

? À rendre MERCREDI 29 avril 2026

Devoir Maison n°17 – Machines thermiques – Corrigé

Exercice n°1 Moteur de Stirling

Partie A Description du moteur

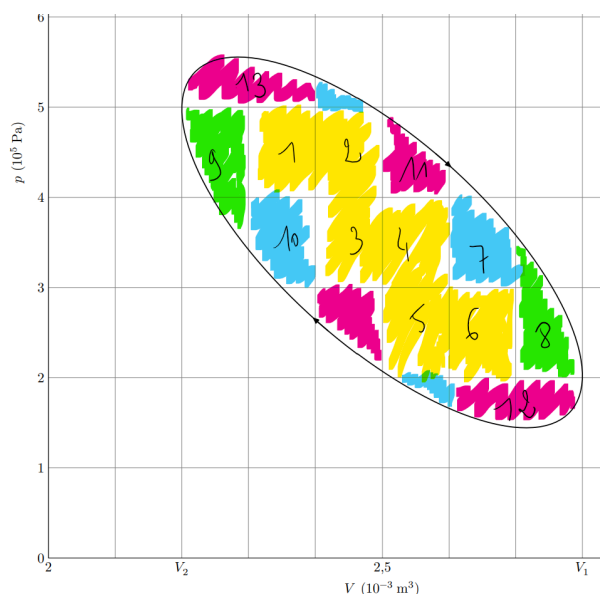
Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1 , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2 . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement. Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure ?? du document réponse.

R1. Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Solution: L'aire sous la courbe du cycle est positive, donc le travail algébriquement reçu par le gaz sur un cycle est négatif. Le gaz fournit réellement du travail mécanique au milieu extérieur, c'est donc bien un moteur.

R2. Estimer graphiquement la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

Solution: Pour estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle, il faut déterminer l'aire du cycle.



Chaque carreau est d'une surface $A = 10^5 \times 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10 \text{ J}$

Ainsi l'aire totale est d'environ 130 J

Le travail fourni par le moteur pendant un cycle est de l'ordre de $W_{\text{fourni}} = 130 \text{ J}$

Partie B Modélisation du cycle

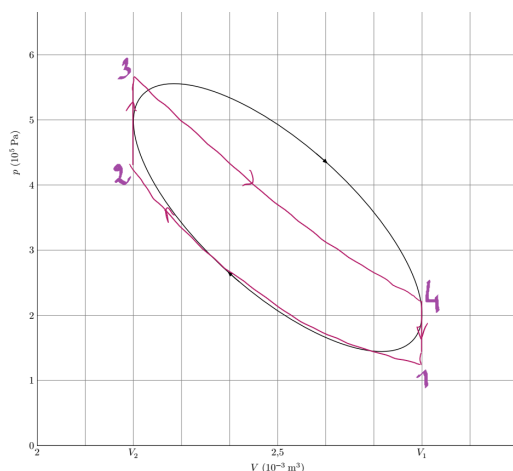
On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

- une compression ($1 \rightarrow 2$) isotherme réversible à la température T_1 ,
- un échauffement ($2 \rightarrow 3$) isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3 ,
- une détente ($3 \rightarrow 4$) isotherme réversible à la température T_3 ,
- un refroidissement ($4 \rightarrow 1$) isochore jusqu'à l'état 1 .

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

R3. Représenter sur la figure ?? du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

Solution:



On note $r = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant d'un gaz de n moles de gaz parfait vaut $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits.

R4. Exprimer W_{12} , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n, R, T_1 et r . En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n, R, T_1 et r . Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12} .

Solution: Travail des forces de pression sur $1 \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{V_1}^{V_2} -P dV \\ &= \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT_1}{V} dV \\ &= -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned}$$

$W_{12} = nRT_1 \ln(r) > 0$ Au cours de cette compression, le gaz reçoit réellement du transfert thermique.

D'après le 1^{er} principe sur la transformation $1 \rightarrow 2$: $\Delta_{12}U = W_{12} + Q_{12}$

Or $\Delta_{12}U = 0$, donc $Q_{12} = -W_{12} = -nRT_1 \ln(r) < 0$. Au cours de la compression isotherme, le gaz libère réellement du transfert thermique au milieu extérieur.

R5. Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ . Préciser son signe.

Solution: Au cours de la compression isochore : $W_{23} = 0$

D'après le premier principe sur la transformation $2 \rightarrow 3$:

$Q_{23} = \Delta_{23}U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_2) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1) > 0$, puisque $T_3 > T_1$. Le gaz reçoit réellement du transfert thermique au cours de l'échauffement.

- R6. Exprimer W_{34} , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n, R, T_3 et r . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n, R, T_3 et r . Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .

Solution: De la même façon que sur la transformation $1 \rightarrow 2$: $W_{34} = -nRT_3 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = -nRT_3 \ln(r) < 0$

Au cours d'une détente, le gaz fournit réellement du travail au milieu extérieur

et de la même façon : $Q_{34} = nRT_3 \ln(r) > 0$ Au cours de la détente isotherme, le gaz reçoit réellement du transfert thermique.

- R7. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ . Préciser son signe.

Solution: De la même façon que sur la transformation $2 \rightarrow 3$:

$Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_4) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_3) < 0$ Le gaz libère du transfert thermique au cours du refroidissement.

Partie C Rendement du moteur

- R8. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de T_1, T_3, r et γ .

Solution: Le rendement du moteur est défini comme le rapport du travail fourni par le gaz sur un cycle sur le transfert thermique reçu de la part de la source chaude. Le contact avec la source chaude a lieu sur les transformations $2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 4$, qui sont les deux transformations au cours desquelles le gaz reçoit réellement du transfert thermique.

Ainsi

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{23} + Q_{34}} \\ &= \frac{-W_{12} - W_{34}}{Q_{23} + Q_{34}} \\ &= \frac{-nRT_1 \ln(r) + nRT_3 \ln(r)}{\frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1) + nRT_3 \ln(r)} \\ &= \frac{(T_3 - T_1) \ln(r)}{\frac{T_3 - T_1}{\gamma - 1} + T_3 \ln(r)} \end{aligned}$$

Enfin : $\eta = \frac{(T_3 - T_1) \ln(r)}{\frac{T_3 - T_1}{\gamma - 1} + T_3 \ln(r)}$

R9. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3 .

Solution: Le rendement de Carnot est le rendement maximal d'un moteur ditherme fonctionnant de façon réversible entre les mêmes deux sources de chaleur : la source chaude est de température T_3 , et la source froide est de température T_1 .

Premier principe sur un cycle : $\Delta U = Q_c + Q_f + W_{\text{cycle}}$

Or U est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi, donc $\Delta U = 0$

Soit $Q_c + Q_f + W_{\text{cycle}} = 0$ (1)

Deuxième principe sur un cycle : $\Delta S = \frac{Q_c}{T_3} + \frac{Q_f}{T_1} + S_{\text{créée}}$

Or S est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi, donc $\Delta S = 0$

De plus, sur un cycle réversible $S_{\text{créée}} = 0$, donc $\frac{Q_c}{T_3} + \frac{Q_f}{T_1} = 0$ (2)

(1) : $Q_f = -W_{\text{cycle}} - Q_c$ (1')

(1') dans (2) : $\frac{Q_c}{T_3} - \frac{Q_c}{T_1} - \frac{W_{\text{cycle}}}{T_1} = 0$

Soit : $\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1} + \underbrace{\left(\frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_c} \right)}_{r_C} \frac{1}{T_1} = 0$

Soit $r_C = 1 - \frac{T_1}{T_3}$

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore ($4 \rightarrow 1$) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore ($2 \rightarrow 3$). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

R10. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Solution: Dans ce cas, le transfert thermique Q_{23} ne coûte rien puisqu'il vient du refroidissement du gaz.

Ainsi $\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{34}} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$: il est égal au rendement de Carnot.

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30% et 50% de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

R11. En prenant une température chaude de 640°C et une température froide de 60°C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Solution: Calculons le rendement de Carnot de ce moteur : $r_C = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{273 + 60}{273 + 640} = 0,64$

$\mathcal{P}_{\text{méca}} \approx \mathcal{P}_{\text{élec}} = 180 \text{ W}$

Or $\eta = 0,50 r_C$ et $\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{P}_{\text{th}}}$

Ainsi $\mathcal{P}_{\text{th}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{élec}}}{0,50 r_C} = 567 \text{ W}$

Exercice n°2 Utilisation d'une pompe à chaleur

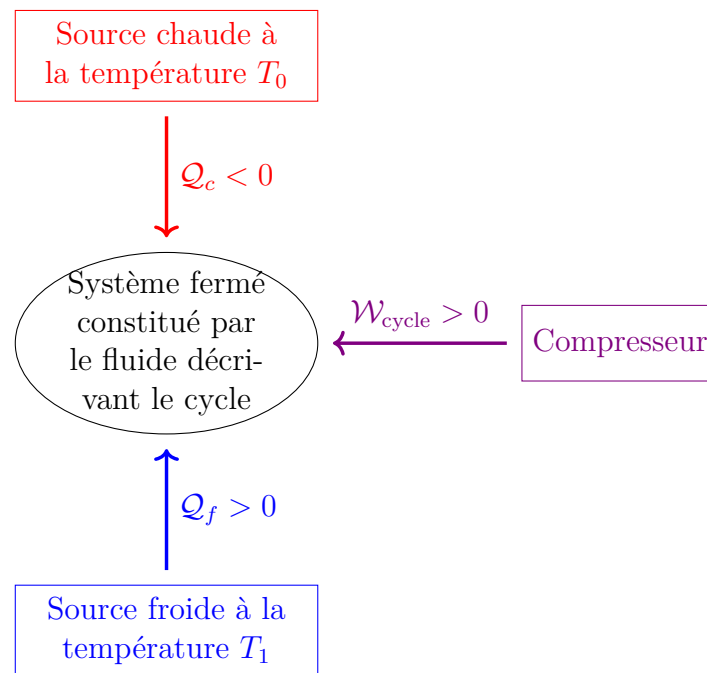
L'intérieur de la maison est chauffé grâce à une pompe à chaleur cyclique ditherme, ce qui permet notamment de compenser les pertes thermiques de la maison. L'intérieur de la maison tient lieu de source chaude à la température T_0 et l'extérieur de la maison tient lieu de source froide à la température T_1 .

Le système considéré est alors le fluide caloporteur contenu dans la pompe à chaleur. Les transformations qu'il subit sont supposées réversibles.

On suppose pour le moment qu'il n'y a aucune perte thermique entre la maison et l'extérieur.

- R1. Faire un schéma de principe de la pompe à chaleur en représentant le système fluide, la source chaude, la source froide, le travail W fourni au fluide par le moteur de la pompe à chaleur et les transferts thermiques Q_C et Q_F , reçus algébriquement par le fluide de la part, respectivement, de la source chaude et de la source froide. On précisera le signe de ces transferts algébriques.

Solution:



- R2. L'efficacité ε d'une pompe à chaleur est donnée par le rapport $\varepsilon = \frac{-Q_C}{W}$. Justifier cette expression.

Solution: L'énergie utile, fournie à la source chaude est $-Q_C$, l'énergie couteuse fournie au fluide est le travail W , d'où la définition de ε .

- R3. Exprimer l'efficacité de la pompe à chaleur en fonction de T_0 et T_1 . Calculer numériquement ε .

Solution: Le cycle est réversible : c'est le cycle de Carnot.

$$\text{D'après les deux principes écrits sur un cycle (réversible)} \quad \begin{cases} Q_c + Q_f + W_{\text{cycle}} = 0 & (1) \\ \frac{Q_c}{T_0} + \frac{Q_f}{T_1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : Q_f = -Q_c - W_{\text{cycle}}, \text{ que l'on injecte dans } (2) : \frac{Q_c}{T_0} - \frac{Q_c}{T_1} - \frac{W_{\text{cycle}}}{T_1} = 0$$

$$\text{Soit } \underbrace{\frac{Q_c}{W_{\text{cycle}}}}_{-\varepsilon} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) = \frac{1}{T_1}$$

$$\text{Soit } \boxed{\varepsilon = \frac{T_0}{T_0 - T_1} = 19,5}$$

Le système pris en compte maintenant est l'air contenu à l'intérieur de la maison. On ne considère comme échanges d'énergie que le transfert thermique Q_C apporté par la pompe à chaleur et le transfert thermique Q' dû aux déperditions d'énergies.

On ne considère plus le régime comme stationnaire. On cherche ici à évaluer les pertes thermiques.

On note $\delta Q' = -aC(T - T_1)dt$ le transfert thermique algébrique et élémentaire avec l'extérieur pendant dt , avec C la capacité thermique de la pièce et a une constante positive.

La température de la pièce étant initialement T_0 , la pompe est arrêtée. La pièce se refroidit et la température tombe à $T_f = 15^\circ\text{C}$ au bout de 3 heures.

R4. Commenter le signe de $\delta Q'$. Qui reçoit effectivement ce transfert thermique ? Déterminer l'unité de a .

Solution: L'intérieur de la maison est à la température T supérieure de celle de l'extérieur T_1 , par conséquent $\delta Q' < 0$: l'air de la maison reçoit donc un transfert thermique négatif, c'est donc l'air extérieur qui reçoit réellement du transfert thermique.

$C(T - T_1)$ est homogène à une énergie, tout comme $\delta Q'$, donc a est homogène à l'inverse d'un temps, et s'exprime donc en s^{-1} .

R5. En appliquant le premier principe infinitésimal à l'intérieur de la maison, la pompe à chaleur étant éteinte, montrer qu'on obtient une équation différentielle du premier ordre sur la température de la forme

$$\frac{dT}{dt} + aT(t) = B$$

avec B une constante à déterminer.

Solution: On étudie la pièce de capacité thermique C entre t et $t + dt$.

D'après le premier principe infinitésimal, la pompe à chaleur étant éteinte, seule le transfert thermique $\delta Q'$ est reçu par la pièce :

$$\begin{aligned} dU &= \delta W + \delta Q' \\ dU &= \underbrace{\delta W_P}_{=0 \text{ (isochore)}} + \delta Q' \\ C \frac{dT}{dt} dt &= -aC(T - T_1)dt \\ \frac{dT}{dt} + aT &= aT_1 \end{aligned}$$

R6. Résoudre cette équation pour exprimer l'évolution de $T(t)$.

Solution: C'est une équation du premier ordre, dont la solution générale s'écrit $T(t) = Ke^{-at} + T_1$

Or $T(0) = T_0$, donc $K = T_0 - T_1$

Soit $T(t) = (T_0 - T_1)e^{-at} + T_1$

R7. En déduire l'expression de a . Faire l'application numérique.

Solution: D'après l'énoncé, à l'instant $t_f = 3 \text{ h}$:

$$\begin{aligned} T(t_f) = T_f &= (T_0 - T_1)e^{-at_f} + T_1 \\ \frac{T_f - T_1}{T_0 - T_1} &= e^{-at_f} \\ a &= -\frac{1}{t_f} \ln \frac{T_f - T_1}{T_0 - T_1} \end{aligned}$$

$$\text{soit } a = \frac{1}{t_f} \ln \frac{T_0 - T_1}{T_f - T_1} = 0,135 \text{ h}^{-1} = 3,75 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Le régime transitoire est donc de durée caractéristique de l'ordre de quelques $\tau = \frac{1}{a} = 7,4 \text{ h}$

Une fois la température T_f atteinte, on met de nouveau en marche la pompe à chaleur. La température $T(t)$ dans la pièce évolue au cours du temps.

On note la durée dt d'un cycle, qui est suffisamment courte pour pouvoir considérer qu'à l'échelle du cycle la température de la pièce n'a pas évolué.

R8. Donner la relation liant la puissance $\mathcal{P}$ développée par le moteur de la pompe au travail δW fourni par celui-ci pendant une durée dt .

Solution: Par définition $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt}$

R9. Établir l'expression du transfert thermique δQ_C reçu par le fluide de la pompe à chaleur sur un cycle en fonction de ε , $\mathcal{P}$ et dt , puis en fonction de T , T_1 , $\mathcal{P}$ et dt .

Solution: Le fonctionnement de la pompe étant toujours supposé réversible, sur un cycle (entre t et $t + dt$) : $\varepsilon = \frac{-\delta Q_C}{\delta W} = \frac{T}{T - T_1}$, avec T la température à l'instant t dans la pièce.

$$\text{Soit } \frac{-\delta Q_C}{\mathcal{P} dt} = \frac{T}{T - T_1}$$

$$\text{Soit } \delta Q_C = -\varepsilon \mathcal{P} dt = -\frac{T}{T - T_1} \mathcal{P} dt$$

R10. Déterminer la nouvelle équation différentielle portant sur $T(t)$ en appliquant le premier principe infinitésimal et montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} + aT - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T}{T - T_1} = aT_1$$

Solution: La pompe à chaleur fonctionne et reçoit le transfert thermique δQ_C de la part de la pièce. Par conséquent, la pièce reçoit le transfert thermique $-\delta Q_C$ de la part de la pompe à chaleur. D'après le premier principe infinitésimal :

$$\begin{aligned} dU &= \delta W + \delta Q' - \delta Q_C \\ C \frac{dT}{dt} dt &= 0 - aC(T - T_1)dt + \frac{T}{T - T_1} \mathcal{P} dt \\ \frac{dT}{dt} &= -a(T - T_1) + \frac{T}{T - T_1} \frac{\mathcal{P}}{C} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \frac{dT}{dt} + aT - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T}{T - T_1} = aT_1$$

R11. Déterminer l'équation vérifiée par T_∞ en régime permanent (en supposant qu'il existe).

En déduire que la puissance doit valoir $\mathcal{P} = aC \frac{(T_0 - T_1)^2}{T_0}$ pour que la température T_∞ soit égale à T_0 .

Solution: En régime permanent, $T = T_\infty$ ne dépend pas du temps.

$$\begin{aligned} aT_\infty - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T_\infty}{T_\infty - T_1} &= aT_1 \\ a(T_\infty - T_1) - \frac{\mathcal{P}}{C} \frac{T_\infty}{T_\infty - T_1} &= 0 \\ a(T_\infty - T_1)^2 - \frac{\mathcal{P}}{C} T_\infty &= 0 \\ aT_\infty^2 - \left(2aT_1 + \frac{\mathcal{P}}{C}\right) T_\infty + aT_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

$T_\infty = T_0$, à condition que

$$\begin{aligned} a(T_0 - T_1)^2 - \frac{\mathcal{P}}{C} T_0 &= 0 \\ \mathcal{P} &= \frac{Ca(T_0 - T_1)^2}{T_0} \end{aligned}$$

R12. Rappeler le principe de la méthode d'Euler pour résoudre numériquement des équations différentielles du premier ordre.

Solution: La méthode d'Euler est une méthode de résolution numérique d'une équation différentielle du premier ordre. On effectue une approximation au premier ordre pour déterminer, à partir de la condition initiale, les valeurs approchées de la température.

R13. Écrire l'équation différentielle sous la forme $\frac{dT}{dt} = f(T)$, et identifier la fonction f .

Solution: $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_1) + \frac{T}{T - T_1} \frac{\mathcal{P}}{C}$, donc $f : T \mapsto -a(T - T_1) + \frac{T}{T - T_1} \frac{\mathcal{P}}{C}$

L'intervalle de résolution est découpée en n intervalles de largeur h . On note T_i la température à l'instant t_i , avec $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

R14. Établir la relation de récurrence reliant T_{i+1} à T_i pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ dans le cadre de la méthode d'Euler.

Solution: Pour n intervalles de résolution, il y a $n+1$ instants de résolution, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Exprimons $T(t+h)$ à l'instant $t+h$ au premier ordre en h :

$$\begin{aligned} T(t+h) &= T(t) + \frac{dT}{dt} \times h + o(h) \\ T(t+h) &= T(t) + f(T(t)) \times h + o(h) \\ T(t+h) &= T(t) + \left(-a(T(t) - T_1) + \frac{T(t)}{T(t) - T_1} \frac{\mathcal{P}}{C} \right) \times h + o(h) \end{aligned}$$

En notant T_i la température à l'instant t_i , alors $T(t+h)$ est notée T_{i+1} .

$$T_{i+1} \approx T_i + \left(-a(T_i - T_1) + \frac{T_i}{T_i - T_1} \frac{\mathcal{P}}{C} \right) \times h$$

R15. Recopier et compléter le code ci-dessous. On suppose que toutes les constantes : **a**, **C**, **P**, **Tf**, **T0** et **T1** ont été définies, ainsi que les instants de début **t0** et de fin **tf** de résolution, et le nombre d'intervalles **n** de résolution.

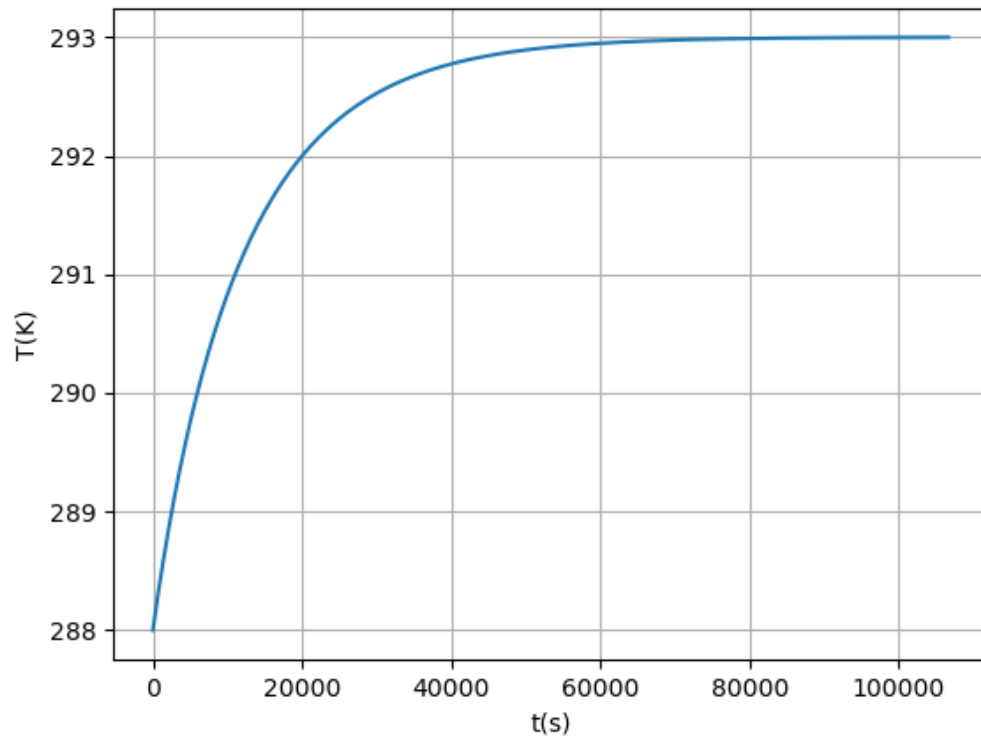
Solution: Code complet qui permet de tracer la courbe ci-dessous

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 # paramètres physiques du problème :
3 a=0.135/3600 # constante positive (en s-1)
4 C=3*10**5 # J/K
5 T0=293 # K : température voulue dans la maison
6 Tf=288 # K : température initiale
7 T1=278 # K : température extérieure
8 P=a*C*(T0-T1)**2/T0 # W
9 tau=1/a
10
11 # paramètres de résolution
12 t0=0
13 tf=4*tau
14 n=10000 # nombre d'intervalles de résolution
15 h=(tf-t0)/n # pas
16
17 # résolution avec Euler
18 Ti=Tf # température initiale
19 T=[Ti] # initialisation de la liste des températures
20 for i in range(0,n): # calcul des températures aux n instants suivants
21     (n intervalles => n+1 instants au total)
22     Ti=Ti+(a*(T1-Ti)+P/C*Ti/(Ti-T1))*h # relation de récurrence
23     T.append(Ti) # ajout à la liste des températures
24
25 # Tracé graphique
26 t=[t0+i*h for i in range(n+1)] # n+1 instants de résolution
27 plt.plot(t,T)
28 plt.xlabel('t(s)')
29 plt.ylabel('T(K)')
30 plt.grid()
31 plt.show()

```

R16. Commenter la courbe obtenue :



Solution: L'évolution de la température ressemble à une exponentielle croissante, mais ça n'en est pas une puisque l'équation différentielle n'est pas du type $y' + ay = b$ avec a une constante.

Après un régime transitoire de 60 000 s, soit 42h, la température se stabilise à 20 °C, qui est la température souhaitée pour laquelle on a choisie la puissance $\mathcal{P}$. À cette température, la puissance fournie par la pompe à chaleur compense les pertes par les murs.