

? À rendre jeudi 28 mai 2026

Devoir Maison n°20 – Induction & Intégration numérique – Corrigé

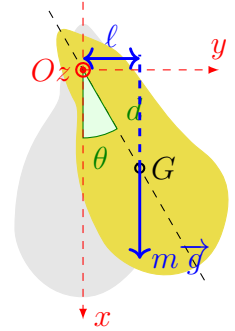
Exercice n°1 Période du pendule pesant

On étudie un pendule pesant constitué d'un solide, de masse m , de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ par rapport à l'axe (Oz) de rotation.

On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz) . Et on néglige les frottements dus à l'air.

On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox) .

On note d la distance OG .



Partie A Mise en équation

On étudie le cas où le pendule est lâché à $t = 0$ avec une vitesse angulaire nulle depuis l'angle $\theta_0 > 0$.

R1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur du pendule en fonction de m , g , d et θ .

Solution: Énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_{pp} = -mgd \cos(\theta)$

R2. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement du pendule.

En déduire que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}$$

Solution:

Système : le solide de masse m

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$, s'exerce en G , force conservative.
- action de la liaison pivot, supposée parfaite, donc de moment par rapport à l'axe de rotation (Oz) nul.

D'après le théorème de la puissance mécanique $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F^{NC}}) = 0$ car le système n'est soumis à aucune action non conservative qui travaille.

Il faut utiliser la CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE.

Par conservation de l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(t = 0)$, soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2 - mgd \cos(\theta) = \frac{1}{2}J \times 0^2 - mgd \cos(\theta_0)$$

D'où $\dot{\theta}^2 = \frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}$

R3. ♪ ♪ ♪

Justifier que $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}}\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}$ sur $[0, T/2]$ et $\dot{\theta} = +\sqrt{\frac{2mgd}{J_{Oz}}}\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}$ sur $[T/2, T]$.

En déduire que la période du pendule s'exprime selon :

$$T = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

avec $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Oz}}{mgd}}$

Solution: Ainsi $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}}$

Pour $t \in [0, T/2]$, θ diminue de θ_0 à $-\theta_0$, donc $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}}$

Pour $t \in [T/2, T]$, θ augmente de $-\theta_0$ à θ_0 , donc $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}}$$

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2mgd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{J_{Oz}}}}$$

$$dt = \pm \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

$$T = \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{+d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} + \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2}} \int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{-d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

$$T = \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{+d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} + \frac{T_0}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{+d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

$$= \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{+d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

$$\stackrel{\text{par parité}}{=} 2 \times \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{+d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{+d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

Partie B Intégration numérique

On cherche à calculer, pour différentes valeurs de θ_0 , la valeur approchée de $\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$ en utilisant la méthode des rectangles.

R4.  Compléter le code sur **capytale** permettant de calculer la valeur approchée de

$$\int_0^{\theta_0} f(\theta)d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

par la méthode des rectangle à gauche, c'est-à-dire en calculant la somme $S = h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \times h)$, où f est une fonction à identifier dans le cadre du problème étudié.

Solution:

```

1 theta0 = #### valeur à choisir
2 n = #### nombre d'intervalles
3 a = 0      # borne inférieure
4 b = theta0  # borne supérieure
5 h = (b-a)/n # pas de calcul
6
7 S = 0 # initialisation de la somme
8 for i in range(n) : # (à compléter) :
9     thetai = a+i*h # borne inférieure de l'intervalle où on évalue la
    fonction à intégrer
10     S = S+1/np.sqrt(np.cos(thetai)-np.cos(theta0)) # calcul de la somme
    compte tenu de la fonction que l'on veut intégrer
11 S = S*h # multiplication par le pas
12 rapport_T_T0 = np.sqrt(2)/np.pi*S # calcul du rapport T/T0

```

 Calculer la période pour $n = 1000$. L'angle θ_0 est à choisir (choisir une « grande » valeur de θ_0 , entre $\pi/3$ et π).

Recopier la valeur obtenue pour le rapport $\frac{T}{T_0}$.

Solution: Pour $\theta_0 = 2.5703939893007397$ rad, le rapport T/T_0 vaut: 1.6658832239191164

R5.   Compléter le code nécessaire au tracé de $\frac{T}{T_0}$ en fonction de θ_0 .

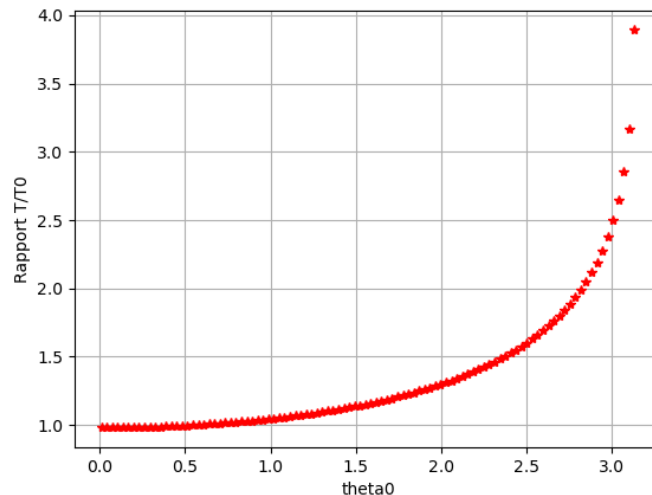
Reproduire l'allure de la courbe de $\frac{T}{T_0}$ en fonction de θ_0 . Commenter l'évolution de $\frac{T}{T_0}$ avec θ_0 .

Solution:

```

1 L_theta0=np.linspace(0.01,np.pi-0.01,100)
2
3 for theta0 in L_theta0:
4     h= theta0/n
5     I= 0      # (à compléter) : initialisation de la somme
6     for i in range(0,n) : # (à compléter)
7         thetai=i*h
8         I = I+ 1/np.sqrt(np.cos(thetai)-np.cos(theta0)) # (à
    compléter) : calcul de la somme
9     I = I*h      # (à compléter) : multiplication par le pas
10    rapp = np.sqrt(2)/np.pi*I
11    plt.plot(theta0,rapp,'r*')
12 plt.grid()
13 plt.xlabel('theta0')
14 plt.ylabel('Rapport T/T0')
15 plt.show()

```



Pour $\theta_0 \ll 1$ rad, $\frac{T}{T_0} \approx 1$: on retrouve la situation des oscillations de faible amplitude.

La période T augmente quand θ_0 augmente et devient notablement différente de T_0 pour $\theta_0 > 0,8$ rad (environ)

« Commenter » ne veut pas dire « décrire la courbe » ou « enfoncez des portes ouvertes ». S'arrêter à « T/T_0 augmente avec θ_0 » juste en dessous d'une courbe croissante n'apporte rien.

Exercice n°2 Oscillations d'un cadre métallique (D'après ENAC 2025)

On considère un cadre métallique rectangulaire OADC, rigide et homogène (masse linéique uniforme), de longueur L et de largeur ℓ , capable de tourner autour d'un de ses longs côtés horizontaux CO.

L'étude est menée dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, auquel on associe le repère cartésien $\{0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Le côté CO est situé sur un axe de rotation Δ (horizontal) fixe dans $\mathcal{R}$, et orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_z$.

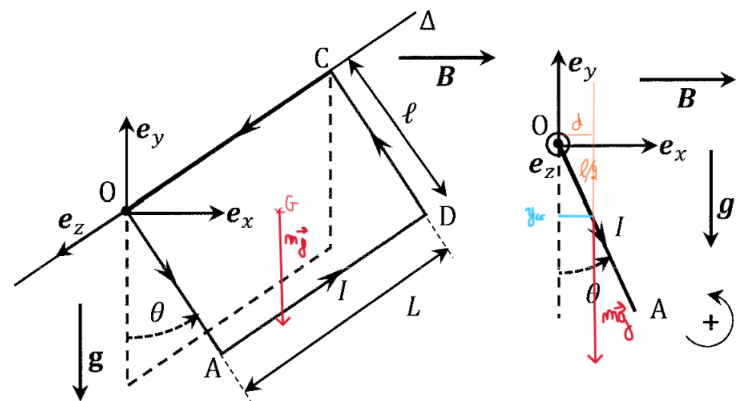
On note $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ le champ de pesanteur d'intensité, $\vec{e}_y$ étant un vecteur unitaire orienté dans le sens vertical ascendant.

On note θ l'angle qui repère le vecteur $\vec{OA}$ par rapport à la verticale descendante.

On néglige tout frottement, dont ceux de la liaison pivot, supposée parfaite.

On note m la masse du cadre et J_z son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ . Une alimentation, non représentée sur la figure, impose un courant stationnaire, d'intensité I le long du cadre, dans le sens indiqué sur la figure ($I > 0$). Enfin, le cadre est immergé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{e}_x$ où $B > 0$. On néglige l'auto-induction dans le cadre.

R1. Déterminer Γ_P le moment scalaire du poids du cadre par rapport à Δ (orienté).



Solution: Le poids s'exerce au centre d'inertie, situé au centre du cadre. En utilisant le bras de levier :

$$\Gamma_P = -mg\frac{\ell}{2} \sin(\theta)$$

R2. Donner, sans démonstration, le moment vectoriel du couple de Laplace s'exerçant sur le cadre.

Solution: Le moment vectoriel du couple de Laplace s'exerçant sur le cadre s'exprime selon $\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$

R3. Puis, l'exprimer en fonction de i , ℓ , L , B et un vecteur unitaire.

En déduire Γ_L le moment scalaire des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre par rapport à Δ (orienté).

Solution: Le moment des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre, par rapport à O est :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_L &= \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \\ &= I \vec{S} \wedge B \vec{u}_x \\ &= IL(\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y) \wedge B \vec{u}_x \\ &= -ILB \sin(\theta) \vec{u}_z \\ \text{par rapport à } Oz : \quad \Gamma_L &= -ILB \sin(\theta)\end{aligned}$$

R4. Déterminer la ou les positions angulaires d'équilibre θ_e du cadre.

Solution: Système : le cadre ; Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des actions mécaniques :

- poids
- force de Laplace
- action de la liaison pivot, parfaite

À l'équilibre, la somme des moments par rapport à (Oz) est nulle, donc $-mg \frac{\ell}{2} \sin(\theta_e) - ILB \sin(\theta_e) = 0$,

$$\text{soit } \left(mg \frac{\ell}{2} + ILB \right) \sin(\theta_e) = 0$$

Il y a deux positions d'équilibre : $\theta_e = 0$ ou $\theta_e = \pi$

R5. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ .

Solution: D'après le théorème du moment cinétique par rapport à (Oz) :

$$\begin{aligned}\frac{dL_{Oz}(\text{cadre})}{dt} &= \Gamma_P + \Gamma_L + \Gamma_{\text{pivot}} \\ J_z \ddot{\theta} &= - \left(mg \frac{\ell}{2} + ILB \right) \sin(\theta) \\ J \ddot{\theta} + \left(mg \frac{\ell}{2} + ILB \right) \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

R6. Exprimer la période T_0 du mouvement du cadre au voisinage de sa position d'équilibre stable.

Solution: Au voisinage de la position d'équilibre stable $\theta_e = 0$, $\sin(\theta) \approx \theta$, et l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \frac{\ell}{J_z} \left(\frac{mg}{2} + ILB \right) \theta = 0$ de pulsation propre $\omega_0 =$

$$\sqrt{\frac{\ell}{J_z} \left(\frac{mg}{2} + ILB \right)}, \text{ donc de période propre } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{\ell \left(\frac{mg}{2} + ILB \right)}}$$

R7. ♪ ♪ À un instant pris comme origine temporelle ($t = 0$), on lance le cadre depuis la position initiale $\theta(0) = 0$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(0) > 0$.

À l'aide d'un théorème énergétique, déterminer $\dot{\theta}(0)$ afin que le cadre puisse atteindre la position $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, avec une vitesse nulle.

Solution: D'après le théorème de l'énergie mécanique entre $t = 0$ ($\theta = 0$; $\dot{\theta} = 0$) et t_f ($\theta = \pi/2$; $\dot{\theta} = 0$).

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_m &= W_L \\ \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(t_f)^2 - \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(0)^2 + mg \times 0 - mg(-\ell/2) &= \int_0^{\pi/2} \Gamma_L d\theta \\ -\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(0)^2 + mg \frac{\ell}{2} &= \int_0^{\pi/2} -I \ell L B \sin(\theta) d\theta \\ -\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(0)^2 + mg \frac{\ell}{2} &= I \ell L B [\cos(\theta)]_0^{\pi/2} \\ -\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(0)^2 + mg \frac{\ell}{2} &= -I \ell L B \\ \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(0)^2 &= mg \frac{\ell}{2} + I \ell L B \\ \dot{\theta}(0)^2 &= \frac{\ell(mg + 2I \ell L B)}{J_z} \end{aligned}$$

Soit $\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{\ell(mg + 2I \ell L B)}{J_z}}$

R8. ♪ ♪ On coupe désormais le champ magnétique ($B = 0$) et on modifie les conditions de lancement du cadre de sorte qu'à l'instant initial : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{3mg\ell}{J_z}}$

Déterminer la valeur absolue de la vitesse angulaire minimale notée $\dot{\theta}_m$ atteinte par le cadre au cours de son mouvement.

Solution: Il y a maintenant conservation de l'énergie mécanique :

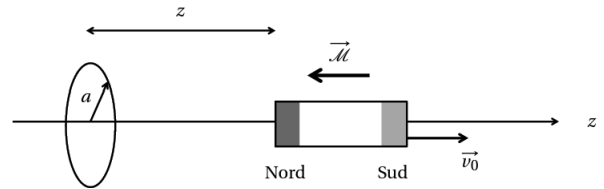
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_m^2 - \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}(0)^2 - mg \frac{\ell}{2} \cos(\theta_m) - \left(-mg \frac{\ell}{2} \right) &= 0 \\ \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_m^2 &= \frac{1}{2} \times 3mg\ell + mg \frac{\ell}{2} \cos(\theta_m) - mg \frac{\ell}{2} \\ \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_m^2 &= \frac{1}{2} \times 3mg\ell + mg \frac{\ell}{2} \cos(\theta_m) - mg \frac{\ell}{2} \\ \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_m^2 &= mg\ell + mg \frac{\ell}{2} \cos(\theta_m) \end{aligned}$$

$\dot{\theta}_m^2$ est minimale pour $\cos(\theta_m)$ minimale, soit $\cos(\theta_m) = -1$.

Ainsi : $\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_m^2 = mg\ell - mg \frac{\ell}{2}$, soit $J_z \dot{\theta}_m^2 = mg\ell$, soit $|\dot{\theta}_m| = \sqrt{\frac{mg\ell}{J_z}}$

Exercice n°3 Lois de l'induction

Un aimant droit de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ a son pôle Nord orienté vers un circuit composé d'une spire de rayon a , de centre O , d'axe Oz et assimilable électriquement à une résistance R . On fait glisser l'aimant le long de l'axe Oz en l'éloignant du circuit à vitesse constante v_0 .



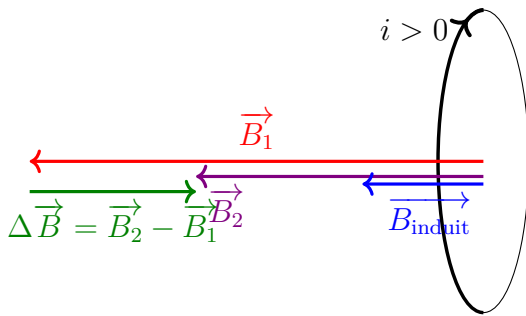
Le champ magnétique créé par l'aimant à une distance z sur l'axe est donné dans le cas où z est grande devant les dimensions de la spire par $\vec{B} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi z^3} \vec{e}_z = -\frac{K}{z^3} \vec{e}_z$.

R1. Énoncer la loi de Lenz.

Prévoir qualitativement le sens du courant d'intensité i positive. Cette réponse devra être très proprement justifiée, en s'appuyant sur un schéma clair et sur la loi précédente.

Solution: Les effets d'un phénomène d'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

En éloignant l'aimant par le pôle nord dont le champ est dirigé selon $-\vec{e}_z$, le champ vu par la spire diminue. Il apparaît un courant induit qui crée un champ magnétique induit de sens opposé au vecteur variation du champ magnétique. Ainsi $\vec{B}_{\text{induit}}$ est selon $-\vec{u}_z$.



position 1



position 2

À partir du sens de $\vec{B}_{\text{induit}}$ et en utilisant la règle de la main droite, on détermine le sens du courant positif.

R2. Énoncer la loi de Faraday.

Exprimer la force électromotrice induite e en fonction de μ_0 , $\mathcal{M}$, a , z , et de la vitesse $v_z = \dot{z}$ de l'aimant*.

Solution: Le courant induit par un phénomène d'induction est celui que créerait un générateur fictif de force électromotrice $e = -\frac{d\varphi}{dt}$

Le vecteur surface est porté par $-\vec{e}_z$

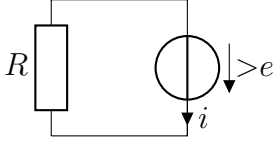
$$\begin{aligned} \text{Flux : } \varphi &= \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\text{spire}} -\frac{K}{z^3} \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z \\ &= -\frac{K}{z^3} \vec{e}_z \cdot (-\pi a^2) \vec{e}_z \\ &= \frac{K}{z^3} \pi a^2 \\ \text{fem : } e &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{K}{z^3} \pi a^2 \right) \\ &= \frac{3K}{z^4} \pi a^2 \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{2z^4} a^2 v_z \end{aligned}$$

*. Vous devriez obtenir : $e = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a^2}{2z^4} v_z$

D'où
$$e = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{2z^4} a^2 v_z$$

R3. Représenter le circuit électrique équivalent. Exprimer l'intensité i .

Solution:



D'après la loi des mailles et d'Ohm, on écrit $e - Ri = 0$

Soit
$$i = \frac{e}{R} = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{2Rz^4} a^2 v_z$$

R4. Si l'aimant s'éloigne de la spire, de quel signe est v_z ? Retrouve-t-on un résultat cohérent avec celui prévu initialement (**R1**) ?

Solution: Si l'aimant s'éloigne de la spire, $v_z > 0$, donc $i > 0$: ce qui est bien conforme au choix d'orientation effectué **R1**.

R5. Exprimer le moment magnétique de la spire. En déduire que la spire se comporte alors comme un aimant dont on précisera les pôles et si elle exerce une force d'attraction ou de répulsion sur le véritable aimant éloigné de la spire.

Solution: Le moment magnétique de la spire est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_s &= i \vec{S} \\ &= \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{2Rz^4} a^2 v_z \times (-\pi a^2) \vec{e}_z \\ &= -\frac{3\pi\mu_0 \mathcal{M}}{2R} \left(\frac{a}{z}\right)^4 v_z \vec{e}_z \\ &= -\frac{3\pi\mu_0 \mathcal{M}}{2R} \left(\frac{a}{z}\right)^4 \vec{v} \end{aligned}$$

Ce moment magnétique est de sens opposé au sens de déplacement de l'aimant. Ici, l'aimant se déplace selon $+\vec{u}_z$, donc $\vec{\mathcal{M}}_z$ est selon $-\vec{u}_z$, qui est de même sens que $\vec{\mathcal{M}}$, donc le « pôle nord de la spire » est à gauche sur le schéma, et « pôle sud de la spire » est du côté du pôle nord de l'aimant. **La spire exercera donc une action attractive sur l'aimant.**

R6. Si l'aimant est immobile mais proche de la spire, observe-t-on un courant ?

Solution: Si l'aimant est immobile, comme la spire, il n'y a aucun phénomène d'induction, et aucun courant n'existe dans la spire.