

? Pour le jeudi 5 mars 2026

Devoir Maison n°13 – Corrigé

Remarque – Le travail des DM

- Le cours doit être ouvert sous les yeux, et la rédaction identique à celle du cours.
- Si vous rencontrez des difficultés, posez-moi des questions, y compris le soir, le week-end.

Exercice n°1 Looping en balançoire

Le petit Léon, bientôt 4 ans, est mis en mouvement sur sa balançoire par sa grande cousine, Louise. Comme tout enfant, il rêve de faire le tour complet de la balançoire. L'objectif de cet exercice est de déterminer si cela est possible ou pas. Il ne répondra pas à la question de savoir si les parents sont d'accord ou non avec cela...

La balançoire est assimilée à un pendule simple de longueur L . Les frottements fluides et solides seront négligés.

À $t = 0$, Louise écarte la balançoire d'un angle θ_0 depuis la position d'équilibre et communique une vitesse de norme v_0 à Léon.

Solution:

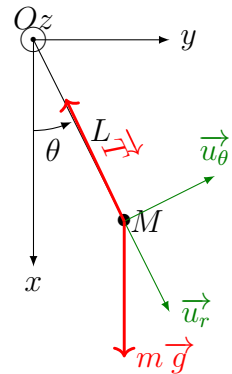
On représente la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Système : Léon $M(m)$

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces :

- Poids $m\vec{g}$, force conservative d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{pp} = -mgx + K = -mgL \cos(\theta) + K$
- Tension du fil $\vec{T}$



R1. Par une étude énergétique, exprimer la vitesse au carré v^2 à un instant quelconque du mouvement, en fonction de v_0 , g , L , θ_0 et θ .

Solution: Léon est soumis à une force conservative et une force qui ne travaille pas, donc d'après le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta\mathcal{E}_m = W(\vec{F}^{\text{non conservative}}) = 0$, l'énergie mécanique se conserve.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(t=0) &= \mathcal{E}_m(t) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - mgx(0) + K &= \frac{1}{2}mv^2 - mgx + K \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - mgL \cos(\theta_0) + K &= \frac{1}{2}mv^2 - mgL \cos(\theta) + K \\ v^2 &= v_0^2 + 2gL(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \end{aligned}$$

R2. En déduire l'inégalité que doit vérifier v_0 pour que la vitesse de Léon ne s'annule jamais lors d'un tour complet, en fonction de g , L , θ_0 .

Solution: On souhaite que v ne s'annule jamais, donc que sa valeur minimale atteinte durant le trajet soit strictement positive. Or $v_{\min} = v(\theta = \pi) = v_0^2 - 2gL(1 + \cos(\theta_0))$.

Ainsi, il faut que $v_0^2 > 2gL(1 + \cos(\theta_0))$, soit $v_0 > \sqrt{2gL(1 + \cos(\theta_0))}$

 Remarque –

La condition porte bien sur le fait que POUR TOUT θ , on veut que $v^2 > 0$. Or v est minimale pour $\theta = \pi$, il faut donc s'assurer du fait que pour $\theta = \pi$, $v^2 > 0$.

R3. Quel serait le mouvement ultérieur de Léon si la vitesse s'annulait au cours du tour? *Seule une réponse qualitative est attendue.*

Solution: Après annulation de la vitesse, Léon ferait demi-tour sur la trajectoire circulaire.

Pour que le tour complet soit possible, la corde doit rester tendue à chaque instant.

R4. Que se passerait-il après si la corde venait à se détendre à un instant donné?

Solution: À l'instant où la corde se détend, $T = 0$, après Léon se retrouve en chute libre (mouvement parabolique) jusqu'à ce que la corde se tende à nouveau.

R5. Établir une deuxième condition sur v_0 pour que ce soit le cas. L'inégalité sera à exprimer en fonction des seules données de l'énoncé : g , L , θ_0 .

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{T} \\ m \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} mg \cos(\theta) \\ -mg \sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $-mL\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - \|\vec{T}\|$

Soit $T = mg \cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2$

Or $v = L\dot{\theta}$, donc $L\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{L} = \frac{v_0^2}{L} + 2g(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$

Soit $T = mg \cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2 + \frac{v_0^2}{L} + 2g(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) = m \left(\frac{v_0^2}{L} + g(3 \cos(\theta) - 2 \cos(\theta_0)) \right)$

À tout instant t , il faut que T soit strictement positive. T est minimale quand $\cos(\theta) = -1$.

Il faut que $T(\theta = \pi) = -mg(3 + 2 \cos(\theta_0)) + \frac{mv_0^2}{L} > 0$

Soit $-mg(3 + 2 \cos(\theta_0)) + \frac{mv_0^2}{L} > 0$, soit $\frac{v_0^2}{L} > g(3 + 2 \cos(\theta_0))$, soit $v_0 > \sqrt{gL(3 + 2 \cos(\theta_0))}$

R6. En considérant que Louise, n'étant pas très grande (elle n'a que 8 ans 1/2!), ne peut pas éloigner, initialement, Léon, d'un angle très important, et que $L \approx 2$ m, déterminer la vitesse initiale qu'elle doit lui communiquer pour lui faire faire un tour complet. Commenter.

Solution: Pour $\theta_0 \ll 1$ rad, donc $\cos(\theta_0) \sim 1$.

La condition précédente s'écrit donc $v_0 > \sqrt{5gL} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}!!$

R7. En pratique, que fait-elle pour augmenter l'amplitude du mouvement ? Quel phénomène est mis en jeu ?

Solution: En poussant le petit Léon périodiquement, avec la période égale à la période propre d'oscillation de Léon, il y aura résonance et l'amplitude des oscillations sera importante, grande devant l'excitation.

Exercice n°2 Chauffe-eau

On souhaite stocker une masse m d'eau dans un ballon d'eau chaude modélisé par une cuve fermée, indéformable et de volume $V_0 = 200$ L.

Suite à un échauffement accidentel, l'eau normalement maintenue à la température $T_i = 60$ °C passe à la température $T_f = 500$ °C.

Données :



Remarque –



L'hypothèse gaz parfait n'était pas faite et était inutile dans cet exercice.

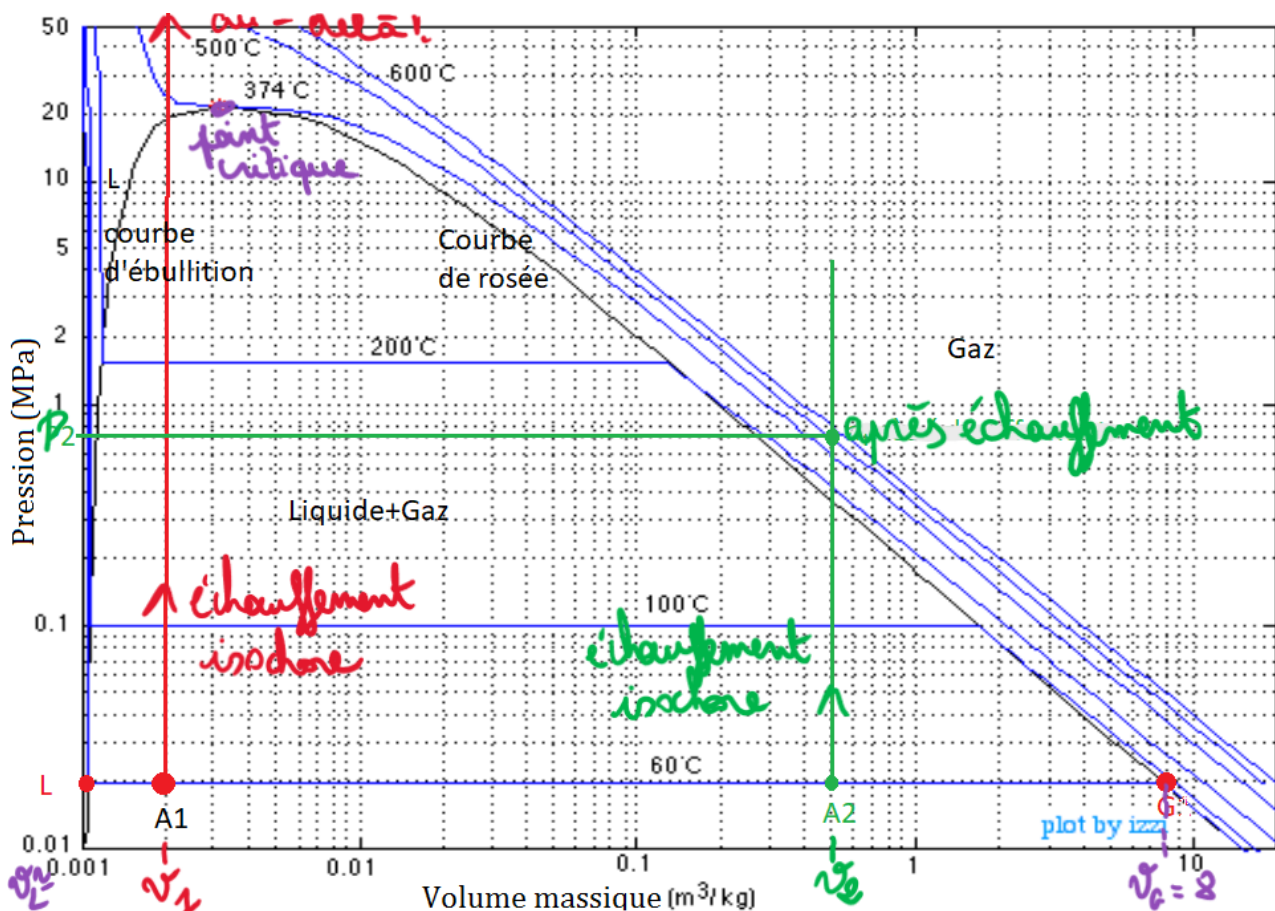
— Équation d'état de l'eau liquide et à l'état fluide supercritique dans le domaine étudié :

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$$

avec $\alpha = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$; $\chi_T = 5,0 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$; $P_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_0 = 293 \text{ K}$

— Masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Solution:





Remarque –

Quand un tel diagramme vous est donné, il faut vous en servir le plus possible ! Cf ci-dessous, c'est le type de diagramme complété que j'aurai dû voir sur vos copies.

- R1. Placer sur le diagramme de Clapeyron fourni (**document réponse à rendre**) les différentes phases. Identifier la courbe d'ébullition et de rosée.
Commenter l'allure des isothermes dans la zone gazeuse, dans la zone liquide, dans la zone d'équilibre diphasé et leurs positions relatives (comment se placent-elles selon la température?).

Solution:



Remarque –

Ne vous contentez pas d'enfoncer des portes ouvertes en décrivant ce que vous voyez sur le diagramme. On attendait des analyses physiques.

Allure des isothermes :

- le liquide est quasi-incompressible et quasi-indilatable, ce qui signifie que le volume massique dépend très peu de la pression et de la température. Ainsi, les isothermes sont quasiment verticales (volume indépendant de la pression), et quasiment confondues (volume indépendant de la température) dans la zone du liquide.
- le gaz est très compressible, par conséquent le volume massique varie fortement avec la pression dans la zone du gaz. Pour un gaz parfait, la pression varie comme l'inverse du volume massique, donc en échelle logarithmique, $\log(P) = -\log(V) + K$, ainsi les isothermes sont des droites de pente -1 .

Le isothermes sont d'autant plus élevées dans le diagramme (P, v) que la température est élevée. En effet, la pression de vapeur saturante augmente avec la température (cf allure de la courbe de vaporisation dans le diagramme (P, T)). De même, à volume massique fixé, la pression du gaz est plus élevée si la température est plus élevée.

- R2. Rappeler le théorème des moments.

Solution: Le titre massique en vapeur : $x_v = \frac{LM}{LG} = \frac{v - v_L}{v_G - v_L}$

Lorsque le ballon est rempli, il contient une masse $m_1 = 100$ kg d'eau.

- R3. En utilisant le diagramme de Clapeyron (P, v) fourni (en échelles logarithmiques), déterminer la composition du mélange liquide-gaz dans le ballon à la température T_i .

Solution: Le volume massique de l'eau dans le ballon vaut ici $v_1 = \frac{V}{m_1} = 2.10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

On place sur le diagramme de Clapeyron le point A_1 correspondant sur l'isotherme $T_i = 60^\circ \text{C}$

Le système est initialement diphasé. Utilisons le théorème des moments pour déterminer la composition du ballon d'eau.

La fraction massique d'eau vapeur est donnée par : $x_{v,1} = \frac{LA_1}{LG} = \frac{v_1 - v_L}{v_G - v_L} = \frac{0,002 - 0,001}{8 - 0,001} = 1,25.10^{-4}$

La fraction massique d'eau liquide vaut alors $x_{\ell,1} = 0,9999$

L'eau est, en masse, majoritairement sous forme liquide dans le ballon.

- R4. Sous quelle forme se trouve l'eau après l'échauffement accidentel jusqu'à la température T_f ? On commencera par indiquer sur le **document réponse** l'état final.
Déterminer la pression P_1 correspondante et commenter.

Solution:



Remarque —

Appuyez-vous sur le diagramme, complétez-le, représentez dessus l'évolution subie par l'eau au cours de l'échauffement.

Au cours de l'échauffement accidentel, le volume massique reste constant (cuve indéformable : V_0 constant et système fermé : m_1 constante), donc l'évolution dans le diagramme de Clapeyron se fait selon la verticale, jusqu'à l'isotherme $T_F = 500\text{ °C}$.

D'après l'évolution, **l'eau est alors à l'état de fluide supercritique** (la pression est supérieure à celle du point critique).

La pression atteinte est nécessairement supérieure 50 MPa, mais nous ne pouvons la déterminer graphiquement.

D'après l'équation d'état fournie par l'énoncé valable pour l'eau liquide et l'eau à l'état fluide supercritique : $\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$

Au cours de la transformation dans le ballon le volume est constant, donc $\alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0) = 0$

Ainsi la pression finale s'exprime $P_1 = P_0 + \frac{\alpha}{\chi_T}(T_f - T_0) = 2,9 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 290 \text{ MPa}$, pression très élevée qui pourrait provoquer l'explosion du ballon.

Le ballon est maintenant presque vide et contient seulement $m_2 = 400 \text{ g}$.

- R5. En utilisant le diagramme de Clapeyron (P, v) fourni (en échelles logarithmiques), déterminer la composition du mélange liquide-gaz dans le ballon à la température T_i .

Solution: Le volume massique du système vaut maintenant $v_2 = \frac{V}{m_2} = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Le théorème des moments donne :

— La fraction massique d'eau vapeur : $x_{v,2} = \frac{LA_2}{LG} = \frac{v_2 - v_{L2}}{v_G - v_L} = \frac{0,5 - 0,001}{8 - 0,001} = 0,062$

— La fraction massique d'eau liquide : $x_{\ell,2} = 0,938$

- R6. Sous quelle état se trouve l'eau après l'échauffement accidentel jusqu'à la température T_f ?
Déterminer la pression P_2 correspondante et commenter.

Solution:



Remarque —

idem : complétez le diagramme, et appuyez-vous dessus !

À l'issue de l'échauffement, l'eau se retrouve à l'état gazeux à la pression $P_2 = 0,7 \text{ MPa} \ll P_1$



Remarque —

L'hypothèse gaz parfait n'était pas faite ! Cela était inutile vu que vous aviez le diagramme, une simple lecture suffisait !

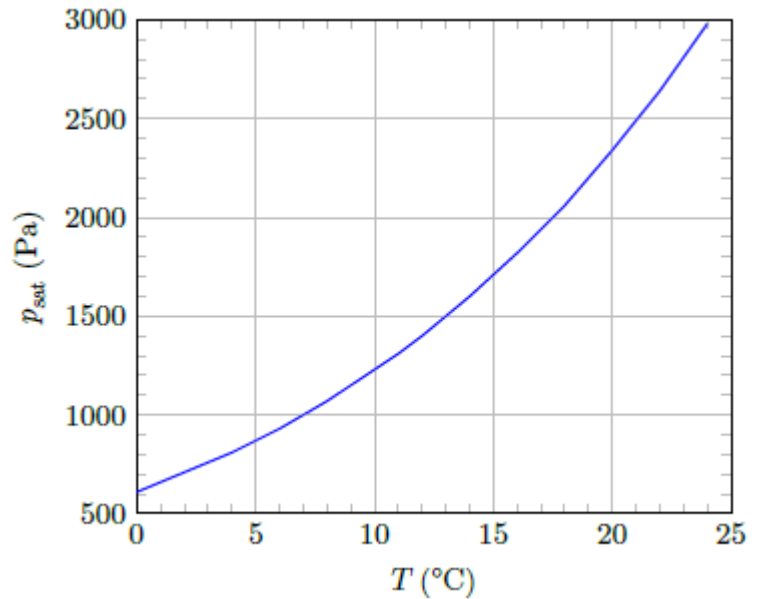
R7. Conclure : comment est-il préférable de stocker l'eau ?

Solution: On peut conclure qu'en cas d'échauffement le deuxième cas présente un risque d'explosion beaucoup plus faible que le premier cas. Il est donc préférable de stocker l'eau sous un volume massique élevé, au moins supérieur au volume massique du point critique, afin d'éviter tout risque d'explosion. Bien évidemment, si l'objectif est de stocker le plus d'eau possible, il vaut mieux la stocker à l'état liquide, mais pour des raisons de sécurité, il faut qu'il y ait de l'eau à l'état vapeur. En général, on s'arrange pour stocker les fluides à un volume massique légèrement supérieur au volume critique.

Exercice n°3 Air humide

L'air renferme toujours une proportion d'eau sous forme vapeur. On le qualifie d'air humide et on le caractérise par :

- son humidité absolue $x = \frac{m_v}{m_{as}}$ où m_v et m_{as} sont respectivement les masses de vapeur d'eau et d'air sec dans un volume V quelconque d'air humide ;
- son humidité relative HR (ou degré hygrométrique) à la température T : $HR = \frac{p_v(T)}{p_{sat}(T)}$, où p_v est la pression partielle en vapeur d'eau et p_{sat} la pression de vapeur saturante dont la dépendance avec la température est donnée par la figure ci-dessous.



Dans la suite, l'air humide sera étudié comme un mélange de deux gaz parfaits : l'air sec (indice as) et la vapeur d'eau (indice v). La pression totale p de l'air humide sera considérée constante et égale à $p = 1,013$ bar. On note respectivement M_{as} et M_e les masses molaires de l'air sec et de l'eau.

R1. Montrer que $x = d \frac{p_v}{p - p_v}$, où $d = \frac{M_e}{M_{as}}$.

Solution: Partons de la définition de l'humidité absolue $x = \frac{m_v}{m_{as}}$ où m_v et m_{as} sont respectivement les masses de vapeur d'eau et d'air sec dans un volume V quelconque d'air humide.

Appliquons la loi des gaz parfaits à la vapeur d'eau de pression p_v : $p_v V = n_v R T$, avec $n_v = \frac{m_v}{M_e}$, soit

$$m_v = M_e \times \frac{p_v V}{R T}$$

Appliquons la loi des gaz parfaits à l'air de pression p : $p V = (n_{as} + n_v) R T$, avec $n_{as} = \frac{m_{as}}{M_{as}}$,

$$\text{soit } m_{as} = M_{as} \times \left(\frac{p V}{R T} - n_v \right) = \frac{M_{as} V}{R T} \times (p - p_v)$$

$$\text{Ainsi } x = \frac{M_e}{M_{as}} \times \frac{p_v}{p - p_v} = d \frac{p_v}{p - p_v}, \text{ avec } d = \frac{M_e}{M_{as}}.$$

R2. Calculer la valeur maximale de l'humidité absolue x_{sat} de l'air humide à la température $T_0 = 20$ °C.

Solution: L'humidité absolue à 20 °C est maximale lorsque la pression partielle en vapeur d'eau est égale à la pression de vapeur saturante à la température $T_0 = 20$ °C, qui d'après le graphe fourni vaut $p_{sat}(T_0) = 2330$ Pa

$$x_{\text{sat}} = \frac{M_e}{M_{as}} \frac{p_{\text{sat}}(T_0)}{p - p_{\text{sat}}(T_0)}$$

A.N. : $x_{\text{sat}} = 1,46 \cdot 10^{-2} = 1,46\%$

On considère une chambre hermétiquement fermée de volume $V = 40 \text{ m}^3$ occupée par une personne qui se couche à 22 h. La température de la pièce est de 18°C et l'humidité relative est de 50 %. La chambre n'est pas chauffée et la température au lever à 8 h le lendemain matin est de 16°C . On trouvera en fin d'énoncé quelques exemples de sources d'eau vapeur, ainsi que leur débit de production.

R3. Au lever, l'occupant de la chambre constate-t-il une condensation de l'eau ? La réponse doit s'appuyer sur un raisonnement quantitatif.

Solution: On étudie l'air humide contenu dans une chambre de volume $V = 40 \text{ m}^3$.

Nous souhaitons déterminer s'il y a condensation (ou non) à la fin de la nuit. Pour cela, il faut déterminer l'humidité relative à la fin de la nuit. La valeur de l'humidité relative à la fin dépend de celle au début de la nuit (c'est-à-dire de la masse de vapeur d'eau $m_{v,i}$ initialement présente dans la chambre) et de la vapeur d'eau apparue durant la nuit créée par les différentes sources présentes dans la chambre (plantes et être humain).

EI	$\longrightarrow$	EF
$t_i = 0$ (22 h la veille)		$t_f = 10$ h (8 h le lendemain)
$HR_i = 50\%$		$HR_f = ?$
$T_i = 18^\circ\text{C}$		$T_f = 16^\circ\text{C}$
$p_{v,i} = HR_i \times p_{\text{sat}}(T_i)$		$p_{v,f}$
$m_{v,i}$		$m_{v,f}$

— Commençons par déterminer la masse de vapeur d'eau initialement présente dans l'air :

À l'aide de la loi des gaz parfaits $m_{v,i} = M_v \times \frac{p_{v,i}V}{RT}$, avec $p_{v,i} = HR_i \times p_{\text{sat}}(T_i)$.

On lit sur le graphe fournie : $p_{\text{sat}}(T_i = 18^\circ\text{C}) = 2100 \text{ Pa}$, ainsi $p_{v,i} = 1050 \text{ Pa}$.

On en déduit qu'il y a initialement une masse $m_{v,i} = 0,312 \text{ kg}$ de vapeur d'eau dans la chambre.

— La masse de vapeur d'eau présente à la fin de la nuit est égale à $m_{v,i}$ à qui on ajoute la masse de vapeur d'eau apparue durant la nuit égale au débit massique D_m multipliée par la durée de la nuit : $m_{v,f} = m_{v,i} + D_m \times (t_f - t_i)$

Prenons pour le débit massique $D_m \approx 100 \text{ g} \cdot \text{h}^{-1}$ (en prenant des valeurs moyennes des débits fournis).

A.N. : $m_{v,f} = 0,312 \text{ kg} + 0,1 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1} \times 10 \text{ h} = 1,312 \text{ kg}$

Ainsi il y a à la fin de la nuit une masse $m_{v,i} = 1,312 \text{ kg}$ de vapeur d'eau dans la chambre

— Finissons le raisonnement par le calcul de la pression partielle en vapeur d'eau à la fin de la nuit :

$$p_{v,f} = \frac{m_{v,f}RT_f}{M_eV} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Or, graphiquement on lit la pression de vapeur saturante à la fin de la nuit : $p_{\text{sat}}(T_f = 16^\circ\text{C}) = 1800 \text{ Pa}$

$p_{v,f} > p_{\text{sat}}(T_f = 16^\circ\text{C})$, donc l'occupant de la chambre constatera une condensation de l'eau.

Il faut conclure par une phrase, qui répond à la problématique posée !

Rq : en prenant la valeur minimale du débit de vapeur d'eau de l'humain et en considérant qu'il n'y a pas de plantes, $D_m = 30 \text{ g} \cdot \text{h}^{-1}$, alors $m_{v,f} = 0,612 \text{ kg}$ et $p_{v,f} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Pa} > p_{\text{sat}}(T_f)$

Le problème de la condensation peut être résolu en aérant les pièces du logement suffisamment et régulièrement. Certaines personnes sont réticentes à aérer lors des journées humides où l'air extérieur est froid et saturé en vapeur d'eau.

Considérons une pièce initialement à la température $T_i = 20\text{ °C}$ et saturée en vapeur d'eau. L'air extérieur est à la température $T_a = 10\text{ °C}$ et est aussi saturé en vapeur d'eau. On renouvelle entièrement l'air de la pièce avec courant d'air.

R4. Calculer l'humidité relative de l'air de la pièce après aération une fois que l'air est revenu à la température $T_i = 20\text{ °C}$ par contact avec les meubles, le plafond et les parois intérieures de la pièce. Conclure.

Solution: On aère une pièce initialement à $T_i = 20\text{ °C}$ saturée en vapeur d'eau et on attend que la totalité de l'air de la place ait été remplacé par de l'air extérieur à la température $T_a = 10\text{ °C}$ qui est saturé en vapeur d'eau. Après avoir fermé la fenêtre, on attend que la température soit remontée à $T_i = 20\text{ °C}$.

Le but est de savoir si à la fin de l'opération l'air est toujours saturé en eau ou non.

On étudie le système { air dans la chambre } :

EI	→	EF
fin aération		après réchauffement de l'air
$HR_i = 100\%$		$HR_f = ?$
$T_a = 10\text{ °C}$		$T_i = 18\text{ °C}$
$p = 1,013\text{ bar}$		$p = 1,013\text{ bar}$
$p_{v,i} = p_{\text{sat}}(T_a)$		$p_{v,f} = ???$
$m_{v,i}$		$m_{v,f} = m_{v,i}$ (système fermé)

— À la fin de l'aération, la pression partielle en eau dans l'air de la chambre est égale à la pression de vapeur saturante à $T_a = 10\text{ °C}$, qui vaut $p_{\text{sat}}(T_a) = 1250\text{ Pa}$.

Il y a donc une masse de vapeur d'eau $m_{v,i} = \frac{M_v p_{\text{sat}}(T_a) V}{RT_a} = 0,383\text{ kg}$ (valeur inutile pour la suite) dans l'air de la chambre à la fin de l'aération.

— On ferme la fenêtre et on attend que la température de l'air soit revenue à la température $T_i = 20\text{ °C}$ par contact avec les meubles, le plafond et les parois intérieures de la pièce. La masse de vapeur d'eau n'a pas évolué et reste égale à $m_{v,i}$, seule la température a changé, alors la pression en vapeur d'eau aura évolué, de même que la pression de vapeur saturante.

À la fin de l'opération, la pression partielle en vapeur d'eau vaut $p_{v,f} = \frac{m_{v,i} R T_i}{M_v V} = p_{\text{sat}}(T_a) \frac{T_i}{T_a}$

Or la pression de vapeur saturante vaut $p_{\text{sat}}(T_i = 18\text{ °C}) = 2100\text{ Pa}$.

Ainsi l'humidité relative une fois l'aération faite et la température revenue à sa valeur initiale vaut

$$HR_f = \frac{p_{v,f}}{p_{\text{sat}}(T_i)} = \frac{p_{\text{sat}}(T_a)}{p_{\text{sat}}(T_i)} \times \frac{T_i}{T_a} = 0,55 < 1$$

L'air de la pièce qui était initialement saturé ne l'est plus ! Il faut donc aérer la pièce, même lorsque l'air de dehors est froid et saturé en eau.

Il faut conclure par une phrase, qui répond à la problématique posée !

Données : Sources de l'humidité de l'air dans une pièce habitée (débit massique d'eau vapeur en $\text{g} \cdot \text{h}^{-1}$) :

Cuisson	400 à 800	Lave-vaisselle	200 à 400
Douche	1500 à 3000	Bain	600 à 1200
Plantes	7 à 20	Être humain (selon son activité)	30 à 200