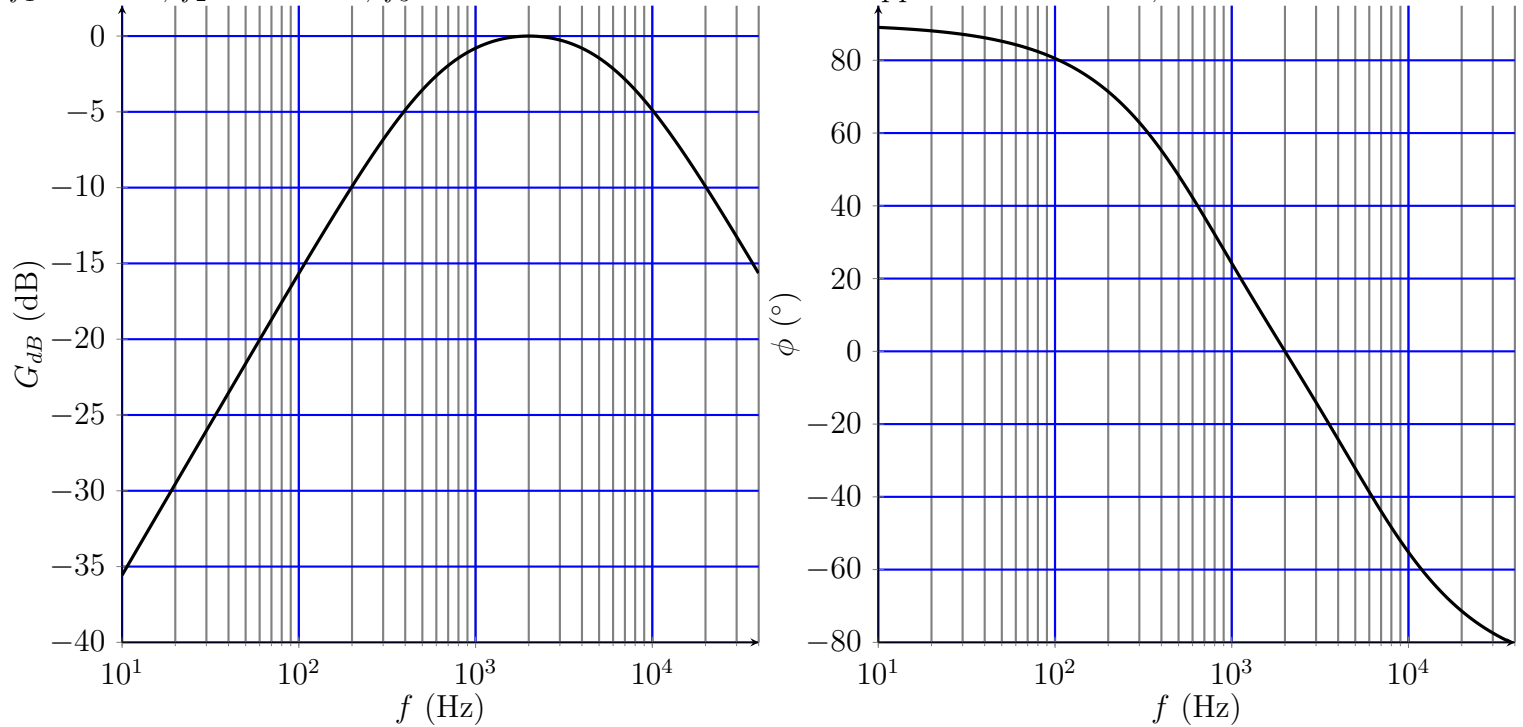


? Pour le jeudi 15 janvier 2026 Devoir Maison n°10 – Corrigé

Exercice n°1 Un peu de filtrage (encore...)

On envoie en entrée d'un filtre passe bande, placé avant un haut-parleur médium chargé de restituer les sons médiums.

On envoie en entrée du filtre le signal suivant : $e(t) = E \cos(2\pi f_1 t) + E \cos(2\pi f_2 t) + E \cos(2\pi f_3 t)$, avec $f_1 = 60 \text{ Hz}$; $f_2 = 2000 \text{ Hz}$; $f_3 = 20 \text{ kHz}$. On utilisera la valeur approchée $10^{-0,5} \approx 0,3$.



Déterminer complètement le signal de sortie.

Solution:



Remarque – Rédaction

Il faut rédiger !!

Attention à la lecture de la fréquence sur l'échelle logarithmique.

Le filtre étant linéaire, le signal de sortie s'écrit :

$$s(t) = S_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{s1}) + S_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_{s2}) + S_3 \cos(2\pi f_3 t + \varphi_{s3})$$

- Pour $f_1 = 60 \text{ Hz}$

$$G_{dB}(f_1) = -20 \text{ dB} = 20 \log \frac{S_1}{E}, \text{ donc } S_1 = \frac{E}{10}$$

$$\phi(f_1) = 85^\circ = \varphi_{s1} - 0$$

- Pour $f_2 = 2000 \text{ Hz}$

$$G_{dB}(f_2) = 0 \text{ dB} = 20 \log \frac{S_2}{E}, \text{ donc } S_2 = E$$

$$\phi(f_2) = 0^\circ = \varphi_{s2} - 0$$

- Pour $f_3 = 20 \text{ kHz}$

$$G_{dB}(f_3) = -10 \text{ dB} = 20 \log \frac{S_3}{E}, \text{ donc } S_3 = 10^{-0,5} E \approx 0,3 E.$$

$$\phi(f_3) = -72^\circ = \varphi_{s3} - 0$$

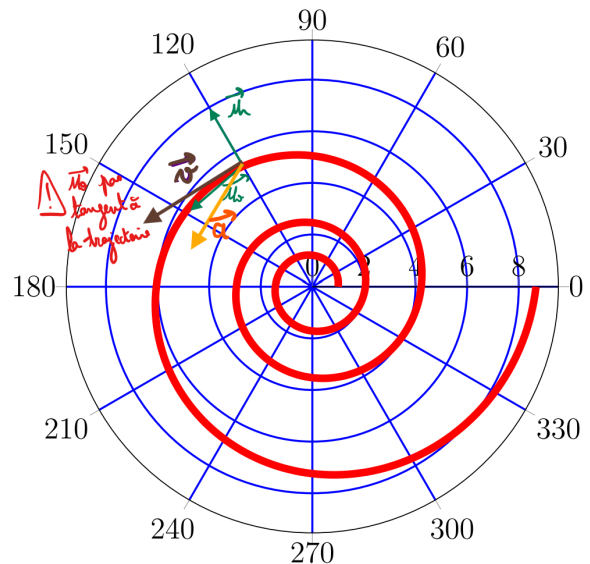
Ainsi $s(t) = \frac{E}{10} \cos(2\pi f_1 t + 85^\circ) + E \cos(2\pi f_2 t) + 0,3E \cos(2\pi f_3 t - 72^\circ)$

Exercice n°2 Un chat autour d'un sapin

Votre chat décrit, autour de votre sapin, un mouvement d'équation horaire en polaire :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha \omega t} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0 , α , ω sont des constantes positives.



Allure de la trajectoire (en trait épais).

R1. Sur un schéma, reproduire le plan cartésien, la trajectoire, et en une position quelconque, représenter les coordonnées polaires du chat, et placer la base polaire.

Solution:

Système : le chat

Référentiel : terrestre, lié au sapin.

Cf ci-dessus.



Remarque –

Le vecteur $\vec{u}_\theta$ N'est PAS tangent à la trajectoire. (ce n'est vrai que pour une trajectoire circulaire, ce qui n'est pas le cas ici...)

R2. Exprimer le vecteur position $\vec{OC}$ du chat, en fonction de r_0 , α , ω et t .

Solution: Vecteur position : $\vec{OC} = r\vec{u}_r = r_0 e^{\alpha \omega t} \vec{u}_r$

R3. Exprimer l'équation de la trajectoire $r(\theta)$.

Solution: Équation de la trajectoire : $r(\theta) = r_0 e^{\alpha \theta}$

R4. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(C)$ puis le vecteur accélération $\vec{a}(C)$ du chat dans la base polaire, en fonction de r_0 , α , ω et t .

Solution:

Remarque –

Utiliser les équations horaires et non l'équation de la trajectoire.
Il faut **RÉDIGER** : écrire **AVANT** ce que vous allez calculer.
FACTORISER, SIMPLIFIER au maximum à chaque étape.

$$\begin{aligned}\text{Vecteur vitesse : } \vec{v}(C) &= \frac{d\vec{OC}}{dt} \\ &= r_0 \alpha \omega e^{\alpha \omega t} \vec{u}_r + r_0 e^{\alpha \omega t} \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ &= r_0 \omega e^{\alpha \omega t} (\alpha \vec{u}_r + \vec{u}_\theta) \\ \text{Vecteur accélération : } \vec{a}(C) &= \frac{d\vec{v}(C)}{dt} \\ &= r_0 \omega (\omega \alpha) e^{\alpha \omega t} (\alpha \vec{u}_r + \vec{u}_\theta) + r_0 \omega e^{\alpha \omega t} (\alpha \omega \vec{u}_\theta - \omega \vec{u}_r) \\ &= r_0 \omega^2 e^{\alpha \omega t} ((\alpha^2 - 1) \vec{u}_r + 2\alpha \vec{u}_\theta)\end{aligned}$$

R5. Représenter $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sur le schéma précédent.

Solution: $\vec{a}$ est nécessairement dirigé vers l'intérieur de la trajectoire, donc $\alpha < 1$ nécessairement.
 $\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta > 0$.

D'après le schéma, nous constatons que $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$, donc le mouvement est accéléré.

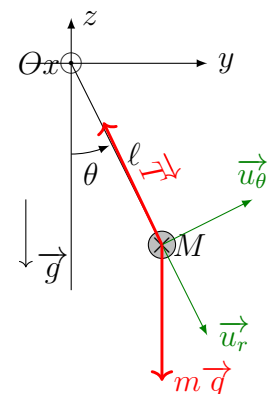
Remarque –

$\vec{v}$ est **TOUJOURS TANGENT** à la trajectoire.
Mais $\vec{v}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}_\theta$.

Exercice n°3 Pendule simple amorti

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligé. On note ℓ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, avec z vers le haut et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On prend en compte l'action de l'air que l'on modélise par une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.



R1. Déterminer l'unité de α en fonction des unités fondamentales du système international.

Solution: α s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$

R2. Effectuer la rédaction d'un exercice de mécanique :

- définir le système,
- définir le référentiel d'étude et de la base cartésienne liée
- choisir le système de coordonnées adapté à l'étude,
- effectuer le bilan des forces,

- faire un grand et beau schéma avec toutes les informations utiles dessus : le dispositif étudié, les forces, la base de projection ...

Solution:

Système : Point M de masse m

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience ($\mathcal{R}$ lié à $(Oxyz)$)

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$
- Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{u}_r$, avec $T > 0$ la norme de la tension.
- Force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

- R3. Rappeler les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération sur un mouvement circulaire de rayon ℓ non uniforme.

Solution: Le mouvement est circulaire non uniforme, donc $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}\vec{u}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

- R4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et le projeter dans la base polaire.

Solution: Principe fondamental de la dynamique à $M(m)$ dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\vec{a}(M) = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}$$

$$\text{Ainsi } m \begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha\ell\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

- R5. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ .

Solution:

 Remarque —

Écrire « Selon $\vec{u}_\theta$ », est équivalent à « projection selon $\vec{u}_\theta$ », soit « produit scalaire de l'équation selon $\vec{u}_\theta$ », il n'y a donc plus de vecteur, y compris $\vec{u}_\theta$.

Selon $\vec{u}_\theta$, on obtient l'équation du mouvement : $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - \alpha\ell\dot{\theta}$

Soit $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$

On lâche la masse m d'un angle $\theta_0 = 10^\circ$ sans vitesse initiale, on peut donc considérer qu'à tout instant θ reste très petit devant 1 rad.

- R6. Montrer alors que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Nommer les constantes ω_0 et Q , donner leurs unités et établir leurs expressions en fonction de m , α , g et ℓ .

Solution: On peut alors écrire l'équation différentielle sous la forme $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

En identifiant avec la forme fournie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ la pulsation propre (en rad/s) du pendule simple, et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ le facteur de qualité (sans unité)

On vérifie : $\left[\frac{m}{\alpha} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right] = \frac{\text{kg}}{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}} \sqrt{\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}}} = \text{s} \sqrt{\text{s}^{-2}} = 1$

R7. Résoudre complètement l'équation différentielle pour $m = 100 \text{ g}$, $\ell = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 0,2 \text{ uSI}$.

Remarque – En cas de blocage

- Rendez-vous, sans passer par la case « internet », au chapitre n° 6 partie I.4.
- Puis, si besoin, envoyez-moi un mail, venez me voir à la fin d'un cours pour plus d'explications (comme pour toutes les questions du DM !).

Solution:

- Polynôme caractéristique : $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$
- Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$
- Valeur de Q : $Q = 5,0 > \frac{1}{2}$, donc $\Delta < 0$, les racines sont complexes et le régime est **pseudo-périodique**.

Remarque –

Calculer la valeur numérique de Q , puis comparer à $\frac{1}{2}$ pour conclure sur la nature du régime transitoire. Ne calculez pas Δ .

- Racines : $x = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
 - Solution générale : $\theta(t) = A e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) + B \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) \right)$
 - On peut introduire $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
 - Conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 = A$
 $\dot{\theta}(0) = -\frac{1}{\tau}A + B\Omega = 0$, soit $B = \frac{\theta_0}{\tau\Omega}$
- Ainsi $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\tau\Omega} \sin(\Omega t) \right)$

Remarque –

Pas de mélange littéral/numérique dans les calculs/expressions finales.

R8. Tracer l'allure de θ en fonction du temps. *On soignera l'allure !*

Solution:



Remarque —

Respectez les conditions initiales. Aidez-vous des deux exponentielles qui entourent les pseudo-oscillations.

