

? Pour le LUNDI 23 février 2026 Devoir Maison n°12 – *Corrigé*

! Remarque – Le travail des DM

- Le cours doit être ouvert sous les yeux, et la rédaction identique à celle du cours.
- Si vous rencontrez des difficultés, posez-moi des questions, y compris le soir, le week-end ou durant les vacances).

Exercice n°1 Était-elle.il en infraction ?

! Remarque – Comment aborder cet exercice ?

En respectant l'ordre des étapes ci-dessous :

1. Apprendre parfaitement les parties I, II et IV du chapitre n°12.
2. Refaire les exercices n°3, n°6, n°7 du chapitre n°12.
3. Traiter cet exercice, avec le cours sous les yeux.

Les causes d'accidents sont nombreuses et variées. Afin d'incriminer ou non un éventuel excès de vitesse* lors de la sortie de route liée à un dépassement incontrôlé et décrite sur la photographie (figure 1), on **vous demande de déterminer, à l'aide d'une méthode énergétique, l'expression littérale, puis numérique de la vitesse du véhicule en début de la phase de freinage.**

Dans cet exercice, il vous est demandé de faire preuve d'autonomie. Toute démarche même partielle de résolution sera prise en compte, pourvu qu'elle soit cohérente. Toutes données pertinentes et nécessaires à la résolution de cette question pourront être introduites par le candidat.



FIGURE 1 – Sortie de route

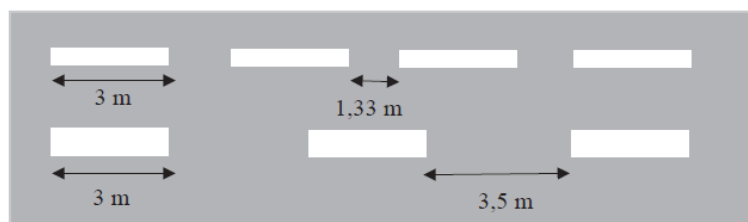


FIGURE 2 – Législation de marquage au sol

Les éléments légaux de marquage au sol sont représentés sur la figure 2.
Par temps sec, le coefficient de frottement solide est $f = 0,8$.

*. La limite est de 80 km/h en Drôme sur une telle route.

Solution: La photo fournie nous permet de déterminer la distance durant laquelle la voiture a freiné. La distance de freinage dépend, notamment, de la vitesse initiale de la voiture et du coefficient de frottement entre la route et les roues. L'idée est donc d'établir l'expression de la distance de freinage afin de remonter à la vitesse initiale de la voiture.

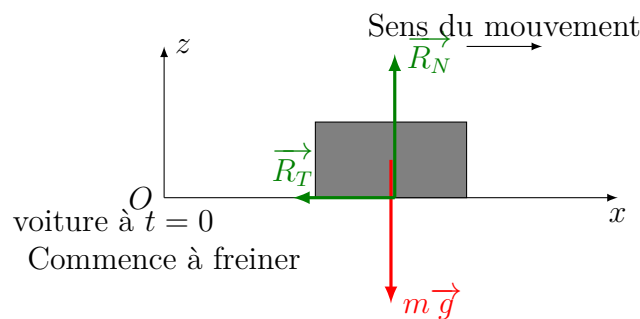
Distance d'arrêt

En utilisant le marquage de gauche, on évalue la distance d'arrêt à 6 traits de 3 m + 6 espaces de 3,5 m, soit $D = 39$ m

Lien avec la vitesse initiale de la voiture

On étudie le système constitué de la voiture de masse m , en mouvement de translation rectiligne sur la route que l'on supposera horizontale dans le référentiel terrestre lié à la route, supposé galiléen à l'échelle du freinage.

On suppose que la voiture est soumise uniquement à son poids et la réaction du support $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$. Les frottements solides seront modélisés par les lois de Coulomb sur le frottement solide.



On notera $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$, avec $R_N > 0$ et $\vec{R}_T = -R_T \vec{u}_x$, avec $R_T > 0$. En effet le mouvement a lieu selon le sens de $\vec{u}_x$ sur un support fixe dans le référentiel d'étude, donc la réaction tangentielle étant opposée à la vitesse de glissement, elle est ici de sens opposé à $\vec{u}_x$.

On commence par négliger les frottements fluides.

Le PFD à la voiture dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

On projette selon les deux axes :

$$m\ddot{x} = 0 - R_T \quad (1)$$

$$0 = -mg + R_N \quad (2)$$

Soit $R_N = mg$. La loi de Coulomb sur le frottement solide nous donne $R_T = fmg$

On applique la loi de l'énergie cinétique entre le début du freinage (D) et l'arrêt de la voiture (A).

$$\begin{aligned} \Delta_{D \rightarrow A} \mathcal{E}_c &= W_{DA}(m\vec{g}) + W_{DA}(\vec{R}_N) + W_{DA}(\vec{R}_T) \\ 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= 0 + 0 \int_D^A -fmg dx \\ -\frac{1}{2}mv_0^2 &= -fmg(x_A - x_D) \\ -\frac{1}{2}mv_0^2 &= -fmgD \\ v_0 &= \sqrt{2fgD} \end{aligned}$$

La vitesse initiale de la voiture était $v_0 = \sqrt{2fgD} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 89 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Exercice n°2 Molécule de CO

⚠ Remarque – Comment aborder cet exercice ?

En respectant l'ordre des étapes ci-dessous :

1. Travailler parfaitement la partie V du chapitre n°12.
2. Refaire les exercices n°9, n°10, n°12 du chapitre n°12.
3. Relire votre copie, le corrigé, mes commentaires,... du DS n°7 - exercice sur le Néon.
4. Traiter cet exercice, avec le cours sous les yeux.

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_C pour l'atome de carbone et m pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que **l'atome de carbone est fixe dans le référentiel du laboratoire, galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox)**.

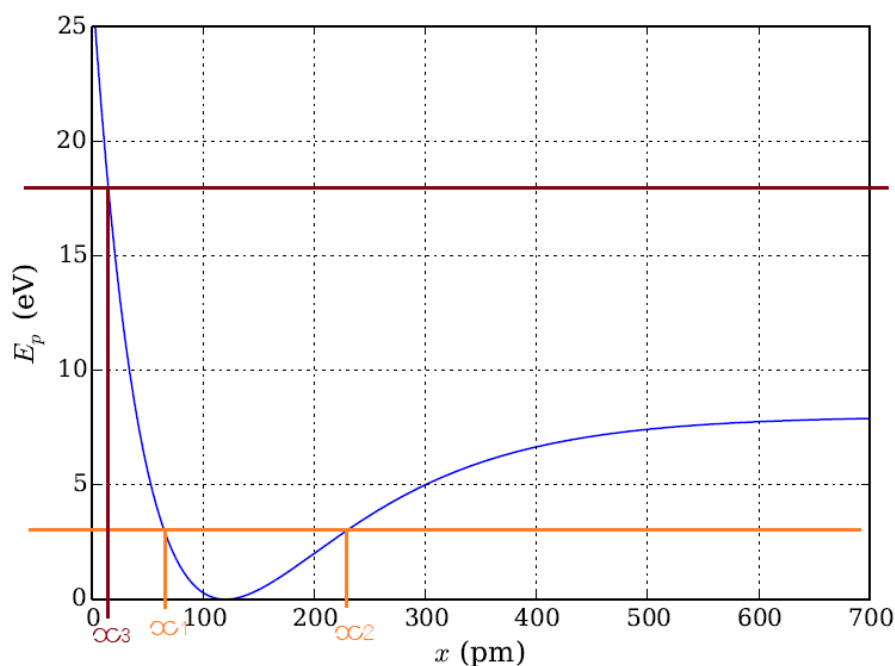
L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_0 \left(1 - e^{-\beta(x-x_0)} \right)^2$$

où x est la distance des noyaux des deux atomes et où $\mathcal{E}_0$, β et x_0 sont des constantes positives.

On donne le graphe de $\mathcal{E}_p(x)$ ci-contre.



R1. Déterminer la limite de $\mathcal{E}_p$ en l'infini. En déduire, grâce au graphique, la valeur de $\mathcal{E}_0$, en eV puis en joules.

Solution: $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_0$ et graphiquement, on lit $\mathcal{E}_0 = 8 \text{ eV} = 12,8 \times 10^{-19} \text{ J}$.

R2. Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_p(x_0)$. En déduire, grâce au graphique, la valeur de x_0 . Comment appelle-t-on la position x_0 ?

Solution: Calculons : $\mathcal{E}_p(x_0) = 0 \text{ eV}$ et graphiquement, on lit $x_0 = 120 \text{ pm}$.

x_0 correspond au minimum de l'énergie potentielle, donc c'est la position d'équilibre stable pour l'atome d'oxygène par rapport à l'atome de carbone.

R3. Que peut-on dire de l'énergie mécanique au cours du mouvement ?
Quelle inégalité vérifie l'énergie mécanique et l'énergie potentielle ?

Solution:

- Système : atome d'oxygène
- Référentiel : référentiel du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

— Bilan des actions mécaniques : force exercée par l'atome de carbone qui dérive de l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_0(1 - e^{-\beta(x-x_0)})^2$.

L'énergie mécanique de l'atome d'oxygène est constante puisque l'atome d'oxygène est soumis uniquement à une force conservative.

L'énergie mécanique est définie par $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p$, or $\mathcal{E}_c > 0$, les positions accessibles à l'atome d'oxygène sont celles pour lesquelles $\mathcal{E}_p(x) \leq \mathcal{E}_m$.

R4. À partir de l'analyse du graphe et de la question précédente, analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à $\mathcal{E}_0$. Compléter le graphe et décrire précisément les positions accessibles à l'atome d'oxygène.

Solution:

Traçons la fonction $\mathcal{E}_m = \text{constante} < \mathcal{E}_0$ sur le graphe précédent. Il y a deux intersections avec la courbe $\mathcal{E}_p(x)$ en x_1 et x_2 . Les positions accessibles sont alors $x \in [x_1, x_2]$. L'atome d'oxygène va donc osciller au voisinage de sa position d'équilibre x_0 , entre les deux abscisses x_1 et x_2 .

R5. Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est supérieure à $\mathcal{E}_0$. Compléter le graphe et décrire précisément les positions accessibles à l'atome d'oxygène.

Solution: Traçons la fonction $\mathcal{E}_m = \text{constante} > \mathcal{E}_0$ sur le graphe précédent. Il y a une seule intersection avec la courbe $\mathcal{E}_p(x)$ en x_3 . Les positions accessibles sont $x \in [x_3, +\infty[$. L'atome d'oxygène peut s'éloigner à l'infini de l'atome de carbone, l'énergie que possède l'atome d'oxygène permet de rompre la liaison, et l'atome d'oxygène s'éloigne de l'atome de carbone.

On s'intéresse au mouvement de vibration de la molécule de CO au voisinage de x_0 .

On pourra poser $\varepsilon = \beta(x - x_0)$, et on rappelle qu'au premier ordre : $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$.

R6. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de x_0 (pour $\varepsilon \ll 1$), montrer qu'elle s'écrit $\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_0\beta^2(x - x_0)^2$.

Solution: Pour $\varepsilon \ll 1$, $e^{-\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$, donc $(1 - e^{-\varepsilon})^2 \approx (1 - (1 - \varepsilon))^2 = \varepsilon^2$

Ainsi, au voisinage de x_0 , l'énergie potentielle s'écrit : $\mathcal{E}_p(\varepsilon) \approx \mathcal{E}_0\varepsilon^2$

Ainsi $\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_0\beta^2(x - x_0)^2$

R7. À l'aide du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre. Comment appelle-t-on un système répondant à une telle équation différentielle ?

Solution: L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, donc $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = 0$,

donc $m\ddot{x} + kx(x - x_0) = 0$, ainsi on obtient $\ddot{x} + \frac{2\beta^2\mathcal{E}_0}{m}(x - x_0) = 0$

R8. En déduire l'expression de la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.

Faire l'application numérique, avec $\beta = 9.10^{-3} \text{ pm}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Solution: On reconnaît l'équation du mouvement d'un **oscillateur harmonique** de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\beta^2 \mathcal{E}_0}{m}}$, ainsi la fréquence du mouvement est $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\beta^2 \mathcal{E}_0}{m}}$

⚠ conversions $\mathcal{E}_0 = 8 \text{ eV} = 12,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $\beta = 8,69 \cdot 10^{-3} \text{ pm}^{-1} = 8,69 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$; $m = \frac{M_O}{N_A} = 2,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

A.N : $f = 1,14 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$.

Exercice n°3 Un accélérateur de particule : le LHC (D'après Concours ATS 2015)

⚠ Remarque – Comment aborder cet exercice ?

En respectant l'ordre des étapes ci-dessous :

1. Apprendre parfaitement le chapitre n°13.
2. Refaire les exercices n°1, 2, 4, 6 et 7 du chapitre n°13.
3. Traiter cet exercice, avec le cours sous les yeux.

Partie A Particule dans un champ électrique constant et uniforme

R1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$?

Solution: Système : proton de masse m_p et de charge $q = +e$
Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.
Le proton subit la force $\vec{f} = e\vec{E}$

R2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

Solution: Calculons le poids du proton $m_p g = 1,67 \cdot 10^{-26} \text{ N}$ et la force subie par un proton plongé dans un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ $f = eE = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}$

Ainsi $\frac{m_p g}{f} \approx 10^{-12}$: le poids est donc 10^{12} fois plus faible que la force générée par le champ électrique, on pourra donc négliger le poids.

REMARQUES

ⓘ Pour ce type de questions, on s'intéresse à un **ordre de grandeur**, c'est-à-dire on raisonne en puissance de 10 uniquement.

R3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer le vecteurs accélération du proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$.
Que peut-on dire du vecteur accélération ?

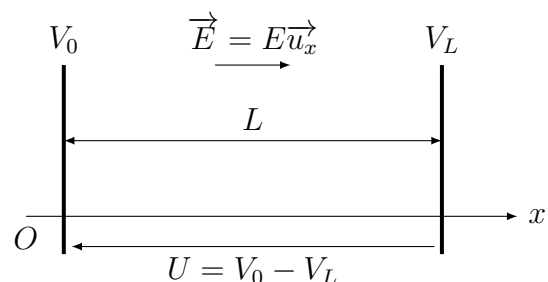


FIGURE 3 – Schéma du dispositif d'accélération des protons

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique à un proton : $m_p \vec{a} = \vec{f}$, donc

$$\vec{a} = \frac{e \vec{E}}{m_p}$$

Le vecteur accélération est constant au cours du mouvement du proton.

R4. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'une particule chargée de charge q en fonction du potentiel électrostatique V .

Solution: L'énergie potentielle d'une particule chargée de charge q s'exprime selon $\mathcal{E}_{p,e} = qV$

On admet qu'en considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, le potentiel du plan $x = L$ s'écrit $V_L = -EL$.

R5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de la tension U .

Solution: On applique le **théorème de l'énergie mécanique** entre $x = 0$ et $x = L$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_m &= 0 \text{ (une seule force conservative)} \\ \mathcal{E}_c(L) - \mathcal{E}_c(0) + q(V_L - V_0) &= 0 \\ \mathcal{E}_c(L) &= q(V_0 - V_L) \end{aligned}$$

La charge du proton vaut la charge élémentaire, donc $\mathcal{E}_c(L) = eU$, avec $U = V_0 - V_L$.

Partie B Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

L'accélérateur linéaire 2 (Linac 2) constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN.

Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs (représenté par les rectangles ci-dessous). Ces protons sont accélérés par une tension maximale U_c toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. Les protons sont injectés en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-accelératrice U_0 .

Source de protons
pré-accelérés par
une tension U_0

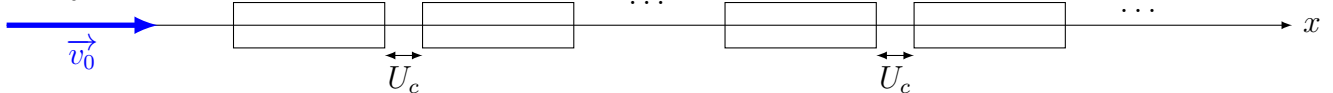


FIGURE 4 – Le linac 2

R6. Exprimer l'énergie cinétique du proton, puis sa vitesse v_0 en O , en fonction de U_0 , e et m_p . (U_0 est la tension qui accélère les protons à partir d'une vitesse nulle, pour les faire atteindre une vitesse v_0).

Solution: D'après la question précédente, le proton ayant été accéléré sous une tension U_0 , une fois arrivé en O son énergie cinétique vaut $\mathcal{E}_c = eU_0$, donc $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$

R7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins (par une différence de potentiel U_c) ?

Solution: Entre deux tubes voisins, le proton est soumis à une différence de potentiel de U_c , le TEM appliqué à un proton entre deux tubes voisins permet d'écrire que $\Delta\mathcal{E}_c = eU_c$ (d'après les calculs précédemment réalisés).

R8. Exprimer l'énergie cinétique du proton à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .

Solution: Ainsi, à la sortie du n -ième tube, le proton a été accéléré une fois sous la tension U_0 , puis $n - 1$ fois sous la tension U_c (il y a $(n - 1)$ espaces), ainsi $\mathcal{E}_c(n) = e(U_0 + (n - 1)U_c)$

R9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10^e tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.

Solution:

Ainsi la vitesse v_{10} du proton à la sortie du 10-ième tube est donnée par : $\frac{1}{2}m_p v_{10}^2 = e(U_0 + 9U_c)$, soit

$$v_{10} = \sqrt{\frac{2e(U_0 + 9U_c)}{m_p}}$$

$$\text{A.N. : } v_{10} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times (200 \cdot 10^3 + 9 \times 2000 \cdot 10^3)}{1,67 \cdot 10^{-27}}} \approx \sqrt{4 \cdot 10^8 \times (10^5 + 9 \cdot 10^6)} \approx 2 \cdot 10^4 \times 3,0 \cdot 10^3,$$

d'où $v_{10} \approx 6,0 \cdot 10^7$ m/s (en faisant l'approximation $\frac{1,6}{1,67} \approx 1$).

Partie C Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS).

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

À $t = 0$ sa vitesse $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 5.

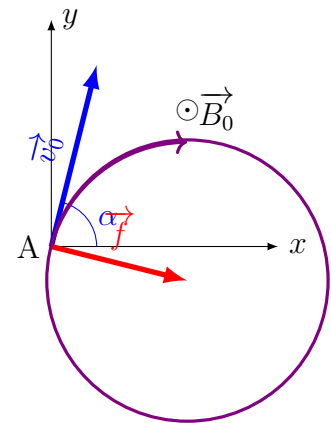


FIGURE 5 – Vitesse du proton dans le champ magnétique

R10. Donner l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique $\vec{B}_0$.

Solution: La force que subit le proton soumis au champ magnétique $\vec{B}_0$ est la force de Lorentz qui s'écrit $\vec{f} = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$

R11. Reproduire la figure 5 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la norme de cette force.

Solution: La force en A est représentée ci-dessus : elle est orthogonale à $\vec{v}_0$ et à $\vec{B}_0$, et le sens est donné par la règle de la main droite.

Elle est de norme $\|\vec{f}\| = \|e\vec{v} \wedge \vec{B}_0\| = ev_0 B_0$, car les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{B}_0$ sont orthogonaux.

R12. En proposant des valeurs pour B_0 et v_0 (on exploitera les données numériques fournies dans le texte en début d'exercice), calculer un ordre de grandeur de la force précédente et conclure à l'action du poids sur le mouvement du proton.

Solution: Il faut proposer des valeurs réalistes !

A.N. : avec $B \approx 1 \text{ T}$ et $v \approx 6.10^7 \text{ m/s}$ (valeur trouvée précédemment)

$f \approx 10^{-11} \text{ N} \approx 10^{15} m_p g$, le poids peut donc être légitimement négligé, le poids n'agit pas sur le mouvement du proton plongé dans un champ magnétique.

R13. Montrer que la puissance de cette force est nulle à chaque instant. En déduire une caractéristique du mouvement du proton.

Solution:

 **Remarque –**

Il faut raisonner à t quelconque, donc avec $\vec{v}$ qui est différent de $\vec{v}_0$ (seules leurs normes sont égales).

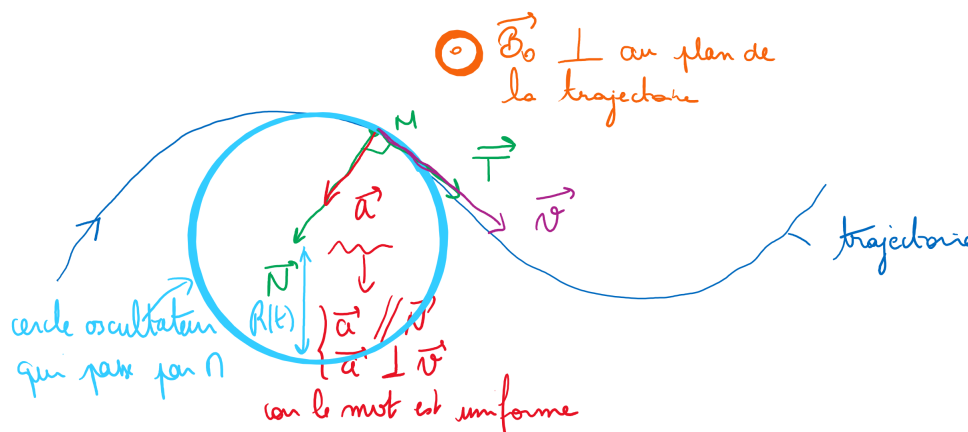
La puissance de la force magnétique est $\mathcal{P} = (e\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{v}$, donc $\mathcal{P} = \underbrace{(e\vec{v} \wedge \vec{B}_0)}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$

La force de Lorentz magnétique ne travaille pas, donc d'après le théorème de la puissance cinétique, l'énergie cinétique est constante, donc une particule chargée soumise à la seule force de Lorentz magnétique a un mouvement uniforme.

Le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique. On admet que la trajectoire du proton est plan, dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}_0$.

R14. Définir la base de Frenet et exprimer, dans le cas général, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Faire un schéma pour une trajectoire plane quelconque, en représentant la base et les deux vecteurs cinématiques.

Solution:



La base de Frenet $(\vec{N}, \vec{T})$ est telle que $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement, et $\vec{N}$ est perpendiculaire à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

Vecteur vitesse : $\vec{v} = v\vec{T}$, avec v la norme du vecteur vitesse.

Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R(t)}\vec{N}$

D'après la question précédente, le mouvement dans le champ magnétique est uniforme, donc $\frac{dv}{dt} = 0$,

donc $\vec{a} = \frac{v^2}{R(t)} \vec{N}$

R15. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour justifier que le mouvement est circulaire et en établir le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_0 .

Solution: Appliquons le PFD au proton : $m_p \vec{a} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$

D'après la question précédente $m_p \frac{v^2}{R} \vec{N} = ev \vec{T} \wedge B_0 \vec{u}_z$,

En norme : $m_p \frac{v_0^2}{R} = ev_0 B_0$, car $\vec{v} \perp \vec{B}_0$

Ainsi le rayon de courbure de la trajectoire : $R(t) = \frac{m_p v_0}{e B_0}$. Ce rayon s'exprime uniquement en fonction de constantes, il est constant, et on conclut que le **mouvement circulaire**.

R16. Représenter l'allure de la trajectoire suivie par les protons sur le schéma de R11. On fera attention au sens du mouvement !

Exercice n°4 Mouvement de particules chargées dans un tokamak

Partie A Mouvement de particules chargées dans un champ magnétique

On commence par étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Le référentiel d'étude, supposé galiléen, est muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le champ magnétique $\vec{B}$ est uniforme, stationnaire et dirigé selon Oz : $\vec{B} = B \vec{u}_z$ où $B > 0$.

La particule étudiée, de masse m , porte une charge $q > 0$.

On pourra introduire, dans la suite du problème, la pulsation cyclotron $\omega_0 = \frac{qB}{m}$.

Tous les frottements seront négligés.

R1. En proposant des ordres de grandeur raisonnables, montrer que l'on peut négliger le poids de la particule.

Solution:

- Système : particule chargée (électron ou noyau D^+)
- Référentiel : terrestre, galiléen à l'échelle de l'expérience
- Bilan des forces :
 - force de Lorentz magnétique $\vec{f}_B = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

Poids : $m_D g \sim 10^{-26} \text{ N}$

Force Lorentz : $qvB \sim 10^{-19} \times 10^6 \times 1 \sim 10^{-13} \text{ N} \gg m_D g$

On pourra négliger le poids dans la suite.

R2. Justifier que le mouvement est uniforme dans le champ magnétique.

Solution:

D'après le théorème de la puissance cinétique : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_B)$, or $\mathcal{P}(\vec{f}_B) = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$

Ainsi $\mathcal{E}_c$ se conserve, donc la norme du vecteur vitesse est constante, donc le mouvement est uniforme.

R3. La particule étudiée se trouve initialement en O avec une vitesse initiale colinéaire à $\vec{B}$: $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ avec $v_0 > 0$. Quelle est la nature du mouvement de la particule chargée dans ce cas ?

Solution: À $t = 0$, la force magnétique est nulle car $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{B}$, le champ ne peut donc pas dévier, donc la particule va décrire une trajectoire rectiligne. Le mouvement est de plus uniforme, il est donc rectiligne uniforme.

La particule étudiée a maintenant la vitesse initiale : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$ avec $v_0 > 0$ perpendiculaire à $\vec{B}$.

R4. Déterminer les expressions de $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$ et $\frac{dv_z}{dt}$ en fonction de v_x , v_y et ω_0 .

Solution:

D'après le principe fondamental de la dynamique à $M(m, q)$ dans le référentiel du laboratoire galiléen :
 $m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$m \begin{vmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{qB}{m} v_y = \omega_0 v_y \\ -\frac{qB}{m} v_x = -\omega_0 v_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

R5. En déduire que v_x et v_y vérifient les équations différentielles : $\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_0^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_0^2 v_y = 0 \end{cases}$

Solution: On dérive les deux équations premières équations par rapport au temps, puis on injecte dedans l'expression obtenue pour la dérivée à la question précédente :

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \frac{dv_y}{dt} \\ -\omega_0 \frac{dv_x}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 (-\omega_0 v_x) \\ -\omega_0 (\omega_0 v_y) \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_0^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_0^2 v_y = 0 \end{cases}$

R6. Résoudre complètement ces équations et trouver les expressions de v_x et v_y en fonction du temps.

Indication : Pour les conditions initiales sur les dérivées, on utilisera les équations établies R4 exprimées à $t = 0$.

Solution: Ce sont des équations d'oscillateurs harmoniques, donc la solution générale s'écrit

• Pour l'équation vérifiée par v_x :

$$v_x(t) = A \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t), \text{ or à } t = 0, v_x(0) = 0 = A$$

$$\frac{dv_x}{dt}(0) = \omega_0 v_y(0) = \omega_0 v_0 = C \omega_0$$

Ainsi $v_x(t) = v_0 \sin(\omega_0 t)$

- Pour l'équation vérifiée par v_y :

$$v_y(t) = D \cos(\omega_0 t) + E \sin(\omega_0 t), \text{ or à } t = 0, v_y(0) = v_0 = D$$

$$\frac{dv_y}{dt}(0) = \omega_0 v_x(0) = 0 = E\omega_0$$

$$\text{Ainsi } \boxed{v_y(t) = v_0 \cos(\omega_0 t)}$$

R7. Intégrer les expressions précédentes et déterminer les coordonnées x , y et z de la particule en fonction du temps.

$$\text{On donne la position initiale de la particule : } \begin{cases} x_0 = -\frac{v_0}{\omega_0} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Solution:

- On primitive v_x par rapport au temps : $x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + K$,

$$\text{or } x(0) = -\frac{v_0}{\omega_0} = -\frac{v_0}{\omega_0} + K, \text{ donc } K = 0$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)}$$

- On primitive v_x par rapport au temps : $y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + K'$,

$$\text{or } y(0) = 0 = K', \text{ donc } \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

- $\frac{dv_z}{dt} = 0$, donc $v_z(t) = v_z(0) = 0$

$$\text{et } z(t) = z(0) = 0, \text{ donc } \boxed{z(t) = 0}$$

R8. Montrer que la trajectoire de la particule est un cercle contenu dans le plan Oxy dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon, que l'on notera ρ_L (appelé rayon de Larmor).

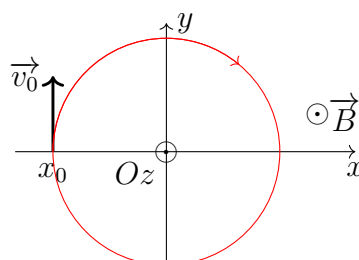
Solution: La trajectoire est plane, dans le plan (Oxy) .

$$\text{En repartant des deux équations horaires sur } x \text{ et } y, \text{ on obtient : } \boxed{x^2 + y^2 = \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{C'est l'équation d'un } \boxed{\text{cercle de rayon } \rho_L = \frac{v_0}{\omega_0}, \text{ de centre } O(0,0)}.$$

R9. Faire un schéma de la trajectoire dans le plan Oxy montrant clairement le sens du mouvement de la particule, la position initiale, le vecteur vitesse initial.

Solution:



R10. On considère maintenant une particule dont la vitesse initiale est : $\vec{v}_0 = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_\perp \\ v_z = v_\parallel \end{cases}$, où $v_\perp$ et $v_\parallel$ sont des grandeurs positives.

Justifier que la trajectoire de la particule est une hélice dont on exprimera le pas h (=la distance parcourue selon l'axe (Oz) en un tour complet de l'axe) en fonction de $v_\parallel$ et ω_0 .

Solution: Dans le plan (Oxy) on retrouve la situation qu'on vient d'étudier : le mouvement est circulaire de rayon ρ_L et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

D'après la question **R3** le mouvement selon l'axe (Oz) est rectiligne uniforme à la vitesse $v_\parallel$.

La combinaison de ces deux mouvements donne donc une hélice.

En une période T_0 , la particule parcourt la distance $h = v_\parallel T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} v_\parallel$ selon l'axe (Oz) .

Partie B Trajectoire dans le tokamak (*Partie plus difficile*)

L'étude précédente a montré que, dans un champ magnétique uniforme, les particules s'enroulaient hélicoïdalement autour des lignes de champ magnétique. Le mécanisme de confinement retenu pour ITER est un confinement magnétique dans une structure toroïdale (en forme de tore) appelée tokamak. L'idée générale du tokamak est de confiner les particules chargées du plasma en les guidant par des lignes de champ magnétique fermées.

Pour piéger des particules chargées soumises à un champ magnétique, il suffit de refermer ses lignes de champ sur elles-mêmes : on obtient ainsi une configuration de champ magnétique toroïdal ^a.

On donne l'expression du champ magnétique dans le tokamak en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

où N est le nombre de spires bobinées sur le tore.

^a. Pour visualiser un tore, imaginez une bouée de piscine !

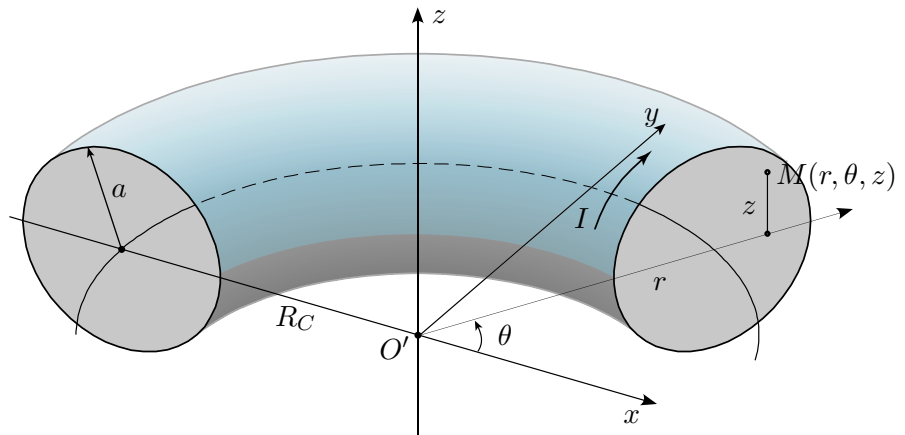


FIGURE 6

Dans ce dispositif, les particules chargées constituant le plasma sont des noyaux de Deutérium D^+ et des électrons.

Les résultats de la **Partie A** ne sont pas directement transposables pour décrire le comportement des particules chargées du plasma, soumises au champ magnétique $\vec{B}_T$ créée, en effet :

- la norme de $\vec{B}_T$ n'est plus uniforme mais dépend de r ,
- les lignes de champ (=courbes tangentes au champ magnétique en chaque endroit) de $\vec{B}_T$ ne sont pas rectilignes mais circulaires.

Cependant, on supposera, en première approximation, qu'une particule chargée effectue toujours un mouvement de révolution autour du son centre guide G et que G se déplace, comme précédemment, suivant les lignes de champ magnétique, maintenant courbées.

On considère un électron ou un noyau D^+ , soumis à $\vec{B}_T$, tournant autour de leur centre guide G , lorsque G suit la ligne de champ magnétique $\vec{B}_T$ au centre du plasma, en $r = R_C$.

Données :

- $\frac{1}{2}m_e v_{\perp e}^2 = \frac{1}{2}m_D v_{\perp D}^2 = 4\text{keV}$ et $v_{\parallel}^2 = \frac{v_{\perp}^2}{2}$
- $B(R_C) = 4,2 \text{ T}$
- $\frac{12,8}{9,1} \approx 1,6$; $\frac{12,8}{3,4} \approx 4$; $\sqrt{10} \approx 3,2$

R11. Comparer numériquement les rayons de courbure des trajectoires de ces particules, ρ_L , dans leur mouvement autour du centre guide G par rapport au rayon R_C de la trajectoire de G .

Solution:

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{v_{\perp}}{\omega_0} \\ &= \frac{mv_{\perp}}{qB_T}\end{aligned}$$

— Pour l'électron :

$$v_{\perp,e} = \sqrt{\frac{8 \times 1,6 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{12,8}{9,1} \times 10^{15}} \approx \sqrt{1,6 \times 10^{15}} = \sqrt{16 \times 10^{14}} \approx 4 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\rho_{L,e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 4 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 4,2} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m} \ll R_C$$

— Pour le deutérium :

$$v_{\perp,D} = \sqrt{\frac{8 \times 1,6 \cdot 10^{-16}}{3,4 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{\frac{12,8}{3,4} \times 10^{11}} = \sqrt{4 \times 10 \times 10^{10}} = 2 \times 3 \times 10^5 \approx 6 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\rho_{L,D} = \frac{3,4 \cdot 10^{-27} \times 6 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 4,2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \ll R_C$$

R12. Calculer numériquement la variation relative $\frac{\Delta B_T}{B_T(R_C)} = \frac{|B_T(R_C + \rho_L) - B_T(R_C)|}{B_T(R_C)}$ de l'amplitude du champ $\vec{B}_T$ sur l'étendue de la trajectoire de ces particules, en fonction de R_C et ρ_L .

Solution: Variation relative :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta B_T}{B_T} &= \frac{|B_T(R_C + \rho_L) - B_T(R_C)|}{B_T(R_C)} \\ &= \left| \frac{R_C}{R_C + \rho_L} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{1}{1 + \frac{\rho_L}{R_C}} - 1 \right| \\ &= \left| 1 - \frac{\rho_L}{R_C} - 1 \right|\end{aligned}$$

Soit $\frac{\Delta B_T}{B_T} = \frac{\rho_L}{R_C} \ll 1$

R13. Commenter ces résultats de façon à justifier les approximations exprimées en introduction de cette partie.

Solution: Les particules restent au voisinage du centre guide G et voient donc un champ quasi uniforme.

L'expérience montre que la non-uniformité du champ $\vec{B}_T$ ainsi que la courbure de ses lignes de champ entraînent une légère dérive transverse de la particule chargée. On admet alors, que pour une particule chargée se déplaçant aux alentours du centre du plasma, en $r = R_C$, la vitesse de dérive de son centre guide G prend la forme :

$$\vec{v}_d(G) = \varepsilon \frac{1}{R_C \omega_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ pour un noyau D}^+ \\ \varepsilon = -1 \text{ pour un électron} \end{cases}$$

R14. Représenter schématiquement l'évolution de la trajectoire d'un noyau D^+ subissant cette dérive lorsqu'il est soumis au champ magnétique $\vec{B}_T$. Même question pour un électron.

Solution: Pour un noyau D^+ , le vecteur vitesse de dérive est selon $+\vec{u}_z$, il décrit donc une hélice autour de la ligne de champ circulaire tout en montant selon l'axe (Oz) .

Pour un électron, le vecteur vitesse de dérive est selon $-\vec{u}_z$, il décrit donc une hélice autour de la ligne de champ circulaire tout en descendant selon l'axe (Oz) .

R15. Application numérique : calculer $\|\vec{v}_d(G)\|$ pour un électron et pour un noyau D^+ se déplaçant autour du centre du plasma, en $r = R_C$.

En déduire le temps t_d mis par une particule chargée, partant du centre du plasma pour atteindre la paroi matérielle du tore, en $\rho = a_T$.

Commentaires.

Solution:

— Vitesse de dérive :

$$v_d = \frac{1}{R_C \omega_0} \left(\frac{v_{\perp,D}^2}{4} + \frac{v_{\perp,D}^2}{2} \right) = \frac{3v_{\perp,D}^2}{4R_C \omega_0}$$

$$\text{Or } \omega_0 = \frac{qB}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 4,2}{3,4 \cdot 10^{-27}} = 2 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Donc } v_d = \frac{3 \times 4 \cdot 10^{11}}{4 \times 6,2 \times 4,2 \times 2 \cdot 10^8} \approx 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

— Durée pour atteindre la paroi : $t_d = \frac{a_T}{v_d} = \frac{2}{60} = 3 \text{ ms}$ (rapide!)