

? À rendre MERCREDI 6 mai 2026

Devoir Maison n°18 — Rotation d'un solide — Corrigé

Exercice n°1 Utilisation de l'énergie houlomotrice

On modélise ce dispositif par un pendule pesant composé d'un solide S en rotation autour de l'axe Oy et complètement immergé dans l'eau. Le pendule est fixé au sol (au fond de la mer) par un dispositif non représenté sur le schéma. Le point O est donc fixe par rapport au sol. Les mouvements ont lieu dans le plan vertical (xOz). Les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ forment une base orthonormée directe.

On suppose que :

- le référentiel terrestre est galiléen ;
- le centre de poussée (point d'application de la poussée d'Archimède) pour le solide S est ici confondu avec son centre de gravité G ;
- il existe un couple résistant exercé au niveau de l'axe de rotation du pendule de la forme : $\vec{C} = -\alpha \dot{\theta} \vec{u}_y$;
- la houle exerce une force de la forme $\vec{F} = \beta \cos(\omega t) \vec{u}_x$ en G .

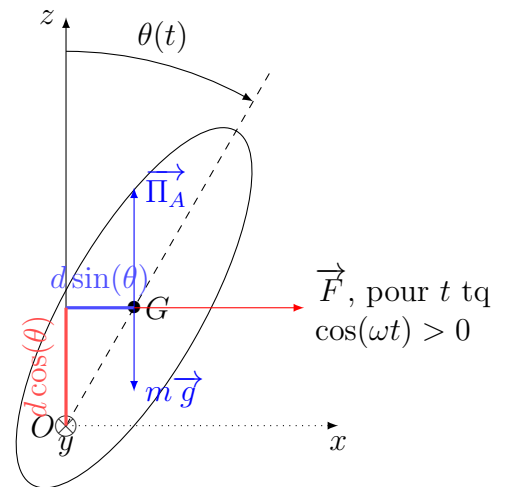
Solution:

Système : Solide S de masse m

Référentiel : Terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'étude

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$ qui s'applique en G
- **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}_A = -\rho_e V \vec{g}$ qui s'applique en G (hypothèse)
- force exercée par la houle $\vec{F} = \beta \cos(\omega t) \vec{u}_x$ qui s'applique en G
- couple résistant au niveau de la liaison pivot :
 $\vec{C} = -\alpha \dot{\theta} \vec{u}_y$ « **couple** » = **action mécanique de résultante nulle et de moment non nul. Par abus de langage, on appelle le moment du couple plus simplement « le couple »**



R1. Donner l'expression de la poussée d'Archimède subie par le pendule, en fonction de V , ρ_e et $\vec{g}$.

Solution: cf ci-dessus

R2. 🎵 En raisonnant de manière qualitative sur les forces, déterminer la condition sur ρ_e , m et V pour que, en absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule corresponde à $\theta = 0$.

Solution: **Attention à la rigueur !**

Le poids et la poussée d'Archimède sont les deux forces verticales. Le poids tend à ramener le solide vers le bas, tandis que la poussée d'Archimède tend à le ramener vers le haut.

Les deux positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont des positions d'équilibre, pour lesquels tous les moments par rapport à l'axe de rotation (Oy) seront nuls.

On souhaite que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable, c'est-à-dire qu'en cas de légère perturbation le pendule y revienne. Pour cela, il faut que le moment résultant tende à faire tourner pour ramener le solide vers le haut.

Pour $\theta > 0$, il faut que le moment résultant par rapport à (Oy) soit négatif pour faire tourner le solide dans le sens indirect : $mgd \sin(\theta) - \rho_e V g d \sin(\theta) < 0$ soit, $\rho_e V - m > 0$.

Si $\theta < 0$, il faut faire tourner le solide dans le sens direct pour ramener le solide vers le haut, donc il faut que le moment résultant par rapport à (Oy) soit positif.

En absence de houle, la position d'équilibre stable du pendule correspond à $\theta = 0$, ssi $m < \rho_e V$

R3. Déterminer les moments des différentes forces s'exerçant sur le solide S par rapport à l'axe Oy .

Solution: Attention l'axe (Oy) part derrière, le sens « horaire » est donc le sens direct ici.

- Moment du poids : $\mathcal{M}_{Oy}(m\vec{g}) = +mgd \sin(\theta)$, car le bras de levier vaut $d \sin(\theta)$ et le poids tend ici à faire tourner dans le sens direct par rapport à l'axe (Oy) .
- Moment de la poussée d'Archimède : $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{\Pi}_A) = -\rho_e V g d \sin(\theta)$, car le bras de levier vaut $d \sin(\theta)$ et la poussée d'Archimède tend ici à faire tourner dans le sens direct par rapport à l'axe (Oy) .
- Moment de $\vec{F}$: $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) = +\beta \cos(\omega t) d \cos(\theta)$, car le bras de levier vaut $d \cos(\theta)$ et que dans le cas représenté sur le schéma (t tq $\cos(\omega t) > 0$, la force tend à faire tourner dans le sens direct).
- Moment de l'action de la liaison pivot, déjà fourni : $C = -\alpha \dot{\theta}$

R4. Établir l'équation du mouvement du solide S , c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par θ .

Solution: Le théorème du moment cinétique appliquée au solide S par rapport à l'axe (Oy) donne :

$$\frac{dL_{Oy}(S)}{dt} = \mathcal{M}_{Oy}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{\Pi}_A) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) + C$$

Soit $J\ddot{\theta} = (m - \rho_e V)gd \sin(\theta) + \beta \cos(\omega t) d \cos(\theta) - \alpha \dot{\theta}$

R5. On se place dans l'approximation des petits angles. Linéariser alors l'équation différentielle précédente. On mettra l'équation sous la forme

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta(t) = f(t)$$

et on précisera les expressions des différents termes λ , ω_0 et $f(t)$.

Solution: On se place dans l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $\theta \ll 1$ rad, alors $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1$ (DL au premier ordre de $\cos(\theta)$).

On obtient : $J\ddot{\theta} = (m - \rho_e V)gd\theta + \beta \cos(\omega t)d - \alpha \dot{\theta}$

Soit $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{(\rho_e V - m)gd}{J}\theta = \frac{\beta d}{J}\cos(\omega t)$, que l'on identifie avec $\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta(t) = f(t)$

En introduisant :

- la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}}$, si $\rho_e V - m > 0$ (cf Q1).

- $\lambda = \frac{\alpha}{J}$

- $f(t) = \frac{\beta d}{J} \cos(\omega t)$

On se place en régime sinusoïdal forcé. On note $\underline{\theta} = \theta_0(\omega)e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\theta = \text{Re}(\underline{\theta})$.

R6. En passant l'équation différentielle en notation complexe, exprimer $\underline{\theta}$ en fonction de β , λ , ω_0 , ω et $e^{j\omega t}$.

Solution: Dans le cadre du RSF, on utilise la notation complexe pour $\theta(t)$: $-\omega^2 \underline{\theta} + i\lambda\omega \underline{\theta} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \frac{\beta d}{J} e^{j\omega t}$

Ainsi
$$\underline{\theta}(t) = \frac{\frac{\beta d}{J} e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\lambda\omega}$$

R7. Déterminer l'expression de $\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}|$.

Solution: Ainsi
$$\theta_0(\omega) = |\underline{\theta}| = \frac{\frac{\beta d}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2}}$$

Revoir l'utilisation de la représentation complexe .

La puissance récupérée est proportionnelle à $\dot{\theta}^2$: on la note $\mathcal{P}_r(t) = \gamma \dot{\theta}^2$.

R8. 🎵 🎵 Montrer que la puissance moyenne $\mathcal{P}_m$ récupérée s'écrit :

$$\mathcal{P}_m = \frac{\frac{\gamma \beta^2 d^2}{2J^2}}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \lambda^2}$$

Indications (j'espère que vous mesurez la chance que vous avez ! ces indications n'étaient pas présentes dans le sujet initial) :

- Pour que cela soit plus simple pour la suite, arrangez-vous pour que ω n'intervienne qu'au dénominateur.
- On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f périodique de période T est définie par $\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.
- On rappelle que $\langle \cos^2(x) \rangle = \langle \sin^2(x) \rangle = \frac{1}{2}$

Solution:
$$\underline{\dot{\theta}} = i\omega \underline{\theta} = \frac{i\omega \times \frac{\beta d}{J} e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\lambda\omega}$$

Ainsi $\dot{\theta} = \omega \theta_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = -\omega \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Donc
$$\mathcal{P}_r(t) = \gamma \dot{\theta}^2 = \gamma \theta_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

La puissance moyenne vaut alors : $\mathcal{P}_m = \frac{\gamma \omega^2 \theta_0^2}{2}$, car la valeur moyenne d'un cosinus au carré vaut 1/2.

$$\mathcal{P}_m = \frac{\frac{\gamma \omega^2}{2} \times \frac{\beta^2 d^2}{J^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2 \omega^2} = \frac{\frac{\gamma \beta^2 d^2}{2J^2}}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \lambda^2}$$

R9. Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ? Tracer l'allure de $\mathcal{P}_m$ en fonction de ω .

Solution:

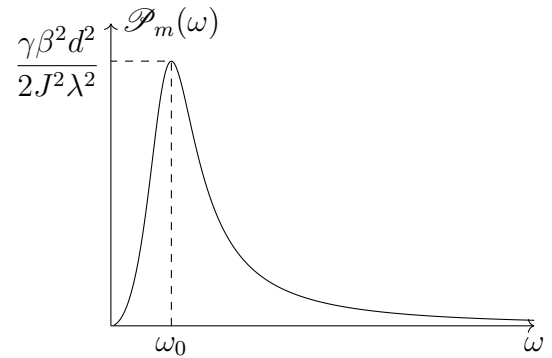
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{P}_m = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m = 0$$

De plus $\mathcal{P}_m(\omega)$ est maximal quand le dénominateur est minimal,

donc lorsque $\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 = 0$, soit pour $\boxed{\omega = \omega_0}$

La courbe de $\mathcal{P}_m(\omega)$ ressemble à celle obtenue pour la résonance en intensité dans un RLC série.



R10. Calculer la pulsation propre ω_0 puis la période propre T_0 .

Données : accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $d = 10 \text{ m}$, $V = 1000 \text{ m}^3$, $m = 300 \text{ t}$ et on prendra $J \approx md^2$.

Solution: A.N. : $\omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}} \approx 1,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 4,1 \text{ s}$

Exercice n°2 De la physique à Fort Boyard

On modélise sur la figure 4 la balance par une tige rigide homogène de longueur $2L = 6,0 \text{ m}$, et de masse $m_b = 20 \text{ kg}$. La balance est attachée en son milieu à un support triangulaire, le sommet supérieur de ce triangle étant le point O , par lequel passe l'axe de rotation de la balance. On néglige la masse de ce support triangulaire, si bien que le centre d'inertie G de la balance et du support se situe au milieu de la balance. On définit un repère $(Oxyz)$ centré sur O , tel que la balance tourne autour de l'axe (Ox) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_x$. Lorsque la balance est horizontale, son centre d'inertie G se trouve sous O à une distance h_0 . On suppose que la liaison pivot autour de l'axe de rotation est parfaite, et on négligera tous les frottements de l'air. L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Les deux candidats de masses différentes descendent sur la balance à l'aide de deux échelles, puis chacun d'eux se positionne sur une des branches de la balance. On notera respectivement $m_1 = 90 \text{ kg}$ et $m_2 = 65 \text{ kg}$ les masses des deux candidats. On note J le moment d'inertie autour de l'axe (Ox) de l'ensemble constitué de la balance et des candidats posés sur celle-ci.

Partie A Stratégie perdante

Dans cette partie, on va étudier de quelle manière les candidats doivent procéder pour atteindre les deux parties du code. On suppose tout d'abord que les candidats sont à cheval sur la balance. Ils sont donc assimilés à deux points matériels C_1 et C_2 posés sur chacune des branches de la balance. La balance est supposée horizontale et à l'équilibre. On repère les positions des candidats par $\ell_1 = GC_1$ et $\ell_2 = GC_2$ (attention : cela ne correspond pas à la figure 5).

R1. Énoncer le théorème du moment cinétique pour un solide.

Solution: Pour un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe (Ox) , de moment d'inertie $J_{(Ox)}$, le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Ox) s'écrit : $\frac{dL_{(Ox)}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{(Ox)}^{\text{ext}} \Leftrightarrow J_{(Ox)}\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{(Ox)}^{\text{ext}}$

R2. Déterminer une relation entre m_1 , m_2 , ℓ_1 et ℓ_2 traduisant l'équilibre de la balance.

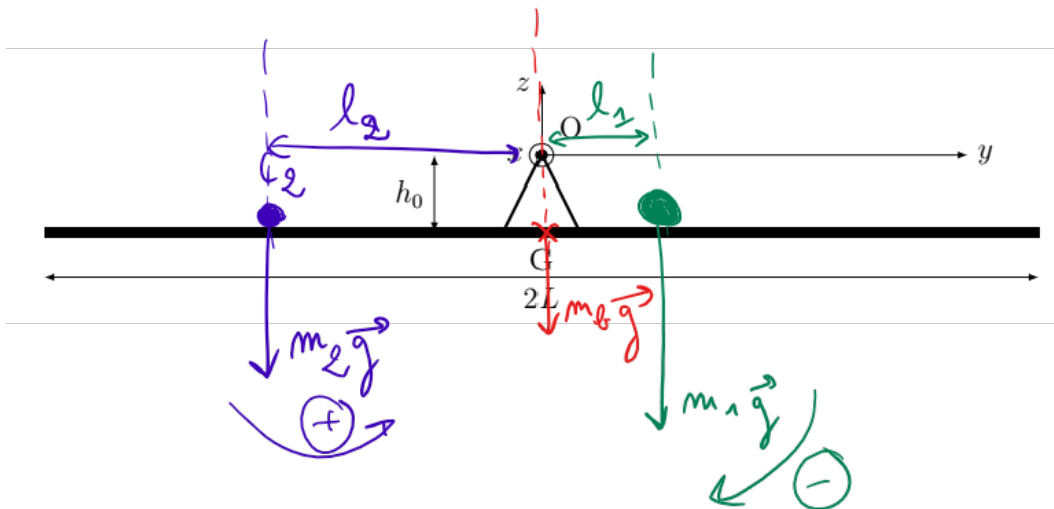
Solution: Système : {planche + candidat 1 + candidat 2}

Référentiel : terrestre, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

— poids du candidat 1 : $m_1 \vec{g}$, de moment $\mathcal{M}_{(Ox)}(m_1 \vec{g}) = +\ell_1 m_1 g$

- poids du candidat 2 : $m_2 \vec{g}$, de moment $\mathcal{M}_{(Ox)}(m_2 \vec{g}) = -\ell_2 m_2 g$
- action de la liaison pivot, supposé parfaite de moment nul, car supposée parfaite,
- poids de la balance, de moment nul par rapport à (Ox) , $m_b \vec{g}$ croise l'axe (Ox) .



À l'équilibre, la somme des moments est nulle :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(Ox)}(m_1 \vec{g}) + \mathcal{M}_{(Ox)}(m_2 \vec{g}) + \mathcal{M}_{(Ox)}(m_b \vec{g}) + \mathcal{M}_{(Ox)}(\text{pivot}) &= 0 \\ +\ell_1 m_1 g - \ell_2 m_2 g &= 0 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\ell_1 m_1 = \ell_2 m_2}$

R3. Le candidat 2 (le plus léger) peut-il atteindre le bout de la planche sans difficulté ? Si oui, où devra être situé le candidat 1 ?

Solution: Si le candidat 2 atteint le bout de la planche, alors $\ell_2 = L$, et le candidat 1 doit alors se trouver à la distance de l'axe $\ell_1 = \frac{m_2 L}{m_1} = 2,17 \text{ m}$. Cela est donc tout à fait possible.

R4. Déterminer la position maximale $\ell_{1\text{max}}$ que peut atteindre le candidat 1 sans tomber et en faire l'application numérique. Quel problème cela pose-t-il pour les candidats ?

Solution:

Pour ne pas tomber, le candidat 1 peut atteindre au maximum la position $\ell_{1\text{max}} = \frac{m_2 L}{m_1} = 2,17 \text{ m}$, cela le mène donc à 83 cm du bout : il ne pourra pas atteindre le code !

Partie B Stratégie gagnante

On étudie maintenant la situation où le candidat le plus lourd se couche sur la balance, afin que ses mains puissent atteindre le code (figure 5). Pour modéliser cela, on assimile le candidat de masse m_1 à une tige homogène (T) de longueur ℓ_0 et de masse linéique μ , de telle sorte que l'extrémité de cette tige se trouve en $y = L$. Le deuxième candidat, toujours assimilé à un point matériel C_2 , se trouve en $y = -L$.

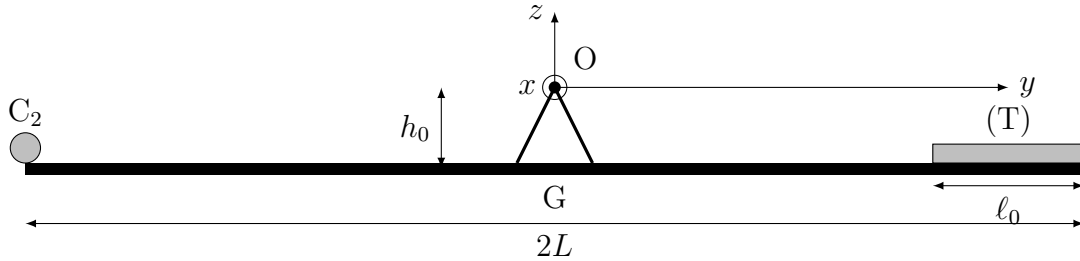


FIGURE 1 – Candidat le plus lourd couché sur la balance.

R5. Exprimer le moment $\mathcal{M}_{(Ox)}(T)$ du poids de la tige (T) en fonction de m_1 , g , L et ℓ_0 .

Solution: Le centre de masse de la tige est situé en son milieu puisqu'elle est supposée homogène, il est donc situé à la distance $L - \frac{\ell_0}{2}$ de l'axe de rotation.

Le moment du poids de la tige vaut donc $\mathcal{M}_{(Ox)}(T) = -m_1 g \left(L - \frac{\ell_0}{2} \right)$

R6. Déterminer, en fonction de m_1 , m_2 et L , la longueur ℓ_0 permettant que l'équilibre horizontal de la balance soit respecté.

Faire l'application numérique.

L'épreuve vous paraît-elle gagnable dans cette situation ?

Solution: En reprenant le résultat obtenu Q2, en notant que le candidat 2 est situé à la distance $\ell_2 = L$:

$$m_1 \left(L - \frac{\ell_0}{2} \right) = m_2 L, \text{ soit } \ell_0 = 2L \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right)$$

A.N. : $\ell_0 = 6 \times \left(1 - \frac{65}{90} \right) = 6(1 - 0,72) = 1,68 \text{ m}$: ce qui représenterait la taille du candidat 2, ce qui paraît possible pour un candidat faisant 65 kg. L'épreuve paraît gagnable dans cette situation.

Partie C Risques pour les candidats

En pratique, il est difficile pour les candidats de conserver en permanence des positions qui leur permettent de maintenir la balance à l'équilibre horizontal. La balance va alors pencher d'un côté ou de l'autre. Dans cette partie, on s'intéresse aux situations où la balance s'incline par rapport à l'horizontale (figure 6). Pour repérer l'inclinaison de la balance, on introduit l'angle θ entre la verticale descendante et le vecteur $\overrightarrow{OG}$. Les candidats seront assimilés à deux points matériels C_1 et C_2 ; on conserve les notations ℓ_1 et ℓ_2 introduites dans la **Exercice n°2** pour identifier leur position.

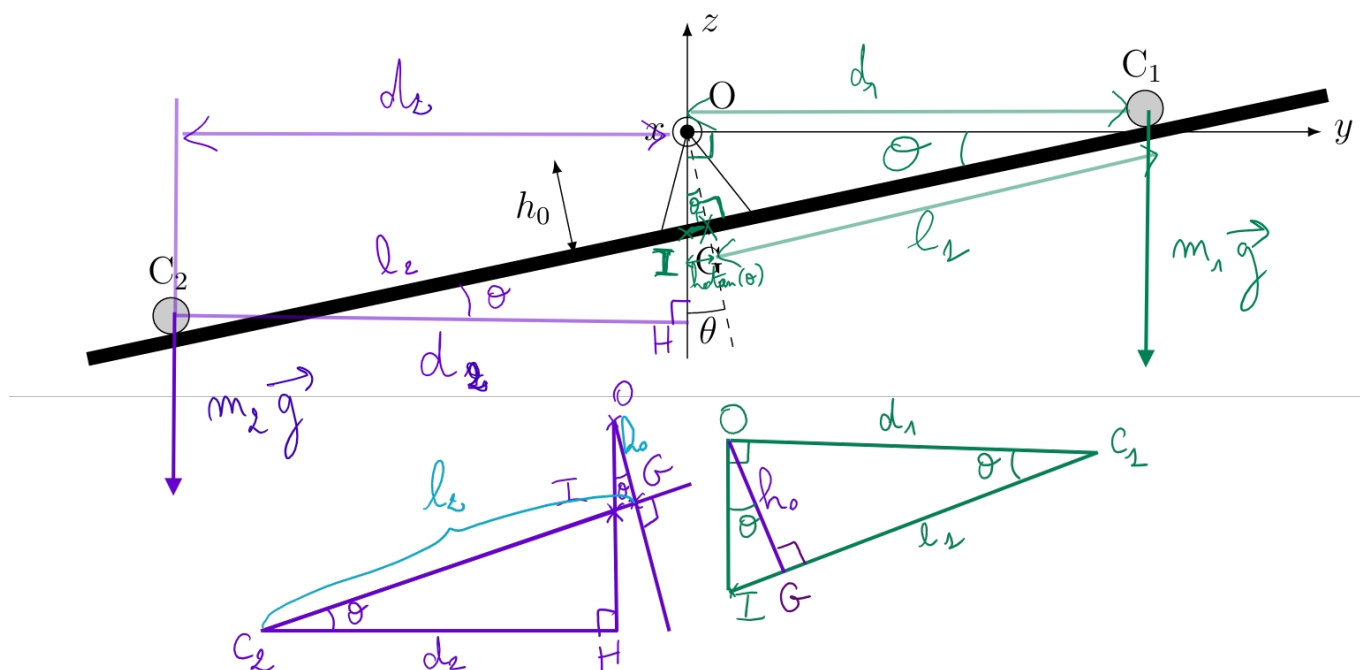


FIGURE 2 – Balance inclinée

R7. (🎵 🎵 🎵 🎵) Montrer que le moment du poids du candidat C_1 est égal à :

$$\mathcal{M}_{(Ox)}(C_1) = -m_1g(h_0 \sin \theta + \ell_1 \cos \theta)$$

Solution: Avec le bras de levier d_1 , le moment du poids de C_1 s'écrit : $\mathcal{M}_{(Ox)}(C_1) = -m_1gd_1$

Dans le triangle OGC_1 rectangle en G : $\cos(\theta) = \frac{\ell_1}{d_1}$, donc $d_1 = \frac{\ell_1}{\cos(\theta)}$, ce n'est pas la relation attendue...

Dans le triangle OIC_1 rectangle en I : $\cos(\theta) = \frac{d_1}{\ell_1 + IG}$

Or dans le triangle OIG : $\tan(\theta) = \frac{IG}{h_0}$

Ainsi $d_1 = \ell_1 \cos(\theta) + h_0 \tan(\theta) \cos(\theta)$

Soit $\mathcal{M}_{(Ox)}(C_1) = -m_1g(h_0 \sin \theta + \ell_1 \cos \theta)$

R8. (🎵 🎵 🎵 🎵) Calculer de manière analogue le moment $\mathcal{M}_{(Ox)}(C_2)$ du poids du candidat C_2 .

Solution: Avec le bras de levier d_2 , le moment du poids de C_2 s'écrit : $\mathcal{M}_{(Ox)}(C_2) = +m_2gd_2$

Dans le triangle C_2HI rectangle en H : $\cos(\theta) = \frac{d_2}{\ell_2 - IG} = \frac{d_2}{\ell_2 - h_0 \tan(\theta) \cos(\theta)}$

Ainsi $d_2 = (\ell_2 - h_0 \tan(\theta)) \cos(\theta)$

Soit $\mathcal{M}_{(Ox)}(C_2) = +m_2g(\ell_2 \cos(\theta) - h_0 \sin(\theta))$

R9. () Montrer que l'équation différentielle du mouvement est :

$$J\ddot{\theta} + (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)g \cos \theta + (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \sin \theta = 0$$

Solution: Moment du poids de la tige : $\mathcal{M}_{(Ox)}(T) = -m_bgd_b$, avec $d_b = h_0 \sin(\theta)$

Ainsi, $\mathcal{M}_{(Ox)}(T) = -m_bgh_0 \sin(\theta)$

D'après le théorème du moment cinétique par rapport à (Ox) à l'ensemble {tige+ C_1 + C_2 }, de moment d'inertie J .

$$J\ddot{\theta} = -m_1g(h_0 \sin \theta + \ell_1 \cos \theta) + m_2g(\ell_2 \cos(\theta) - h_0 \sin(\theta)) - m_bgh_0 \sin(\theta)$$

$$J\ddot{\theta} = -(m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \sin(\theta) + (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g \cos(\theta)$$

Soit $J\ddot{\theta} + (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)g \cos \theta + (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \sin \theta = 0$

On suppose que les candidats sont initialement à des positions qui correspondent à l'équilibre de la balance à l'horizontale (condition explicitée à la question **Q2**). Mais à l'instant $t = 0$, une perturbation (vent, faux geste...) conduit la balance à acquérir une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$.

R10. Simplifier l'équation différentielle dans ce cas. L'équation différentielle devra s'exprimer uniquement en fonction de m_1 , m_2 , m_b , J , h_0 , g , θ et $\ddot{\theta}$.

Solution: Dans ce cas, $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$

Ainsi $J\ddot{\theta} + (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \sin(\theta) = 0$

R11. Résoudre cette équation en faisant une approximation qu'on explicitera.

Solution: En supposant que la perturbation n'est pas très importante, raisonnons sur un mouvement de faible amplitude par rapport à la position d'équilibre, alors $\sin(\theta) \approx \theta$.

L'équation différentielle s'écrit alors $\ddot{\theta} + \frac{(m_1 + m_2 + m_b)gh_0}{J}\theta = 0$: on reconnaît un oscillateur har-

monique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2 + m_b)gh_0}{J}}$

Solution générale : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Or $\theta(0) = 0$ (position d'équilibre), donc $A = 0$.

Et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = B\omega_0$

Ainsi $\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

R12. Exprimer la période des oscillations.

Solution: Les oscillations sont de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{(m_1 + m_2 + m_b)gh_0}}$

R13. Exprimer J en fonction de J_B , le moment d'inertie de la balance, m_1 , m_2 , ℓ_1 , ℓ_2 et h_0 .

Solution: Exprimons le moment cinétique de l'ensemble du système par rapport à l'axe (Ox) :

$$L_{(Ox)} = L_{(Ox)}(T) + L_{(Ox)}(C_1) + L_{(Ox)}(C_2)$$

Le système est en rotation autour de l'axe (Ox) , donc tous les points décrivent des cercles de centre situé sur l'axe de rotation et à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Ainsi

$$\begin{aligned} L_{(Ox)}(C_1) &= (\overrightarrow{OC_1} \wedge m_1 \vec{v}(C_1)) \cdot \vec{u}_x \\ &= m_1 d_1^2 \dot{\theta} \\ &= m_1 (h_0 \sin(\theta) + \ell_1 \cos(\theta))^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

De même pour C_2 .

$$\text{Ainsi } L_{(Ox)} = J_B \dot{\theta} + m_1 (h_0 \sin(\theta) + \ell_1 \cos(\theta))^2 \dot{\theta} + m_2 (-h_0 \sin(\theta) + \ell_2 \cos(\theta))^2 \dot{\theta}$$

On identifie

$$\begin{aligned} J &= J_B + m_1 (h_0 \sin(\theta) + \ell_1 \cos(\theta))^2 + m_2 (-h_0 \sin(\theta) + \ell_2 \cos(\theta))^2 \\ &\approx J_B + m_1 (\ell_1 + h_0 \theta)^2 + m_2 (\ell_2 - h_0 \theta)^2 \\ &\approx J_B + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 + 2m_1 h_0 \ell_1 \theta - 2m_2 h_0 \ell_2 \theta + (m_1 + m_2) (h_0 \theta)^2 \\ &\approx J_B + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 + 2h_0 \theta \underbrace{(m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2)}_{=0} + \underbrace{(m_1 + m_2) (h_0 \theta)^2}_{\text{2è ordre}} \\ &\approx J_B + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{J = J_B + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}$$

R14. Comment évolue la période des oscillations lorsque les candidats s'éloignent du centre de la balance ?

Solution: J augmente quand les candidats s'éloignent du centre de la balance, donc la période d'oscillation augmente également quand les candidats s'éloignent du centre de la balance.

R15. () Partant d'une situation où la balance est à l'équilibre, le candidat C_2 s'avance sur sa branche d'une distance $\Delta \ell_2$. À partir de l'équation du mouvement (question Q9), montrer que la grandeur $E = E_1 + E_2$ est une intégrale première du mouvement, avec :

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \\ E_2 = -m_2 g \Delta \ell_2 \sin \theta - (m_b + m_1 + m_2) g h_0 (\cos \theta - 1) \end{cases}$$

Solution: Idée :

- multiplier l'équation différentielle du mouvement par $\dot{\theta}$,
- primitiver,
- exprimer la constante à deux instants différents :
 - à l'équilibre, où $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2$
 - hors d'équilibre, où $\theta = \theta$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}$ et C_2 est situé à la distance $\ell_2 + \Delta \ell_2$ (où ℓ_2 est la distance à l'équilibre).
- égaliser et conclure

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\theta} + (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)g \cos \theta + (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \sin \theta &= 0 \\
 \times \dot{\theta} \quad J\ddot{\theta} + (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)g \cos(\theta)\dot{\theta} + (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \sin(\theta)\dot{\theta} &= 0 \\
 \text{primitive} \quad \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)g \sin(\theta) - (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \cos(\theta) &= \text{cte} \\
 \text{à l'équilibre} \quad 0 + 0 - (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 &= \text{cte} \\
 \text{hors éq} \quad \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + (m_1\ell_1 - m_2(\ell_2 + \Delta\ell_2))g \sin(\theta) - (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \cos(\theta) &= \text{cte} \\
 \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - m_2\Delta\ell_2g \sin(\theta) - (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \cos(\theta) &= \text{cte} \\
 \text{égalisons : } \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - m_2\Delta\ell_2g \sin(\theta) - (m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \cos(\theta) &= -(m_1 + m_2 + m_b)gh_0 \\
 \underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}_{=E_1} + \underbrace{-m_2\Delta\ell_2g \sin(\theta) - (m_1 + m_2 + m_b)gh_0(\cos(\theta) - 1)}_{=E_2} &= 0
 \end{aligned}$$

R16. Interpréter la signification de E , E_1 et E_2 .

Solution: E_1 est l'énergie cinétique de l'ensemble hors d'équilibre, soit la variation de l'énergie cinétique lors du déplacement du candidat 2.

E_2 est la somme de la variation d'énergie potentielle de pesanteur du candidat 2 qui a bougé et de la variation d'énergie potentielle de l'ensemble due au déplacement du centre de gravité de l'ensemble lors du déplacement du candidat 2.

E est la variation de l'énergie totale du système au cours du déplacement, elle est nulle car l'énergie mécanique se conserve puisqu'aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte.

R17. On part d'une situation où la balance est à l'équilibre horizontal. À partir des courbes de $E_2(\theta)$, décrire qualitativement le mouvement qui va avoir lieu lorsqu'un candidat s'écarte de la position assurant l'équilibre de la balance.

Solution: D'après les calculs précédents $E = 0$, et $E_1 \geq 0$, donc $E \geq E_2(\theta)$

Les positions accessibles sont donc celles pour lesquelles la courbe de E_2 est en-dessous de la courbe de $E = 0$.

Au fur et à mesure du déplacement de C_2 , $\Delta\ell_2$ augmente, et les valeurs angles accessibles augmentent. La balance va osciller avec une amplitude de plus en plus grande autour d'un angle d'équilibre qui augmente.

R18. Lorsque la balance dépasse une inclinaison de 40° , on constate que la plupart des candidats tombent à l'eau. À partir de quelle valeur de $\Delta\ell_2$ cela risque-t-il d'arriver ? Donner une estimation numérique de $\Delta\ell_{2,\text{lim}}$ à partir du tracé de $E_2(\theta)$.

Solution: L'angle $\theta = 40^\circ$ est atteignable à partir de $\Delta\ell_{2,\text{lim}} = h_0$ (courbe (B)).

R19. Conclure : sur quel paramètre de la balance les concepteurs de l'épreuve peuvent-ils agir pour rendre celle-ci plus ou moins difficile pour les candidats ; expliquer comment ?

Solution: Jouer sur la valeur de h_0 rend le jeu plus ou moins facile. En effet, avec une grande valeur de h_0 , la valeur limite de $\Delta\ell_2$ évitant la bascule augmente et rend le jeu plus facile, le candidat 2 pouvant s'éloigner davantage.