

? À rendre LUNDI 18 mai 2026 à 7h45

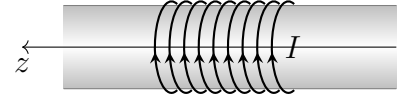
Devoir Maison n°19 – Induction & Euler – Corrigé

Exercice n°1 Champ magnétique d'une bobine

On considère la bobine longue ci-dessous, de longueur $L = 60$ cm, et de rayon $R = 4$ cm parcourue par un courant d'intensité $I = 0,6$ A. On note (Oz) l'axe de révolution de la bobine.

On donne l'expression de la norme du champ magnétique à l'intérieur de la bobine : $B = \mu_0 n I$, où n est le nombre de spires par unité de longueur.

On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.



R1. On cherche la forme du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.

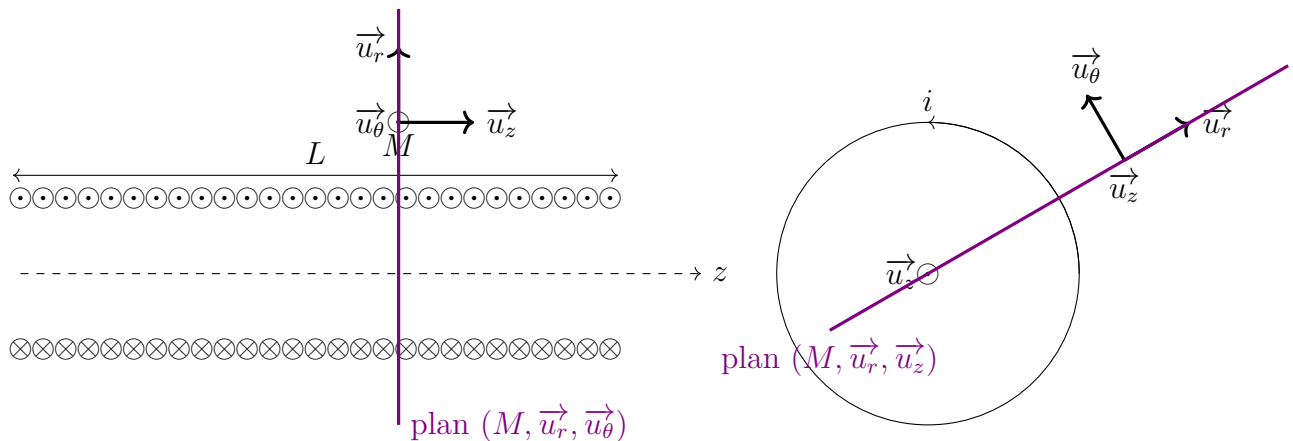
- (a) Trouver un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Que peut-on en déduire sur le champ magnétique en M ?

Solution:

⚠ Remarque – Méthode du cours à suivre !

M QUELCONQUE!!!! PAS SUR l'axe (Oz) !
ATTENTION à la définition de la base cylindrique.
COMPLÉTEZ le schéma avec les plans.

Soit $M(r, \theta, z)$ un point de l'espace quelconque.



Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique appartient à ce plan, donc la composante selon $\vec{u}_\theta$ est nulle.

- (b) Trouver un plan de symétrie de la distribution de courant. Que peut-on en déduire sur le champ magnétique en M ?

Solution: Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, donc les composantes selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ est nulle.

Conclusion : $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$

- (c) Étudier les invariances et conclure sur la forme du champ magnétique.

Solution: La distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) , donc B_z ne dépend pas de z .

La distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) d'angle θ , donc B_z ne dépend pas de θ .

Conclusion : $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z$

R2. En déduire l'expression du vecteur champ magnétique.

Solution:

 **Remarque –**

Vous venez de déterminer la direction, l'énoncé vous donne la norme.

La règle de la main droite vous permet d'avoir le sens.

Ainsi vous pouvez conclure sur l'EXPRESSION du champ (pas un truc général !)

La règle de la main droite permet de déduire que le champ magnétique est selon $+\vec{u}_z$.

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

R3. On veut créer un champ magnétique de 0,1 T au sein de la bobine. Combien de spires faut-il ?

Solution:

 **Remarque – VOCABULAIRE**

Il faut distinguer le nombre de spires, qui est la question posée, du nombre de spires par unité de longueur, notée n , défini dans l'énoncé dans l'expression de B .

Le nombre de spires par unités de longueur est lié au nombre de spires par : $n = \frac{N}{L}$

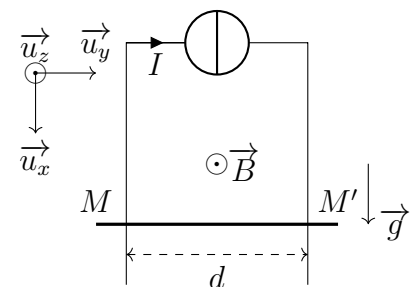
Ainsi, $N = \frac{BL}{\mu_0 I} = 7,96 \cdot 10^4$ spires/m

Exercice n°2 Rails de Laplace

On considère des rails de Laplace disposés verticalement. Le champ magnétique $\vec{B}$ est alors horizontal ainsi que la tige $\mathcal{T}$, de masse $m = 20$ g et de longueur $d = 4$ cm.

$\mathcal{T}$ peut glisser sans que ses extrémités ne quittent le contact des rails (un guidage est prévu).

À l'extrémité des rails de Laplace, on place une source de courant d'intensité I constante.



R1. Rappeler l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la portion d'un conducteur.

Solution:

 **Remarque –**

Adaptez les notations à celles de l'énoncé !

La tige est délimitée par M' et M .

Le champ magnétique s'appelle $\vec{B}$ et non $\vec{B}_{\text{ext}}$.

Force de Laplace : $\vec{F}_{\mathcal{L}} = \int_{\text{le long de la tige de } M' \text{ à } M} i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}$

R2. Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur la tige $\mathcal{T}$ en fonction de I , B , d et d'un vecteur unitaire bien choisi.

Solution:

⚠ Remarque –

$\overrightarrow{d\ell_P} = +dy\overrightarrow{u_y}$ PAS DE MOINS dans l'expression d'un vecteur déplacement élémentaire!!!!
Ici $dy < 0$, donc l'intégrale est calculée dans le sens décroissant.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\mathcal{L}}} &= \int_{\text{le long de la tige de } M' \text{ à } M} i d\overrightarrow{\ell_P} \wedge \overrightarrow{B} \\ &= \int_d^0 i dy \overrightarrow{u_y} \wedge B \overrightarrow{u_z} \\ &= \int_d^0 i B \overrightarrow{u_x} \\ &= -i d B \overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

R3. Établir la condition reliant I , B , d , m et g permettant à la tige de rester en équilibre.

Solution: Système : Tige

Référentiel : terrestre considéré galiléen

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\overrightarrow{g}$
- force de Laplace $\overrightarrow{F_{\mathcal{L}}}$

À l'équilibre : $\overrightarrow{0} = m g \overrightarrow{u_x} - I B d \overrightarrow{u_x}$, donc $I = \frac{mg}{Bd}$

R4. Quelle valeur d'intensité doit-on choisir pour assurer l'équilibre de $\mathcal{T}$? On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\|\overrightarrow{B}\| = 0,25 \text{ T}$.

Solution: A.N. $I = 20 \text{ A}$

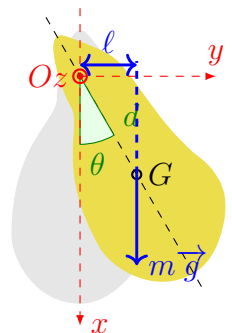
Exercice n°3 Pendule pesant

On étudie un pendule pesant constitué d'un solide, de masse m , de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) de rotation.

On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz) . Et on néglige les frottements dus à l'air.

On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox) .

On note d la distance OG .



Partie A Mise en équation

R1. En utilisant une méthode de votre choix, établir précisément et rigoureusement l'équation du mouvement vérifiée par θ , et montrer qu'elle s'écrit $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$, où on identifiera ω_0 en fonction des paramètres du problème.

Solution: Système : Solide, de masse m , de centre d'inertie G , et de moment d'inertie J_{Oz}

Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$, de moment par rapport à l'axe de rotation :
 $\mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) = -mgd \sin(\theta)$, avec $\ell = d \sin(\theta)$ le bras de levier et $\mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) < 0$ car le poids tend à faire tourner le pendule dans le sens indirect.
- Action de la liaison pivot
 La liaison pivot est supposée parfaite, donc son moment par rapport à l'axe de rotation est nul :
 $\mathcal{M}_{Oz}(\text{liaison pivot}) = 0$

D'après le TMC par rapport à l'axe de rotation (Oz) :

$$\begin{aligned} \frac{dL_{Oz}(\mathcal{S})}{dt} &= \mathcal{M}_{Oz}(\text{liaison pivot}) + \mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) \\ \frac{d(J_{Oz}\omega)}{dt} &= -mgd \sin(\theta) + 0 \\ J_{Oz} \frac{d\omega}{dt} &= -mgd \sin(\theta) \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_{Oz}} \sin(\theta) = 0}$

On identifie $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{Oz}}}}$

L'équation différentielle précédente ne peut pas être résolue analytiquement, mais cela peut se faire numériquement.

On se propose d'adapter l'algorithme d'Euler, normalement prévu pour une équation différentielle du premier ordre, pour la résoudre.

Partie B Mise en place de l'algorithme

L'idée est de transformer cette équation différentielle du second ordre en deux équations différentielles du premier ordre. Pour cela, on pose $y = \theta$ et $z = \dot{\theta}$, et on met en œuvre l'approximation d'Euler sur y et z .

On résout (c'est-à-dire détermine θ et $\dot{\theta}$) sur l'intervalle $[0, 5T_0]$ que l'on décompose en n intervalles de largeur h .

R2. (a) Exprimer le pas h en fonction de T_0 et n .

Solution: L'intervalle de largeur $5T_0$ est divisé en n intervalles, donc $\boxed{h = \frac{5T_0}{n}}$

(b) Avec n intervalles, combien y a-t-il d'instants de résolution au total? Exprimer l'instant t_i (pour $i \in \llbracket 0, \dots \rrbracket$: on complètera les ...) de résolution en fonction de h et i .

Solution: Il y a $n + 1$ instants de résolution : $t_i = i \times h$, avec $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On note y_i et z_i les valeurs de y (c'est-à-dire θ) et z (c'est-à-dire $\dot{\theta}$) à l'instant t_i .

R3. (a) Exprimer $\frac{dy}{dt}$ en fonction de z .

Solution: $\frac{dy}{dt} = z$

(b) En rappelant la nature de l'approximation d'Euler, montrer que

$$y_{i+1} = y_i + z_i \times h$$

Solution: Veuillez à bien montrer la relation, et non à balancer une équation ressemblant à celle demandée pour justifier ! Vous ne justifiez rien du tout !

L'approximation d'Euler consiste à approximer $\frac{dy}{dt}(t)$ par le taux d'accroissement à l'instant t :

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{dy}{dt} \\ \text{or } \frac{dy}{dt} &\approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ \text{donc } z(t) &\approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ y(t+h) &\approx y(t) + h z(t) \\ \text{à } t_i \quad y(t_i+h) &\approx y(t_i) + h z(t_i) \\ y(t_{i+1}) &\approx y(t_i) + h z(t_i) \end{aligned}$$

Ainsi $y_{i+1} = y_i + z_i \times h$

R4. (a) Exprimer $\frac{dz}{dt}$ en fonction de $\ddot{\theta}$, puis en fonction de y .

Solution: $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin(\theta)$, soit $\frac{dz}{dt} = -\omega_0^2 \sin(y)$

(b) En déduire la relation de récurrence

$$z_{i+1} = z_i - h \times \omega_0^2 \sin(y_i)$$

Solution: Attention, dériver la relation obtenue à b n'a aucun sens. En effet, $y_i = y(t_i)$ est la valeur de y à un instant t_i particulier, sa dérivée est donc nécessairement nulle !

De la même façon, on approche $\frac{dz}{dt}$ par $\frac{z(t+h) - z(t)}{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\omega_0^2 \sin(y) \\ \frac{z(t+h) - z(t)}{h} &\approx -\omega_0^2 \sin(y) \\ z(t+h) &\approx z(t) - \omega_0^2 \sin(y)h \\ z(t_i+h) &\approx z(t_i) - \omega_0^2 \sin(y(t_i))h \end{aligned}$$

Ainsi $z_{i+1} = z_i - h\omega_0^2 \sin(y_i)$

R5.  Expliquer comment à partir des conditions initiales $\theta(0)$ (c'est-à-dire $y(0)$) et $\dot{\theta}(0)$ (c'est-à-dire $z(0)$) on peut déterminer y (c'est-à-dire θ) et z (c'est-à-dire $\dot{\theta}$) à chaque instant t_i .

Solution: Connaissant (y_0, z_0) , on en déduit $y_1 = y_0 + h z_0$ et $z_1 = z_0 - h \omega_0^2 \sin(y_0)$, puis connaissant (y_1, z_1) , on peut en déduire $y_2 = y_1 + h z_1$ et $z_2 = z_1 - h \omega_0^2 \sin(y_1)$...

Partie C Mise en œuvre

- R6.  Compléter le code sur **Capytale** permettant de déterminer les valeurs successives de θ et $\dot{\theta}$ selon l'algorithme d'Euler, pour $\theta(0) = \pi/2$ et $\dot{\theta} = 0$.

Solution:



Remarque —

ATTENTION au nombre d'instants de détermination.

Il y a $n + 1$ instants au total à terminer. Mais la CI est déjà placée dans les listes, il reste n instants à déterminer.

```

1 n = #### nombre d'intervalles
2 h = 5*T0/n # (à compléter) : pas de temps
3 y = pi/2 # (à compléter) : angle initial theta(0)
4 z = 0 # (à compléter) : vitesse angulaire initiale dtheta/dt(0)
5 Ly , Lz = [y] , [z] # listes qui contiendront les valeurs de y et z aux
   différents instants
6 for i in range( 1 , n+1 ) : # (ou range(0,n) ... )
7     y , z = y+h*z , z-h*omega0**2*sin(y) # (à compléter) : calculs de y
   et z à l'instant suivant à partir de y et z à l'instant précédent,
   contenu dans les variables y et z avant modification en utilisant
   les relations de récurrences
8     Ly.append(y)
9     Lz.append(z)

```

- R7.  Pourquoi est-il nécessaire de modifier y et z simultanément et non successivement ?

Solution: Le calcul de y_{i+1} nécessite de connaître y_i et z_i , il ne faut donc pas avoir modifié la variable z avant. De même, le calcul de z_{i+1} nécessite de connaître y_i et z_i , il ne faut donc pas avoir modifié la variable y avant.

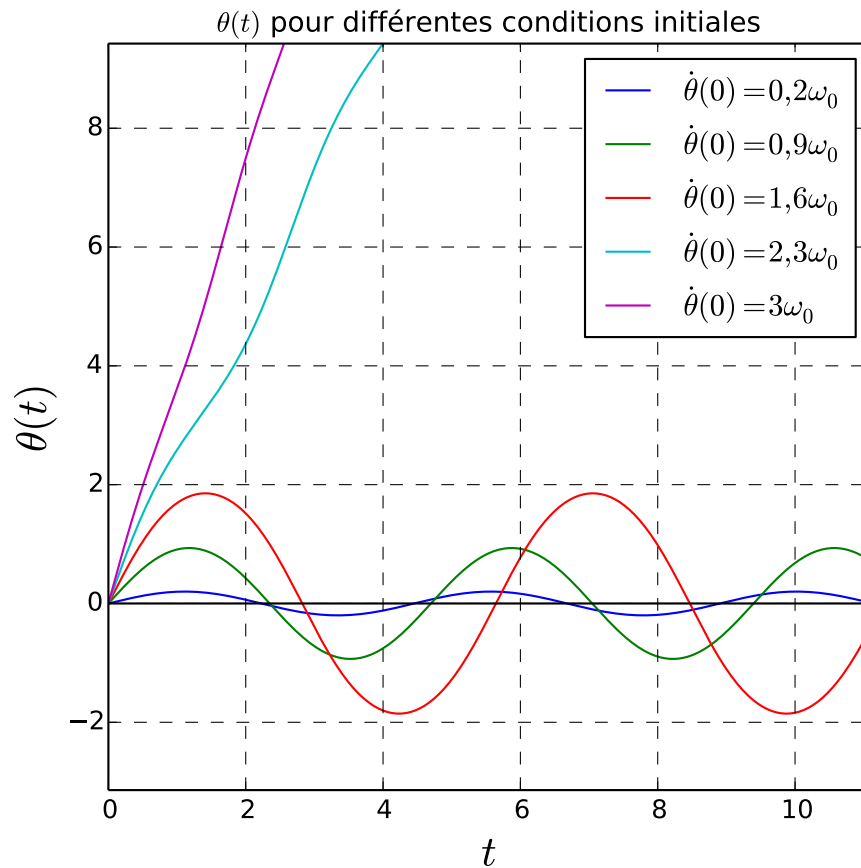
- R8.   S'amuser à modifier les conditions initiales (notamment la vitesse angulaire initiale) et noter les différentes évolutions observées (notamment sur l'allure de l'évolution temporelle et sur l'évolution de la période).

Solution:



Remarque —

Faites des observations précises, creusez les observations, ne vous contenter pas d'enfoncer des portes ouvertes).



Pour des faibles valeurs de θ_0 , le mouvement est sinusoïdal, et la période des oscillations ne dépend pas de θ_0 (jusqu'à environ 0,1 rad, ou 0,2 rad).

Quand θ_0 augmente, la période des oscillations augmente, et le mouvement n'est plus sinusoïdal : les extrémas sont « plus aplatis » .

Quand on augmente la vitesse angulaire initiale, au-delà d'une certaine valeur, le mouvement périodique, et on observe θ augmenter continuellement : le pendule pesant n'a plus un mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre mais un mouvement de révolution, il fait des tours complets.