

? À rendre LUNDI 20 avril 2026

Devoir Maison n°16 — Mouvement à force centrale — Corrigé

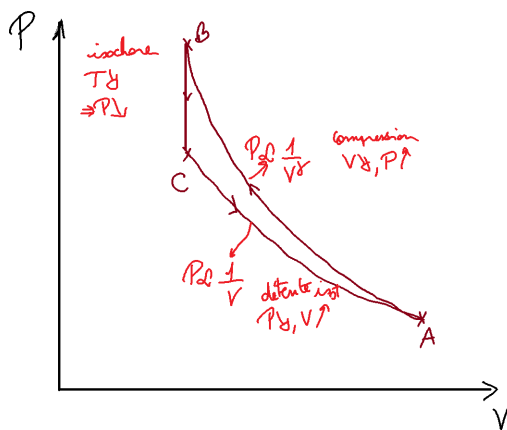
Exercice n°1 Un cycle

On considère le cycle monotherme $ABCA$ décrit par une masse m de CO_2 gazeux, assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et de coefficient γ supposé constant.

- Transformation $A \rightarrow B$: le gaz, initialement à la température $T_A = T_1$, subit une compression adiabatique réversible qui le porte à la température $T_B = T_2$.
- Transformation $B \rightarrow C$: le gaz, évoluant à volume constant, revient à la température initiale au contact d'un thermostat de température T_1 .
- Transformation $C \rightarrow A$: le gaz est ramené à l'état initial A par une détente isotherme réversible.

R1. Représenter l'allure de ce cycle dans un diagramme (P, V) .

Solution:



R2. Exprimer puis calculer les valeurs numériques des paramètres P , T , V dans chacun des états A , B et C à partir des données suivantes : $m = 1,00 \text{ g}$; $V_A = 8,20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$; $P_A = 1,00 \text{ bar}$; $a = \frac{P_B}{P_A} = 10,0$.

Solution:

— En A :
$$T_A = T_1 = \frac{P_A V_A}{n R T_A} = \frac{M P_A V_A}{m R} = 434 \text{ K}$$

— En B

$$P_B = a \times P_A = 10,0 \text{ bar}$$

La transformation $A \rightarrow B$ est adiabatique réversible d'un gaz parfait. D'après la loi de Laplace :

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

Soit
$$V_B = V_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{V_A}{a^{\frac{1}{\gamma}}} = 1,40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} = T_B^\gamma P_B^{1-\gamma}$$

Soit
$$T_B = T_2 = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

Soit
$$T_B = T_2 = T_A a^{1-\frac{1}{\gamma}} = 738 \text{ K}$$

OU
$$T_B = T_2 = \frac{M P_B V_B}{m R} = 738 \text{ K}$$

— En C

La transformation $B \rightarrow C$ est isochore, donc $V_C = V_B = 1,40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$

La transformation $C \rightarrow A$ est isotherme, donc $T_C = T_A = T_1 = 434 \text{ K}$

$$P_C = \frac{mRT_1}{MV_B} = 5,9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

R3. Établir les expressions des travaux et des transferts thermiques reçus par le gaz au cours de chacune des transformations $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow A$, en fonction de m , M , R , γ , T_1 , T_2 et a . Faire les applications numériques.

Solution:



Remarque —

Respectez les variables demandées dans l'énoncé.

Ne T_A , ni T_B , ni T_C , ni les volumes ne devaient apparaître dans vos expressions finales.

■ Transformation $A \rightarrow B$:

• La transformation est adiabatique, donc $Q_{AB} = 0$

• D'après le premier principe : $W_{AB} = \Delta_{AB}U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}(T_2 - T_1) = 192 \text{ J}$

■ Transformation $B \rightarrow C$:

• La transformation est isochore, donc $W_{BC} = 0$

• D'après le premier principe : $Q_{BC} = \Delta_{BC}U = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}(T_1 - T_2) = -192 \text{ J}$

■ Transformation $C \rightarrow A$:

• Travail :



Remarque —

Il faut JUSTIFIER le résultat, et non balancer le résultat final.

$$\begin{aligned} W_{CA} &= \int_{V_C}^{V_A} -P dV \\ &= \int_{V_C}^{V_A} -\frac{nRT_1}{V} dV \\ &= -nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) \\ &= -\frac{m}{M}RT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) \\ &= -\frac{m}{M}RT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= -\frac{mRT_1}{M(\gamma-1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \end{aligned}$$

Soit $W_{CA} = -\frac{mRT_1}{M(\gamma-1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -145 \text{ J}$

• La transformation est isotherme, donc $\Delta_{CA}U = 0$

Alors $Q_{CA} = -W_{CA} = \frac{mRT_1}{M(\gamma-1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 145 \text{ J}$

R4. Calculer les variations d'entropie du gaz au cours des transformations $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow A$.
Comparer ces deux variations d'entropie et expliquer le résultat obtenu.

Solution:

■ Variation d'entropie sur $B \rightarrow C$:

$$\begin{aligned}\Delta_{BC}S &= nC_{V,m} \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \\ &= \frac{mR}{M(\gamma-1)} \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \\ &= -0,335 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

■ Variation d'entropie sur $C \rightarrow A$:

$$\begin{aligned}\Delta_{CA}S &= nR \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) \\ &= \frac{mR}{M} \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) \\ &= \frac{mR}{M} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= \frac{mR}{M(\gamma-1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \\ &= 0,335 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

On constate que $\Delta_{CA}S = -\Delta_{BC}S$, soit $\boxed{\Delta_{CA}S + \Delta_{BC}S = 0}$

La transformation $A \rightarrow B$ est adiabatique réversible, donc isentropique, donc $\Delta_{AB}S = 0$

On en déduit que $\boxed{\Delta_{AB}S + \Delta_{CA}S + \Delta_{BC}S = 0}$, ce qui est cohérent puisqu'il s'agit d'un cycle.

R5. Calculer l'entropie échangée par le gaz au cours de la transformation $B \rightarrow C$.
En déduire l'entropie créée au cours de cette transformation. Commenter.

Solution: La transformation $B \rightarrow C$ est monotherme à la température T_1 :

$$\begin{aligned}S_{e,BC} &= \frac{Q_{BC}}{T_1} \\ &= \frac{mR}{M(\gamma-1)} \frac{T_1 - T_2}{T_1}\end{aligned}$$

Soit $\boxed{S_{e,BC} = \frac{mR}{M(\gamma-1)} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = -0,442 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$

D'après le 2^e principe sur la transformation $B \rightarrow C$:

$$\boxed{S_{c,BC} = \Delta_{BC}S - S_{e,BC} = \frac{mR}{M(\gamma-1)} \left(\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - 1 + \frac{T_2}{T_1}\right) = 0,107 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0}$$

Le cycle est irréversible à cause de la transformation $B \rightarrow C$ au cours de laquelle le gaz est en contact avec un thermostat de température plus faible. Le transfert thermique a lieu de façon irréversible du système (le gaz) vers le thermostat.

Exercice n°2 Fabrication d'un glaçon 🎵

En vue des températures élevées qui vont s'annoncer, vous souhaitez fabriquer des glaçons pour pouvoir boire ensuite des jus de fruits frais.

Pour cela, vous remplissez les bacs à glaçon d'une masse $m = 100 \text{ g}$ d'eau liquide, initialement à $T_i = 20 \text{ °C}$, et vous le placez dans le congélateur de température $T_c = -18 \text{ °C}$.

R1. Qualifier le plus précisément possible la transformation.

Solution: Système : glaçon de masse $m = 100 \text{ g}$
La transformation est monotherme à T_c et isobare.

R2. Que peut-on dire sur l'état d'équilibre final du système ?

Solution: À l'état d'équilibre final, la température du système sera égale à celle du congélateur. Enfin, sous 1 bar à -18 °C , l'eau est à l'état solide.

EI eau (ℓ) $m = 100 \text{ g}$ $T_i = 20 \text{ °C}$	$\xrightarrow[\text{isobare}]{\text{monotherme à } T_c}$	EF eau (s) $m = 100 \text{ g}$ $T_f = T_c = -18 \text{ °C}$
--	--	---

R3. Définir le chemin fictif permettant d'exprimer la variation de l'enthalpie et d'entropie du système.

Solution: L'enthalpie est une fonction d'état dont la variation ne dépend pas du chemin suivi, donc on peut calculer ΔH sur un chemin fictif.

EI eau (ℓ) $m = 100 \text{ g}$ $T_i = 20 \text{ °C}$	$\xrightarrow[\text{de l'eau liquide}]{\text{refroidissement}}$	A eau (ℓ) m $T_0 = 273 \text{ K}$	$\xrightarrow{\text{solidification}}$	B eau (s) m T_0	$\xrightarrow[\text{de l'eau solide}]{\text{refroidissement}}$	EF eau (s) m $T_c = -18 \text{ °C}$
--	---	---	---	---	--	---

R4. Exprimer la variation de l'enthalpie.

Solution:

- Refroidissement de l'eau liquide de T_i à T_0 : $\Delta_{EI \rightarrow A} H = m c_\ell (T_0 - T_i)$
- Solidification à T_0 : $\Delta_{A \rightarrow B} H = -m \Delta_{\text{fus}} h(T_0)$
- Refroidissement de l'eau solide de T_0 à T_c : $\Delta_{B \rightarrow EF} S = m c_g (T_c - T_0)$

$$\Delta H = m \left(c_\ell (T_0 - T_i) - \Delta_{\text{fus}} h(T_0) + c_g (T_c - T_0) \right)$$

R5. Exprimer le transfert thermique reçu par le système au cours de la transformation. Faire l'application numérique. Commenter le signe.

Solution:



Remarque –

On peut écrire le 1^{er} principe avec l'enthalpie si : système fermé ET transformation ISOBARE ou {MONOBARE ET $P_i = P_{\text{ext}} = P_f$ } : ce sont les uniques arguments attendus !

Au cours d'une transformation isobare, il est intéressant d'écrire le premier principe sous la forme d'un bilan d'enthalpie : $\Delta H = W' + Q$

Aucun travail autre que celui des forces de pression ne s'exerce sur le système, donc $W' = 0$.

Ainsi le premier principe s'écrit $\Delta H = Q$

$$\text{Donc } Q = m \left(c_\ell (T_0 - T_i) - \Delta_{\text{fus}} h(T_0) + c_g (T_c - T_0) \right) = -46 \text{ kJ} < 0$$

L'eau libère donc réellement du transfert thermique pour passer de l'état liquide à l'état solide.

R6. En déduire l'entropie échangée par l'eau.

Solution: Entropie échangée :
$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_c} = \frac{m(c_\ell(T_0 - T_i) - \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_g(T_c - T_0))}{T_c} = -167 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

R7. Exprimer la variation d'entropie de l'eau.

Solution: La variation d'entropie de l'eau se calcule à l'aide du même chemin fictif que pour la variation de l'enthalpie.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta_{IA}S + \Delta_{AB}S + \Delta_{BF}S \\ &= mc_\ell \ln \frac{T_0}{T_i} + m\Delta_{\text{sol}}s(T_0) + mc_g \ln \frac{T_c}{T_0} \\ &= m \left(c_\ell \ln \frac{T_0}{T_i} - \Delta_{\text{fus}}s(T_0) + c_g \ln \frac{T_c}{T_0} \right) \\ &= m \left(c_\ell \ln \frac{T_0}{T_i} - \frac{\Delta_{\text{fus}}h(T_0)}{T_0} + c_g \ln \frac{T_c}{T_0} \right) \end{aligned}$$

A.N : $\Delta S = -17 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

R8. En déduire l'entropie créée et commenter.

Solution: D'après le 2^e principe : $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

Ainsi $S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} = 150 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$

L'irréversibilité de la transformation provient de l'inhomogénéité initiale des températures de l'eau et du congélateur, le transfert thermique a lieu irréversiblement de l'eau vers le congélateur.



Remarque –

Ne pas se contenter de « la transformation est irréversible », il faut aller au-delà, et identifier la/les cause(s) d'irréversibilité.

Exercice n°3 Détente d'un gaz parfait 🎵 🎵

Un cylindre non calorifugé, fermé par un piston, contient une mole de gaz parfait dans l'état initial ($T_1 = 273 \text{ K}$, $P_1 = 3,0 \text{ bar}$). Ce système est plongé dans un bain eau-glace constituant un thermostat à 0°C . On agit sur le piston mobile pour détendre, très lentement le gaz jusqu'à la pression $P_2 = 1,0 \text{ bar}$.

R1. Qualifier la transformation subie par le gaz parfait.

Solution:



Remarque –

La définition du SYSTÈME et de la TRANSFORMATION est INDISPENSABLE avant toute réponse.

Système : { 1 mole de GP }

Le gaz subit une transformation **monotherme, réalisée très lentement**, elle est donc isotherme.

EI	$\xrightarrow{\text{isotherme}}$	EF
$T_1 = 273 \text{ K}$		$T_2 = T_1 = 273 \text{ K}$
$P_1 = 3,0 \text{ bar}$		$P_2 = 1,0 \text{ bar}$
V_1		V_2

R2. Exprimer la variation de l'énergie interne du gaz parfait, le travail des forces de pression et le transfert thermique reçus par le gaz parfait.

Solution: D'après la 1^{re} loi de Joule, la variation de l'énergie interne du gaz : $\Delta U = 0$

Travail des forces de pression reçu par le gaz :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} dV \\
 W &= \int_{V_1}^{V_2} -P dV \\
 &= \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT_1}{V} dV \\
 &= -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\
 &= -nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2}
 \end{aligned}$$

Soit $W = nRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1} = -2494 \text{ J} < 0$: c'est une détente, le gaz fournit réellement du travail mécanique au milieu extérieur.

D'après le 1^{er} principe appliqué au gaz : $\Delta U = W + Q$, soit $Q = -W = -nRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1} = +2494 \text{ J} > 0$: au cours d'une détente isotherme, le gaz doit recevoir du transfert thermique.

R3. En déduire le transfert thermique reçu par le bain eau-glace.

Solution: Si le système { bain + GP } est isolé thermiquement, le transfert thermique reçu par le bain eau-glace est l'opposé de celui reçu par le gaz : $Q' = -Q = nRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1} = -2494 \text{ J} < 0$



Remarque –

Il faut justifier la relation entre Q et Q' !

R4. Déterminer la masse m de glace apparaissant dans le thermostat.

Solution:



Remarque –

On étudie un autre système, il faut donc le définir à nouveau.

Système : { bain d'eau-glace }

 Remarque –

Il faut JUSTIFIER la solidification de l'eau : Le mélange-eau glace reçoit un transfert thermique négatif, donc il en fournit réellement au milieu extérieur, il y a solidification d'une masse m_{sol} d'eau.

Il faut DÉFINIR la notation utilisée pour nommer la masse qui se solidifie.

Utiliser « m » sans précision démontre que vous ne savez pas exactement ce que vous êtes en train d'exprimer...

EI	isobare solidification partielle de m	EF
$T_0 = 273 \text{ K}$		$T_0 = 273 \text{ K}$
$P_0 = 1,0 \text{ bar}$		$P_0 = 1,0 \text{ bar}$
m_ℓ liquide		$m_\ell - m_{\text{sol}}$ liquide
m_g solide		$m_g + m_{\text{sol}}$ solide

La transformation de l'eau est isobare.

On applique le 1^{er} principe à l'eau : $\Delta H' = Q'$,

Or la variation d'enthalpie de l'eau au cours de la solidification de la masse m_{sol} sous T_0 (température constante du changement d'état à la pression de 1 bar) : $\Delta H' = m_{\text{sol}} \Delta_{\text{sol}} h(T_1) = -m_{\text{sol}} \Delta_{\text{fus}} h(T_1)$

Ainsi
$$m_{\text{sol}} = -\frac{Q'}{\Delta_{\text{fus}} h(T_1)} = 0,00744 \text{ kg} = 7,44 \text{ g}$$

R5. Calculer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée par le gaz ainsi que la création d'entropie. Commenter.

Solution:

— **Variation de l'entropie du gaz :**
$$\Delta S_{\text{gaz}} = -nR \ln \frac{P_2}{P_1} = 9,13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

— **Entropie échangée reçue par le gaz :**
$$S_{\text{éch,gaz}} = \frac{Q}{T_1} = -nR \ln \frac{P_2}{P_1} = 9,13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = \Delta S$$

— D'après le 2^e principe appliqué au gaz : $\Delta S_{\text{gaz}} = S_{\text{éch,gaz}} + S_{\text{créée,gaz}}$

On en déduit que $S_{\text{créée,gaz}} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: la transformation est réversible.

En effet, elle est réalisée lentement, et à **chaque instant l'équilibre thermique et mécanique est réalisé**, les transferts thermiques ont lieu entre le système et le thermostat qui sont à la même température, ce transfert thermique est donc réversible.

INTERPRÉTER le résultat : ne vous contentez pas d'un « c'est réversible. »

R6. Effectuer le bilan d'entropie du bain eau-glace.

Solution: ATTENTION, l'eau change partiellement d'état ! il faut donc utiliser l'expression de la variation d'entropie lors d'un changement d'état à pression et température constantes, et NON celle d'une phase condensée en l'absence de changement d'état

On étudie le bain eau-glace, et la même transformation que R4.

— Variation d'entropie :
$$\Delta S_{\text{bain}} = m \Delta_{\text{sol}} s(T_0) = -m \frac{\Delta_{\text{fus}} h(T_0)}{T_0}$$

$$\text{A.N. : } \Delta S_{\text{bain}} = -7,44 \cdot 10^{-3} \times \frac{335 \cdot 10^3}{273} = 9,13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{— Entropie échangée : } S_{\text{éch,bain}} = \frac{Q'}{T_1} = -S_{\text{éch,gaz}}$$

$$\text{— Entropie créée : d'après le deuxième principe, on trouve } S_{\text{créée,bain}} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Interprétez précisément !

La transformation est réversible, car le **changement d'état est effectué à pression constante et à la température d'équilibre diphasé correspondant.**

Exercice n°4 De l'évolution du concept d'atome au cours du XX^e siècle

Partie A Limite du modèle de J.J. Thomson à travers l'expérience de E. Rutherford

R1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par J.J. Thomson est incompatible avec les observations de E. Rutherford.

Solution: Dans le modèle proposé par J.J. Thomson, l'atome forme une sorte de gelée, par conséquent on s'attendrait à ce que les particules α lancées sur la feuille d'or rebondissent toutes. Le fait que la majorité des particules α traversent la feuille d'or alors qu'une faible proportion rebondit laisse à penser que la feuille d'or est constituée majoritairement de vide, ce qui est contraire au modèle de J.J. Thomson.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de J. Perrin, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau. Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z.e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O , origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Nous considérons qu'à l'instant initial $t = 0$ s, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme selon $+\vec{e}_x$, à la vitesse v_0 , caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$.

On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (Figure 1). À chaque instant t , on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O .

La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\vec{OM} = d(t) \vec{e}_r$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O , la particule alpha est au point S , la distance minimale en ce point est notée d_m . La particule alpha est non relativiste. L'expérience est réalisée sous très faible pression.

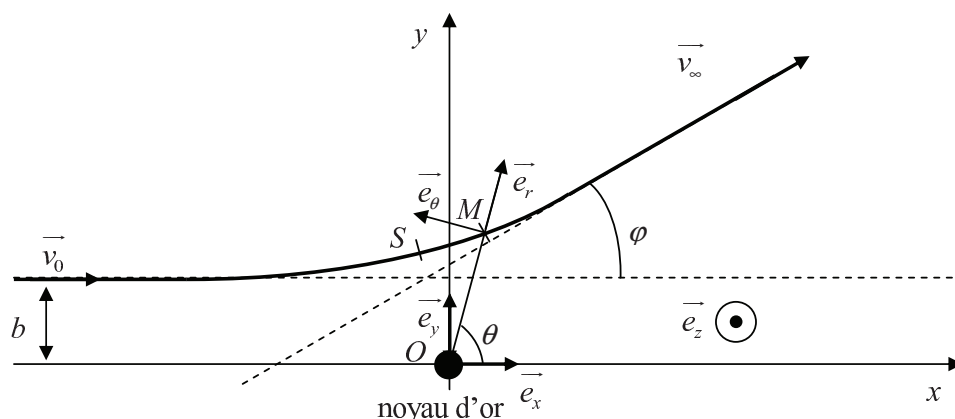


FIGURE 1 – Expérience de Ernest Rutherford

R2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e , Z , d , ε_0 et $\vec{e}_r$. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, en considérant que $\lim_{d \rightarrow +\infty} E_p(d) = 0$, en fonction

de e , Z , d et ε_0 . Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}$ et d .

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ par rapport au point O et l'énergie mécanique E_M de la particule alpha se conservent.

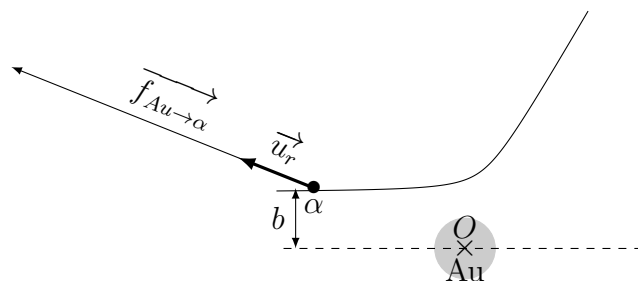
Solution:

Remarque –

- La définition propre du système et du référentiel, et la représentation du schéma ne sont pas des options !! C'est une obligation !
- « CITER les propriétés » ne demande aucune démonstration !!! Donc il fallait se contenter de : « la force est centrale donc le moment cinétique par rapport à O se conserve » et « la force est conservative donc l'énergie mécanique se conserve. »
- Par contre, il fallait bien séparer clairement chaque propriété avec sa conséquence.

Système : particule alpha de masse m_α , de charge $q_\alpha = 2e$.

Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire, lié au noyau d'or, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.



La force exercée par le noyau d'or de charge Ze sur la particule alpha de charge $2e$ s'écrit

$$\vec{F} = \frac{(Ze) \times (2e)}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \vec{e}_r = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \vec{e}_r$$

Cette force est bien répulsive.

L'énergie potentielle correspondante s'écrit $E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$

En introduisant $K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}$, on écrit la force $\vec{F} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$ et l'énergie potentielle $E_p(d) = \frac{K}{d}$

Cette force est une force centrale, puisque toujours dirigée selon le vecteur $\vec{OM}$, ce qui permet d'affirmer que le moment cinétique de la particule alpha par rapport à O se conserve.

Cette force est également une force conservative, puisque dérivant d'une énergie potentielle, ce qui permet d'affirmer que l'énergie mécanique de la particule alphas se conserve.

R3. **♪** Déterminer, en fonction de m_α et v_0 , l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.

Solution: Énergie mécanique, que l'on calcule à $t = 0$: $E_M = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{K}{d_0}$, or à $t = 0$, la particule alpha se trouve à l'infini, c'est-à-dire $d_0 \rightarrow \infty$, soit $E_M = \frac{1}{2}m_\alpha v_0^2$

R4. **♪** Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O$ en fonction de b , m_α , v_0 et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Pour cela, vous pourrez calculer $\vec{L}_O$ en M_0 , position initiale de la particule alpha telle que $\vec{OM}_0 = X\vec{e}_x + b\vec{e}_y$.

Solution: Moment cinétique, que l'on calcule à $t = 0$: $\vec{L}_O = \vec{OM}_0 \wedge m_\alpha \vec{v}_0$, avec $\vec{OM}_0 = X\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ et $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$

Soit $\vec{L}_O = m_\alpha(X\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge v_0\vec{e}_x$, soit $\vec{L}_O = -m_\alpha v_0 b \vec{e}_z$

- R5. 🎵 Établir, à un instant t quelconque, l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O$ en fonction de $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, m_α , d et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire une relation entre d , b , $\dot{\theta}$ et v_0 .

Solution: À t quelconque : $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_\alpha \vec{v}$, avec $\vec{OM} = d\vec{e}_r$ et $\vec{v} = d\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Ainsi $\vec{L}_O = m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

Par conservation du moment cinétique, on en déduit que $d^2 \dot{\theta} = -bv_0$

- R6. Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse $\vec{v}_s$, de norme v_s , de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur $\vec{OS}$, de norme d_m . Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K , b , m_α et v_0 .

Solution: Au sommet de la trajectoire, $\vec{v}_s$ est orthogonal à $\vec{OS} = d_m \vec{e}_r$, donc $\vec{v}_s = d_m \dot{\theta}_s \vec{e}_\theta$

Exprimons l'énergie mécanique en S : $E_M = \frac{1}{2} m_\alpha v_s^2 + \frac{K}{d_m}$

Par conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2} m_\alpha v_s^2 + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

Avec $v_s = d_m \dot{\theta}_s$ et la réponse précédente en S : $\dot{\theta}_s = -\frac{bv_0}{d_m^2}$, on peut écrire $v_s = -\frac{bv_0}{d_m}$

Ainsi $\frac{1}{2} m_\alpha \times \frac{b^2 v_0^2}{d_m^2} + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

Soit $\frac{1}{2} m_\alpha b^2 v_0^2 + K d_m = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 d_m^2$

Soit $d_m^2 - \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} d_m - b^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = \left(\frac{2K}{m_\alpha v_0^2} \right)^2 + 4b^2 > 0$

Racines : $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{2K}{m_\alpha v_0^2} \right)^2 + 4b^2}}{2} = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{m_\alpha v_0^2} \right)^2 + b^2}$

En ne gardant que la racine positive : $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m_\alpha b v_0^2}{K} \right)^2} \right)$

- R7. Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b . Pour cela, vous écrirez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K , d , m_α , $\vec{v}$ et $\vec{e}_r$. Projeter le P.F.D. sur l'axe x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x , et l'angle θ (Figure 1).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x , θ , $\dot{\theta}$, K , b , m_α et v_0 .

Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. On remarquera que $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \approx \varphi$.

En déduire que la relation qui lie φ et b : $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{b m_\alpha v_0^2}$

Solution: On applique le PFD à la particule alpha : $m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$

On le projette selon $\vec{e}_x : m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_x = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x$

avec $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos(\theta)$

et $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_x = \frac{d\vec{v} \cdot \vec{e}_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt}$ (le vecteur $\vec{e}_x$ est un vecteur constant).

On obtient donc : $m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{d^2} \cos(\theta)$

La conservation du moment cinétique permet d'exprimer d : $d^2 = -\frac{bv_0}{\dot{\theta}}$

Ainsi, on obtient $m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{bv_0} \dot{\theta} \cos(\theta)$

Que l'on peut intégrer par rapport au temps entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$:

$m_\alpha (v_x(\infty) - v_x(0)) = -\frac{K}{bv_0} (\sin(\theta(\infty)) - \sin(\theta(0)))$, car $\frac{d \sin(\theta)}{dt} = \dot{\theta} \cos(\theta)$

avec $v_x(0) = v_0$, $\theta(0) = \pi$, $\theta(\infty) = \varphi$,

pour $v_x(\infty) = v_0 \cos(\varphi)$, car par conservation de l'énergie mécanique, la norme du vecteur vitesse quand la particule se trouve très loin (à $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$) est la même.

Ainsi : $m_\alpha (v_0 \cos(\varphi) - v_0) = -\frac{K}{bv_0} \sin(\varphi)$

avec les formules de trigonométrie fournies par l'énoncé : $-2m_\alpha v_0 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{K}{bv_0} \times 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Soit $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{bm_\alpha v_0^2}$

On rappelle que : $\cos(\varphi) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin(\varphi) = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

R8. À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Solution: Les particules alpha rebondissent sur la feuille d'or quand φ devient supérieur à $\frac{\pi}{2}$

Dans le modèle de Jean Perrin, les électrons gravitent à très grande distance du noyau positif. Il y a donc beaucoup de vide entre le noyau et les électrons. Ainsi de très nombreuses particules α traversent sans rencontrer de noyau et donc sans être déviées. Seules les rares qui s'approchent très près d'un noyau sont déviées.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure de la dimension de ce noyau.

R9. Montrer que la relation qui lie d_m à φ est : $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

Solution:

D'après la question précédente : $\frac{m_\alpha b v_0^2}{K} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

Soit $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}\right) = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}\right) = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}\right)$

On obtient donc bien :
$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)$$

R10. Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ , la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K , m_α et v_0 .

Solution: La distance d'approche est minimale si $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ est maximal, soit pour $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

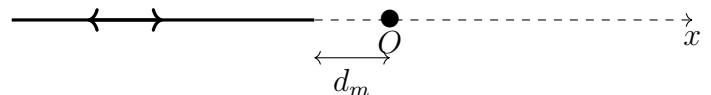
La distance d'approche est donc minimale pour $\boxed{\varphi_m = \pi}$

Dans ce cas, la distance minimale d'approche vaut
$$d_m = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2}$$

R11. Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau. Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m .

Solution:

Pour $\varphi = \varphi_m = \pi$, $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \rightarrow \infty$, donc $\boxed{b = 0}$



Cette distance d_m constitue une borne supérieure du noyau de l'atome, car dans le modèle de Jean Perrin le noyau est massif, donc la particule alpha ne peut pénétrer à l'intérieur.

L'énergie fournie permet de déterminer v_0 : $v_0 = \sqrt{\frac{2E_M}{m_\alpha}}$

Ainsi
$$d_m = \frac{K}{E_M} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_M} = 4,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$
, en prenant bien soin de convertir E_M en Joules.

R12. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Solution: D'après la formule précédente, plus l'énergie mécanique de la particule alpha est élevée plus la distance minimale d'approche est proche. Ainsi, afin de sonder les atomes et les noyaux (but de la physique nucléaire), il est nécessaire de disposer de particules de haute énergie.

Partie B Limite du modèle planétaire

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ (Figure ??). $\vec{e}_\theta$ est le vecteur tangent à la trajectoire du point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\vec{CM} = r\vec{e}_r$ et l'angle $\theta = (\vec{Cx}, \vec{CM})$.

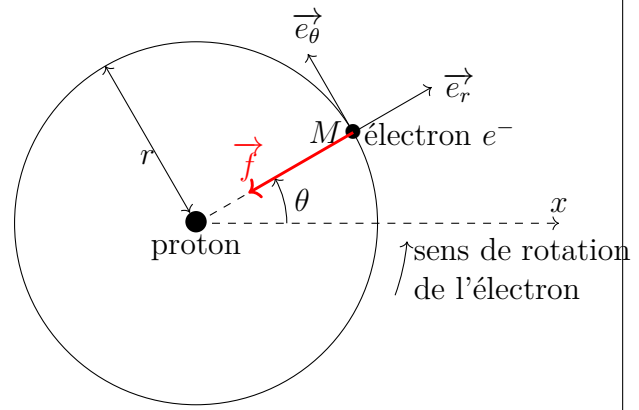
R13. 🎵 Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'électron en fonction de e , m_e , ϵ_0 , r et d'un vecteur unitaire.

Solution:

Système : électron de masse m_e et de charge $q = -e$

Référentiel : du laboratoire, lié au proton, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.

Actions mécaniques : force coulombienne exercée par le proton sur l'électron $\vec{f} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$



⚠ Remarque –

- Il faut MONTRER que le mouvement circulaire à force centrale est uniforme !
- Vecteur accélération sur un mouvement circulaire uniforme : $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$, notez la position du vecteur !!
- Le vecteur vitesse sur un mouvement circulaire est selon $\vec{u}_\theta$.
- Même si l'énoncé vous demandait d'établir $\vec{v}$, il ne faut pas écrire n'importe quoi pour y arriver directement ! Il fallait commencer, comme d'habitude, par établir la norme de $\vec{v}$, PUIS par exprimer le vecteur $\vec{v}$.

On applique le PFD à l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Or la trajectoire de l'électron est supposée circulaire, ainsi $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

En projetant le PFD selon $\vec{e}_r$, on trouve immédiatement $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$

L'électron évoluant dans le sens direct, $\dot{\theta} > 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta > 0$, donc $\boxed{\vec{v} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_\theta}$

R14. 🎵 Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = A.f(r)$ où A est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de e , ϵ_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que vous déterminerez également.

Solution: Énergie mécanique : $E_M = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m_e \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, soit $\boxed{E_M = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r}}$,

ce que l'on identifie avec la forme proposée avec $\boxed{A = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}}$ et $\boxed{f(r) = \frac{1}{r}}$

R15. Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \times \frac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

Solution: Exprimons la vitesse angulaire de l'électron : $\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$

Ainsi la puissance rayonnée s'exprime selon : $P(r) = \frac{e^2 r^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \times \frac{e^4}{4^2 \pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 r^6}$

Soit $P(r) = \frac{e^6}{192\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^3 r^4}$, qui est bien proportionnelle à $\frac{1}{r^4}$, avec $P_0 = \frac{e^6}{192\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^3}$

P est une puissance, donc P_0 est homogène à une puissance multipliée par une distance puissance 4, donc P_0 s'exprime en $\boxed{\text{W} \cdot \text{m}^4}$

L'électron rayonne, c'est-à-dire il perd de l'énergie, donc son énergie mécanique $E_M = -\frac{e^2}{8\pi\varphi_0 r}$ diminue, ce qui entraîne une diminution de r d'après la formule précédente.

R16. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$.

Solution: La loi de la puissance mécanique permet d'écrire que $\frac{dE_M}{dt} = -P(r)$ (la diminution de l'énergie mécanique est due à la puissance rayonnée, le « - » est là car l'électron reçoit algébriquement l'opposé de ce qu'il émet algébriquement)

Ainsi $\frac{d}{dt} \left(\frac{A}{r} \right) = -\frac{P_0}{r^4}$

Soit $\frac{-A}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{P_0}{r^4}$.

On obtient bien $\boxed{r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}}$

R17. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R . Donner l'expression, en fonction de P_0 , R et A , du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau.
On donne $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m, calculer t_f . Commenter le résultat obtenu.

Solution: On intègre l'équation différentielle précédente entre $(t = 0, r = R)$ et $(t = t_f, r = R_N)$, où R_N est le rayon du noyau :

$$\frac{R_N^3}{3} - \frac{R^3}{3} = \frac{P_0}{A} (t_f - 0)$$

Or le rayon initial $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$ m est environ 10^5 fois plus grand que le rayon R_N du noyau, nous pouvons donc négliger le terme R_N^3 devant R^3 (environ 10^{15} fois plus grand...).

Ainsi $\boxed{t_f = -\frac{AR^3}{3P_0}}$

En utilisant les expressions de A et P_0 : $t_f = -\frac{R^3}{3} \times \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{192\pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^3}{e^6}$, soit $\boxed{t_f = \frac{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^3 R^3}{e^4}}$

A.N. : $t_f = 2,1 \cdot 10^{-10}$ s

Dans le modèle classique, l'électron s'écraserait sur le noyau en un temps très court, donc l'atome ne serait stable qu'un temps très court. Le modèle classique n'est donc pas bon, car nous observons des atomes stables durant des temps très longs.

Partie C Postulats de N. Bohr

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par *Niels Bohr*. En 1913, ce dernier postule d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique), et d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme du moment cinétique L de l'électron par rapport au centre de l'atome :

$$L = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

où n est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.

R18. 🎵 Déterminer l'expression de son moment cinétique en fonction de r , e , m_e , ε_0 et $\vec{u}_z$.

Solution:

Moment cinétique par rapport au point O (localisé au niveau du noyau) : $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = m a \vec{u}_r \wedge v \vec{u}_\theta$

Soit $\vec{L}_O = m a v \vec{u}_z = e \sqrt{\frac{m a}{4\pi\varepsilon_0}} \vec{u}_z$

R19. 🎵 Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 \cdot n^2$.

Préciser l'expression de r_0 en fonction de ε_0 , h , m_e et e . Calculer la valeur de r_0 .

Solution:

$L_n = n\hbar = e \sqrt{\frac{m a_n}{4\pi\varepsilon_0}}$: la quantification du moment cinétique impose la quantification du rayon

Alors $a_n = n^2 \hbar^2 \times \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2 m}$, soit $a_n = n^2 a_0$, avec $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5,30 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ (avec $2\pi\hbar = h$)

R20. 🎵 Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$. Préciser l'expression de E_0 en fonction de ε_0 , h , m_e et e .

Calculer, en électronvolt, la valeur de E_0 . Que représente physiquement E_0 ?

Solution: Énergie mécanique : $\mathcal{E}_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \times \frac{\pi e^2 m}{\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}$

Ainsi $\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}$, avec $\mathcal{E}_0 = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2} = \frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{2\varepsilon_0 \hbar} \right)^2 = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$

E_0 correspond à l'énergie de première ionisation de l'hydrogène : il faut fournir 13,6 eV pour arracher l'électron de l'attraction du noyau d'hydrogène.

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

R21. Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de Rydberg-Ritz : $\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]$ avec $n_i > n_f$.

R_H est la constante de Rydberg.

Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0 , h et c . Indiquer sa valeur et son unité.

Solution: Quand l'électron se désexcite du niveau n_i au niveau n_f il émet un photon d'énergie égale à l'écart d'énergie entre les deux niveaux :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{photon}} &= \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f \\ h\nu &= -\frac{\mathcal{E}_0}{n_i^2} + \frac{\mathcal{E}_0}{n_f^2} \\ \frac{hc}{\lambda} &= \mathcal{E}_0 \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right] \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{\mathcal{E}_0}{hc} \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right]\end{aligned}$$

On identifie $R_H = \frac{\mathcal{E}_0}{hc} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

R22. Les raies de la série de Lyman sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ($n_f = 1$). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121,5 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 102,5 \text{ nm}$; $\lambda_3 = 97,2 \text{ nm}$.

À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de Rydberg. Conclure.

Solution: Ces longueurs d'onde sont inférieures à 400 nm, elles sont donc situées dans l'ultraviolet.

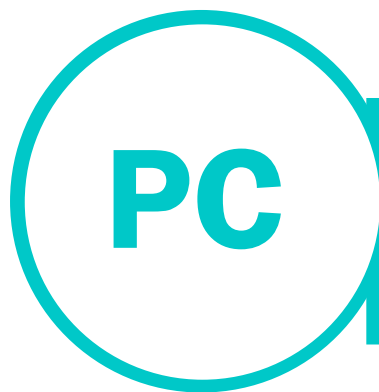
Soit $n_f = 1$, $n_i = 2$: $R_H = \frac{1}{\lambda_1 \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right]} = \frac{4}{3\lambda_1} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Soit $n_f = 1$, $n_i = 3$: $R_H = \frac{1}{\lambda_2 \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} \right]} = \frac{9}{8\lambda_2} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Soit $n_f = 1$, $n_i = 4$: $R_H = \frac{1}{\lambda_3 \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{4^2} \right]} = \frac{16}{15\lambda_3} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Aux arrondis près (à 10^{-3} près), on obtient la valeur de R_H obtenue théoriquement.

Le modèle développé ici est confirmé par l'expérience.



CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE PHYSIQUE

1/ REMARQUES GÉNÉRALES

1.1- PRÉSENTATION DU SUJET

Cette année, le sujet de physique de la filière PC était constitué, pour la deuxième fois, d'un unique problème. Il abordait certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX^e siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome.

Il était composé de six parties indépendantes et comportait 49 questions qui permettaient de « balayer » la mécanique, l'électromagnétisme, l'optique, la physique quantique et le bon sens... La variété des termes abordés devait permettre à une majorité de candidats d'obtenir une note honorable, ce qui n'a pas été le cas. Cependant, ce problème devait « classer » correctement les candidats car se côtoyaient de nombreuses questions de cours très simples et des questions plus délicates.

Dans la **partie I**, on s'intéressait à l'expérience de *E. Rutherford*, qui conduisit à abandonner le modèle de *J. J. Thomson* au profit de celui de *J. Perrin*. Les limites de ce modèle faisaient l'objet de la **partie II**, limites qui étaient partiellement levées dans la **partie III** avec les postulats de *N. Bohr*. L'expérience historique de *O. Stern* et *W. Gerlach*, décrite dans la **partie IV**, apportait la preuve de l'existence d'un moment magnétique propre de l'électron. Et dans la **partie V**, on voyait de quelle manière l'interprétation première de cette expérience a été mise en défaut avec l'effet Zeeman. La mécanique quantique, qui apporte à ce jour la description la plus complète de l'atome, était abordée dans la **partie VI** avec l'étude du mouvement de l'électron d'un atome d'hydrogène à partir de l'équation de *E. Schrödinger*.

Dans ce problème, plusieurs résultats étaient fournis à des endroits « stratégiques » pour permettre au candidat d'aller plus loin et de montrer un plus vaste champ de ses compétences et savoirs. Mais attention, comme les années précédentes, nous avons constaté chez de nombreux candidats un manque de rigueur dans les calculs, sans doute accentué par le fait qu'ils savent par avance le résultat à obtenir. Cela a même conduit à des tentatives très malvenues de « passage en force » pour obtenir le résultat. L'honnêteté qui consiste à constater que le calcul n'aboutit pas au résultat demandé est toujours préférable. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que, dans le barème, des points sont prévus pour les étapes intermédiaires au sein d'une question. **Attention, les correcteurs lisent avec attention la totalité des réponses écrites.**

De plus, si les candidats ont compris que les différentes parties étaient indépendantes, ils n'ont pas toujours vu que de nombreuses questions étaient abordables, même si les précédentes étaient fausses ou non traitées.

Par ailleurs, certains candidats esquivent systématiquement les applications numériques et se privent de points souvent faciles à avoir.

Il y a eu d'excellentes copies, plus que les années précédentes, dans lesquelles chacune des parties a été abordée, avec des notes supérieures à 15. En revanche, il y a aussi eu un nombre non négligeable de copies avec une note inférieure à 2 et très peu de questions abordées ou bien avec des réponses complètement farfelues. Pour les copies les plus faibles, on remarque qu'il n'y a pas eu de stratégie

d'évitement de certaines notions. On note toujours que les étudiants semblent avoir des difficultés à restituer leurs connaissances de première année.

1.2- PROBLÈMES CONSTATÉS PAR LES CORRECTEURS

Des notions très basiques de première année ne sont pas du tout maîtrisées par certains candidats. Pêle-mêle, on pourra citer la définition du moment cinétique (confondu avec le moment d'une force), la projection d'un simple vecteur unitaire dans une autre base, la loi de Coulomb, le calcul d'une énergie potentielle, le calcul de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel dans une base polaire, l'expression de la longueur d'onde de De Broglie etc.

On peut regretter que certains candidats n'aient pas le moindre recul et le moindre regard critique quant aux ordres de grandeur. Ceci est flagrant à propos du calcul du rayon de Bohr, de l'énergie du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène ou de la distance minimale d'approche de la particule alpha dans l'expérience de Rutherford.

Dans la partie III, l'expression de la vitesse et de l'énergie de l'électron sur une orbite circulaire a été donnée en préambule. Il s'agissait en fait de la réponse aux questions **Q13** et **Q14**. Beaucoup de candidats se sont ainsi arrangés sans la moindre vergogne pour retrouver ces résultats malgré des calculs intermédiaires absolument faux.

De façon générale, une bonne connaissance du cours et une bonne maîtrise des méthodes vues en TD restent les clés de la réussite pour une telle épreuve. Or, il est fréquent de voir des lacunes, parfois grossières, sur le cours de physique, de niveau PCSI comme de niveau PC.

Nous avons noté cette année, pour un nombre important de candidats, une non-maîtrise de savoirs mathématiques : produit vectoriel, mélanges scalaires/vectoriels, projection de vecteur,... Sur le plan mathématique, des erreurs d'étourderie pourraient être évitées, par une plus grande relecture ou de l'analyse dimensionnelle, ou même simplement avec du bon sens. Il faut néanmoins rappeler que l'analyse dimensionnelle ne peut faire office de démonstration (sauf si la question la demande explicitement).

Par ailleurs, il faut être particulièrement attentif aux unités et au respect de l'homogénéité des expressions. Il a aussi été noté **un manque de rigueur scientifique dans l'expression écrite**. Beaucoup de candidats rencontrent des **difficultés de rédaction et ont du mal à communiquer** : vocabulaire inadapté, explications embrouillées, etc. Certains ont aussi répondu « à côté » de la question sans doute parce qu'ils l'avaient mal lue, ce qui est dommage car il y avait de très nombreux points à obtenir pour qui savait lire correctement un énoncé... À noter que beaucoup d'étudiants paraphrasent la question posée, sans vraiment y répondre, ce qui ne donne pas de points (**Q1, Q27, Q41**).

Les correcteurs notent une bonne qualité générale des présentations des copies. Mais attention, certains ont une écriture minuscule et illisible qu'il faut, bien évidemment, s'attacher à bannir. Quelques copies ressemblent encore à des brouillons, leur rareté soulignant encore plus ce manque de soin.

La rédaction est trop souvent réduite à sa plus simple expression. **Il est regrettable de constater que de nombreux candidats se permettent de répondre à une question par l'écriture d'une relation sans aucun commentaire ou justification**. Le barème 2019 a tenu compte, comme l'année précédente, de la qualité de présentation et de rédaction des copies. Il faut penser à écrire lisiblement et éviter les ratures « à tout va » (utiliser des brouillons). Pour les prochaines sessions du concours, il importe de maintenir la qualité de présentation des copies et d'améliorer leur rédaction (la communication écrite est au cœur du métier d'ingénieur). Ces dernières remarques sont identiques à celles du rapport des deux dernières années.

La correction des copies a fait ressortir un certain nombre d'erreurs récurrentes qui font l'objet de l'analyse détaillée ci-après.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

PARTIE I - LIMITE DU MODÈLE DE J. J. THOMSON À TRAVERS L'EXPÉRIENCE DE E. RUTHERFORD

Cette première partie montrait la mise en défaut du modèle de Thomson par l'expérience de Rutherford. Il s'agissait principalement d'interpréter la rétrodiffusion de particules alpha à proximité d'un noyau atomique. Cette partie faisait appel essentiellement à des notions de mécanique de première année (moment cinétique, énergie et lois de conservation en mouvement à force centrale).

Q1. Peu de bonnes réponses argumentées. Une majorité se contente de redécrire le phénomène sans argumenter et en affirmant l'incompatibilité. Nous avons pu observer que certains candidats transforment le faisceau de particules alpha en « faisceau d'atomes », voire en « faisceau d'électrons », avec, à la clé, des descriptions fantaisistes de l'expérience.

Q2. Ne pas connaître correctement la force d'interaction coulombienne, avec signes et vecteurs justes, est navrant. Beaucoup de confusion ou d'incompréhension sur les concepts de force centrale, force conservative. Concernant les lois de conservation, on attend du candidat qu'il attache à chaque loi une propriété bien précise et non pas qu'il donne une réponse générale : force centrale/newtonienne conservative. C'est ici uniquement le caractère central de la force qui implique la conservation du moment cinétique et le caractère conservatif qui implique la conservation de l'énergie mécanique. Certains candidats ont en revanche pris le soin d'argumenter à partir du théorème du moment cinétique. Parfois, on trouve une erreur dans la primitive pour calculer l'énergie potentielle dont elle dérive.

Q3. La question était claire : on demandait une expression en fonction de m_α et v_0 , on a pourtant souvent vu des réponses avec le terme en K/d (nul à l'infini comme spécifié dans le sujet).

Q4. Formule du moment cinétique parfois non connue ou fausse (des erreurs de signe dans le produit vectoriel, introduction d'un moment d'inertie, ou pire : $\vec{L}_0 = \overline{OM} \wedge E_c \dots$).

Q5. Les candidats ont parfois été gênés par le signe « moins » du moment cinétique initial, certains ont tenté de s'en débarrasser en conservant la norme du moment cinétique. Rappelons que la plupart des grandeurs physiques scalaires sont algébriques, et que leur signe (apparent ou pas) a une signification physique.

Q6. Cette question et la suivante, qui étaient classiques il y a une vingtaine d'années, sont maintenant assez difficiles pour des candidats moyens, beaucoup sautant les questions 7 à 12 pour reprendre à la **Q13**. Bien traitée en général pour ceux qui ont bien traité **Q4** et **Q5**.

Q7. Question très guidée pour laquelle certains obtiennent un résultat juste à partir de résultats intermédiaires faux. On a vu des projections du vecteur vitesse selon l'axe (Ox) écrites sous la forme $v_x \cdot \cos \theta$ ce qui montre que le candidat ne sait pas ce que représente une composante d'un vecteur.

Q8. Peu d'explications convaincantes de l'interprétation des observations de Rutherford : les candidats ne font pas le lien entre le paramètre d'impact b lié à la position du noyau relativement à la direction de la particule alpha à l'infini et la déviation. Ils font plutôt souvent référence à la dépendance de φ avec la vitesse incidente v_0 , qui est pourtant la même pour toutes les particules.

Q10. Des calculs de dérivée fastidieux et inutiles. On voit des réponses $\varphi = -\pi$ sans aucun sens physique et qui conduisent à $dm = 0$!

Q11. $b = 0$ a beaucoup gêné les candidats et leur dessin montrait une particule déviée ne revenant pas sur elle-même...

Q12. Peu d'applications numériques.

PARTIE II - LIMITE DU MODÈLE PLANÉTAIRE

La seconde partie montrait la limite du modèle planétaire de Rutherford par la prise en compte de la puissance dissipée par rayonnement par l'électron chargé qui gravite autour du noyau. Les questions portaient aussi ici sur les mouvements à force centrale.

Q13. Des candidats y arrivent (réponse donnée dans la partie suivante) mais que d'horreurs alors que toute cette partie est abordée en première année ! On voit encore des intégrations directes de la force comme si celle-ci était constante et pour certains, ils orientent $\vec{v}$ selon $\vec{e}_r$! Bien que pas au programme, des candidats passent à juste titre par l'accélération dans la base de Frenet.

Q14. Une question assurément bien travaillée en classe compte tenu de son taux de réussite.

Q15. L'analyse dimensionnelle élémentaire demandée n'a souvent pas été correctement traitée. On voit des décompositions surprenantes (voire délirantes) en unités du système international pour donner l'unité de P_0 alors qu'il était beaucoup plus simple de passer plutôt par l'expression de $P(r)$.

Peu de justifications convaincantes sur la diminution du rayon. Beaucoup écrivent que c'est parce que $P(r)$ augmente au cours du temps, ce qui dénote une confusion entre une grandeur (l'énergie) et sa variation (la puissance). On retrouve cette confusion à la question 31.

Quelques « démonstrations » expliquant que l'énergie mécanique de l'électron devait se conserver...

Q16. Oubli souvent du signe moins : $P(r) > 0$ est définie comme la puissance moyenne cédée par le système. Du coup, des oublis « malencontreux » du même signe dans le calcul de la différentielle de E_M pour retrouver le bon résultat. De nombreux candidats arrivent au bon résultat après une double erreur de signe...

Q17. Peu d'applications numériques.

PARTIE III - POSTULATS DE N. BOHR

La troisième partie était consacrée à l'atome de *Bohr* avec quelques questions autour de notions vues en première année sur le monde quantique (onde de matière de *De Broglie*, transitions entre niveaux énergétiques...).

De nombreux points ont été gagnés sur cette partie même si les questions étaient traitées partiellement.

Q18. La plupart des étudiants connaissent bien le rayon de Bohr. Question presque toujours traitée de la bonne manière. Cependant, de nombreux candidats ne semblent pas savoir utiliser leur calculatrice en notation scientifique car ils écrivent « que sur leur calculatrice, r_0 et E_0 (**Q20**) sont quasi-nuls ».

Q19. Inégalement traitée.

Q20. La valeur de E_0 est bien connue.

Q21. Souvent bien traitée, même si plusieurs candidats trouvent une valeur négative de la constante de Rydberg.

Q22. Plusieurs candidats trouvent les bons résultats mais oublient de confirmer la validité du modèle. Les ultraviolets ne s'imposent pas à tous !