

? À rendre jeudi 04 juin 2026

Devoir Maison n°21 – Induction & Dichotomie – Corrigé

Exercice n°1 Gravimètre

On étudie le pendule ci-contre, constitué d'une tige homogène de longueur L accrochée à sa base à un ressort spirale exerçant un couple $\Gamma = -C\theta$, de constante de torsion $C > 0$.

Le moment d'inertie de la tige est noté J .

Tous les frottements seront négligés.

Partie A Mise en équation

R1. Donner les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle de torsion.

En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale.

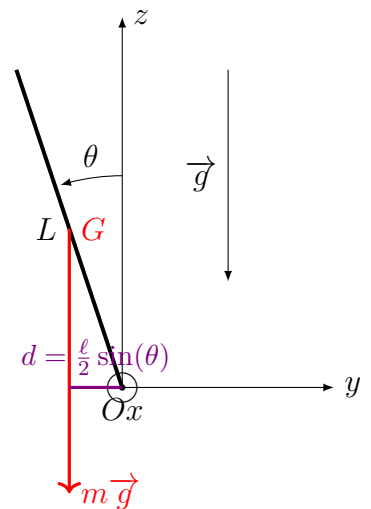
Solution:

Système : tige de masse m et de moment d'inertie J

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$, s'exerce en G , au centre de la tige
- action du ressort de torsion de moment $\Gamma = -C\theta$



⚠ Remarque –

Exprimer les énergies potentielles ne nécessitent pas d'établir l'intégrale première du mouvement.

Énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_{pp} = +mgz_G + K_1 = mg\frac{L}{2}\cos(\theta) + K_1$ **Attention aux signes !**

Énergie potentielle de torsion : $\mathcal{E}_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + K_2$

Énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p = mg\frac{L}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}C\theta^2 + K$

R2. Comment caractérise-t-on une position d'équilibre en terme d'énergie potentielle ?

En déduire l'équation vérifiée par θ_e : $\sin(\theta_e) = \frac{2C}{mgL}\theta_e$.

L'écrire sous la forme $h(\theta_e) = 0$, on donnera l'expression de la fonction h .

Solution:



Remarque –

En une position d'équilibre, la fonction $\mathcal{E}_p : \theta \mapsto \mathcal{E}_p(\theta)$ est extrémale, donc, il faut dériver par rapport à θ , puis évaluer chercher son annulation pour déterminer l'équation vérifiée par θ_e .

En une position d'équilibre $\theta_e : \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(\theta_e) = 0$

Or $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta) + C\theta$

Ainsi, en $\theta_e : -mg\frac{L}{2}\sin(\theta_e) + C\theta_e = 0$

Soit $mg\frac{L}{2}\sin(\theta_e) = C\theta_e$

On identifie la fonction h telle que $h : \theta_e \mapsto \sin(\theta_e) - \frac{2C}{mgL}\theta_e$

Partie B Résolution numérique

L'équation de la question **R2** ne peut être résolue analytiquement. On utilise pour cela l'algorithme de dichotomie.

R3.  Écrire la fonction `h(theta)` définie **R2** sur `capytale`.

Solution:

```
1 def h(theta):
2     return np.sin(theta) - 2*C/(m*g*L)*theta
```



Remarque – Parenthèses

$2C/m*g*L$ est équivalent à $\frac{2C}{m} \times gL$

R4. À partir du graphique de $h(\theta)$, déterminer l'intervalle sur lequel appliquer la fonction **dichotomie**.

Solution:

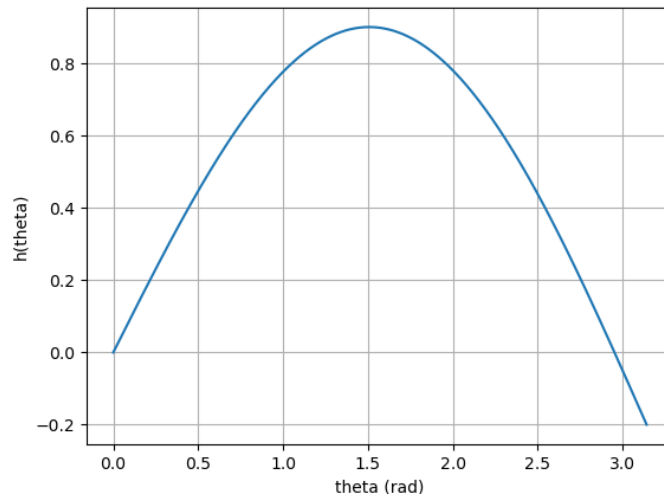


Remarque – Cadre de la dichotomie

L'algorithme de dichotomie doit être appliqué sur un intervalle où h est **strictement monotone** et **s'annule**.

⚠ L'intervalle $[0, \pi]$ ne respecte pas la monotonie.

L'algorithme de dichotomie s'applique à une fonction **strictement monotome sur un intervalle où elle s'annule**, on peut choisir l'intervalle $[2, \pi]$ (ou $[2.5, \pi], \dots$) sur lequel h est strictement monotone, et s'annule.



R5. Compléter la fonction dichotomie sur le fichier capytale

Solution:



Remarque – Algorithme de dichotomie à connaître.

Il faut connaître l'algorithme, savoir l'expliquer, et savoir écrire le code.

```
1 def dichotomie(f,a,b,eps):
2     while abs(b-a)>eps : # tant que |b-a| est supérieur à eps
3         c = (a+b)/2 # centre de l'intervalle
4         if f(a)*f(c)<0 # f(a) et f(c) sont de signes opposés
5             b=c # f s'annule sur l'intervalle [a,c]
6         else:
7             a=c # sinon, f s'annule sur [c,b]
8     return c
```

R6. Écrire sur votre copie la ligne de code qui permet d'obtenir la valeur approchée de θ_e à 10^{-2} près en utilisant la fonction dichotomie.



Écrire cette ligne de code sur le fichier python, et l'exécuter.

Écrire sur votre copie la valeur de θ_e obtenue.

Solution:

```
1 >>> dichotomie(h,2,np.pi,10**-2)
2 2.9543001088602177
```

Ainsi $\theta_e = 2,95 \text{ rad}$

Exercice n°2 Puce RFID

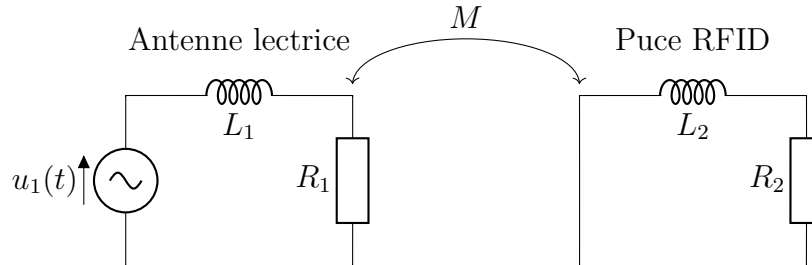
Un système RFID utilise un couplage inductif entre une antenne lectrice (circuit primaire) et une étiquette RFID (circuit secondaire). L'étiquette est passive : elle n'a pas de batterie et tire son énergie du champ magnétique de l'antenne lectrice. Le système est modélisé par :

1. Circuit primaire : Antenne lectrice alimentée par une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$.

2. Circuit secondaire : Étiquette RFID modélisée par une boucle de résistance R_2 et d'inductance L_2 , couplée au primaire par une induction mutuelle M .

Données numériques :

- Fréquence d'alimentation : $f = 125\text{kHz}$ (typique pour les RFID basses fréquences).
- $U_1 = 10\text{ V}$; $R_1 = 1,0\ \Omega$ (résistance de l'antenne lectrice) ; $L_1 = 100\ \mu\text{H}$ (inductance propre de l'antenne).
- $R_2 = 50\ \Omega$ (résistance de l'étiquette) ; $L_2 = 1,0\ \mu\text{H}$ (inductance propre de l'étiquette).
- $M = 5,0\ \mu\text{H}$ (inductance mutuelle)



- R1. Rappeler les définitions de l'inductance propre et de l'inductance mutuelle.

Solution: L'inductance propre L est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité qui circule dans le circuit qui lui a donné naissance : $\varphi_P = Li$
L'inductance mutuelle entre deux circuits couplés est le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 et l'intensité i_1 : $\varphi_{1\rightarrow 2} = Mi_1$ et $\varphi_{2\rightarrow 1} = Mi_2$.

- R2. Exprimer les forces électromotrices induites (incluant tous les phénomènes d'induction) dans chaque circuit.

Solution:

- Le flux à travers le circuit 1 est la somme du flux propre (flux du champ magnétique créé par 1 à travers lui-même) et du flux du champ magnétique $\vec{B}_2$ à travers le circuit 1 :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \varphi_{1P}(t) + \varphi_{2\rightarrow 1}(t) \\ &= L_1 i_1(t) + M i_2(t)\end{aligned}$$

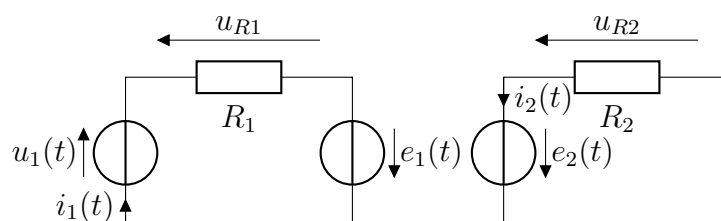
- Fem induite dans le circuit 1 :

$$\begin{aligned}e_1(t) &= -\frac{d\varphi_1}{dt} \\ &= -\frac{d\varphi_{1P}}{dt} - \frac{d\varphi_{2\rightarrow 1}}{dt} \\ &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

De même , dans le circuit 2 : $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

- R3. Représenter les circuits électriques équivalents et établir les deux équations différentielles couplées vérifiées par i_1 et i_2 .

Solution:



- Loi des mailles dans le circuit 1 : $u_1(t) - u_{R1} + e_1 = 0$

$$\text{Soit } u_1(t) = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

- Loi des mailles dans le circuit 2 : $-u_{R2} + e_2 = 0$

$$\text{Soit } 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

L'alimentation u_1 étant sinusoïdale, et le phénomène étant linéaire, toutes les grandeurs électriques sont sinusoïdales à la même pulsation ω : $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \psi_1)$ et $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \psi_2)$.

R4. Donner les représentations complexes de i_1 et i_2 et introduire les amplitudes complexes $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$.

Solution: $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \psi_1) \longrightarrow \underline{i}_1 = I_1 e^{j(\omega t + \psi_1)} = \underline{I}_1 e^{j\omega t}$, avec $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$
 $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \psi_2) \longrightarrow \underline{i}_2 = I_2 e^{j(\omega t + \psi_2)} = \underline{I}_2 e^{j\omega t}$, avec $\underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$

R5. À partir des deux équations différentielles couplées, obtenir un système de deux équations vérifiées par $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$.

Solution: En passant en complexe :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= R_1 \underline{i}_1 + L_1 j\omega \underline{i}_1 + M j\omega \underline{i}_2 \\ U_1 &= (R_1 + L_1 j\omega) \underline{I}_1 + M j\omega \underline{I}_2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= R_2 \underline{i}_2 + L_2 j\omega \underline{i}_2 + M j\omega \underline{i}_1 \\ 0 &= (R_2 + L_2 j\omega) \underline{I}_2 + M j\omega \underline{I}_1 \quad (2) \end{aligned}$$

R6. En déduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{(R_2 + L_2 j\omega) U_1}{R_1 R_2 + (M^2 - L_1 L_2) \omega^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) j\omega} \\ \underline{I}_2 &= \frac{-j\omega M U_1}{R_1 R_2 + (M^2 - L_1 L_2) \omega^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) j\omega} \end{aligned}$$

Solution:

$$(2) \quad \underline{I}_2 = \frac{-M j\omega}{R_2 + L_2 j\omega} \underline{I}_1 \quad (2')$$

$$\text{dans (1)} \quad U_1 = (R_1 + L_1 j\omega) \underline{I}_1 + M j\omega \times \frac{-M j\omega}{R_2 + L_2 j\omega} \underline{I}_1$$

$$U_1 = \frac{(R_1 + L_1 j\omega)(R_2 + L_2 j\omega) + (M\omega)^2}{R_2 + L_2 j\omega} \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_1 = \frac{R_2 + L_2 j\omega}{R_1 R_2 + M^2 \omega^2 - L_1 L_2 \omega^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) j\omega} U_1$$

$$\text{dans (2')} \quad \underline{I}_2 = \frac{-M j\omega}{R_2 + L_2 j\omega} \times \frac{R_2 + L_2 j\omega}{R_1 R_2 + M^2 \omega^2 - L_1 L_2 \omega^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) j\omega} U_1$$

$$\underline{I}_2 = \frac{-j\omega M U_1}{R_1 R_2 + (M^2 - L_1 L_2) \omega^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) j\omega}$$

R7. En déduire les expressions des amplitudes I_1 et I_2 .

Solution: Les amplitudes s'obtiennent par le calcul du module :

$$I_1 = \frac{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}U_1}{\sqrt{(R_1R_2 + (M^2 - L_1L_2)\omega^2)^2 + (R_1L_2 + R_2L_1)^2\omega^2}}$$

$$I_2 = \frac{M^2\omega^2U_1}{\sqrt{(R_1R_2 + (M^2 - L_1L_2)\omega^2)^2 + (R_1L_2 + R_2L_1)^2\omega^2}}$$

R8. Calculer numériquement le rapport $x = \frac{I_2}{I_1}$.

Solution: A.N. : $\frac{I_2}{I_1} = \frac{M^2\omega^2}{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}} = 0,31$

R9. À partir des équations différentielles obtenues R3, établir le bilan de puissance global, puis l'écrire sous la forme $\mathcal{P}_1 = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} + \mathcal{P}_J$. Identifier les différents termes.

Solution: On repart des lois des mailles que l'on multiplie par l'intensité du courant dans la maille considérée :

Circuit 1 :

$$u_1(t) \times i_1(t) = R_1 i_1(t)^2 + L_1 \frac{di_1}{dt} \times i_1(t) + M \frac{di_2}{dt} \times i_1(t)$$

$$u_1(t) \times i_1(t) = R_1 i_1(t)^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 \right) + M \frac{di_2}{dt} \times i_1(t)$$

Circuit 2 :

$$0 = R_2 i_2(t)^2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \times i_2(t) + M \frac{di_1}{dt} \times i_2(t)$$

$$0 = R_2 i_2(t)^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 \right) + M \frac{di_1}{dt} \times i_2(t)$$

On somme les deux bilans énergétiques :

$$u_1(t) \times i_1(t) = R_1 i_1(t)^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 \right) + M \frac{di_2}{dt} \times i_1(t) + R_2 i_2(t)^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 \right) + M \frac{di_1}{dt} \times i_2(t)$$

$$u_1(t) \times i_1(t) = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 \right) + M \left(\frac{di_2}{dt} i_1 + \frac{di_1}{dt} i_2 \right)$$

$$u_1(t) \times i_1(t) = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 + M i_1 i_2 \right)$$

- Puissance fournie par le générateur de tension : $u_1(t) \times i_1(t)$;
- Puissance dissipée par effet Joule dans les deux résistances : $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$
- Puissance magnétique reçue par le système : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 + M i_1 i_2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt}$, avec

$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2 + M i_1 i_2$ qui est l'énergie stockée par le système sous forme magnétique, où $M i_1 i_2$ est l'énergie de couplage magnétique entre les deux circuits.

Pour un signal y T -périodique, $\left\langle \frac{dy}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dy}{dt} dt = 0$ et $\langle A_m^2 \cos^2(\omega t + \psi) \rangle = \frac{A_m^2}{2}$

R10. Montrer que le bilan de puissance en moyenne sur une période s'écrit : $\langle \mathcal{P}_f \rangle = \langle R_1 i_1^2 \rangle + \langle R_2 i_2^2 \rangle$

Solution: En moyenne :

$$\begin{aligned} u_1 i_1 &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \\ \langle u_1 i_1 \rangle &= \langle R_1 i_1^2 \rangle + \langle R_2 i_2^2 \rangle + \left\langle \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \right\rangle \\ \langle u_1 i_1 \rangle &= \langle R_1 i_1^2 \rangle + \langle R_2 i_2^2 \rangle \end{aligned}$$

R11. En déduire le rendement du transfert défini comme le rapport de la puissance électrique moyenne reçue par la puce sur la puissance moyenne fournie par le générateur, en fonction de R_1 , R_2 et x .

Faire l'application numérique.

Solution: Rendement :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\langle R_2 i_2^2 \rangle}{\langle u_1 i_1 \rangle} \\ \eta &= \frac{\langle R_2 i_2^2 \rangle}{\langle R_1 i_1^2 \rangle + \langle R_2 i_2^2 \rangle} \\ &= \frac{R_2 \frac{I_2^2}{2}}{R_1 \frac{I_1^2}{2} + R_2 \frac{I_2^2}{2}} \\ &= \frac{R_2 x^2}{R_1 + R_2 x^2} \\ &= 0,83 \end{aligned}$$

Exercice n°3 Bobines de Ruhmkorff

Solution:

Expérience 1 : le circuit secondaire est ouvert, donc $i_2 = 0$.

On étudie le circuit primaire seul qui est donc un simple circuit RL.

La loi des mailles donne :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_g + R_0) i_1 = e(t),$$

soit $\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_1} = \frac{e(t)}{L_1},$

avec $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1 + R_g + R_0}$

L'évolution tracée sur la figure A est obtenue pour $t < t_1 = 110 \mu\text{s}$ pour $e(t) = E$ (une constante) et pour $t > 110 \mu\text{s}$ pour $e(t) = 0$

Pour $t > 110 \mu\text{s}$, l'évolution de $i_1(t)$ s'écrit $i_1(t) = K e^{-(t-t_1)/\tau_1},$

soit $u_0 = R_0 i_1(t) = R_0 K e^{-(t-t_1)/\tau_1}$

La tension aux bornes d'une résistance suit exactement la même allure.

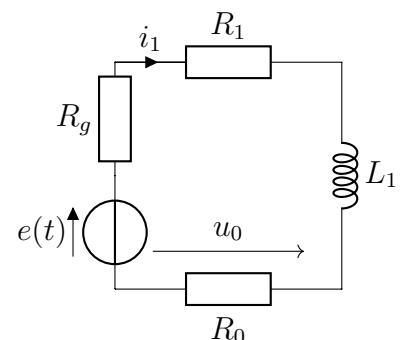
On peut alors déterminer τ_1 , en notant qu'à l'instant τ_1 : $i_1(t = t_1 + \tau_1) = 0,37 i_1(t_1)$

On lit $u_0(t_1) = 0,92 \text{ V}$, donc $u_0(t_1 + \tau_1) = 0,37 \times 0,92 = 0,34 \text{ V}$

Graphiquement on lit l'instant $t_1 + \tau_1$ auquel u_R vaut $0,34 \text{ V}$: $t_1 + \tau_1 = 140 \mu\text{s}$

Ainsi $\tau_1 = 30 \mu\text{s}$

Soit $L_1 = \tau_1 \times (R_1 + R_0 + R_g) = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ H}$: ce qui correspond à des valeurs d'inductance habituelles.



Expérience 2 : le circuit primaire est ouvert, nous pouvons donc étudier le circuit secondaire seul.

En RSF, on utilise la notation complexe.

Pont diviseur de tension pour L_2 : $\underline{u_2} = \frac{L_2 j\omega + R_2}{L_2 j\omega + R_a + R_2} \underline{e}$

Pont diviseur de tension pour R_a : $\underline{u_a} = \frac{R_a}{L_2 j\omega + R_a + R_2} \underline{e}$

Ainsi $\frac{\underline{u_2}}{\underline{u_a}} = \frac{L_2 j\omega + R_2}{R_a}$

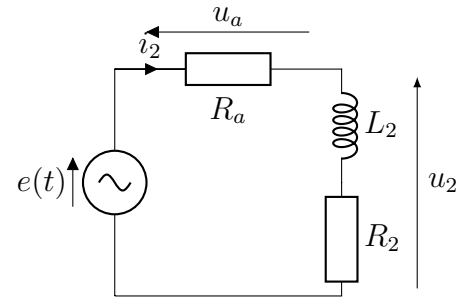
On peut donc déterminer L_2 en lisant les amplitudes des tensions u_2 et u_a :

$$\frac{U_2}{U_a} = \frac{\sqrt{L_2^2 \omega^2 + R_2^2}}{R_a}, \text{ soit } L_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_a^2 \frac{U_2^2}{U_a^2} - R_2^2}$$

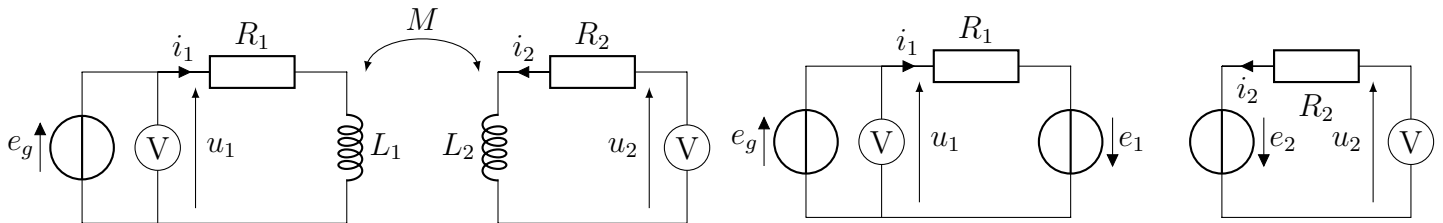
On lit la période $T = 0,05$ s, soit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 40\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On lit les amplitudes $U_{2/a} = 4,9$ V et $U_{a/2} = 1,9$ V (le graphe ne précise pas qui est qui).

On obtient $L_2 = 190$ H pour $U_2 = 4,9$ V et $U_a = 1,9$ V (l'autre combinaison est impossible).



Expérience 3



- 1^{re} bobine. Flux magnétique : $\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2$

Fem induite : $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

Loi des mailles : $e_1 + u_1 - R_1 i_1 = 0$, soit $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1$

En notation complexe $\underline{u_1} = (R_1 + L_1 j\omega) \underline{i_1} + M j\omega \underline{i_2}$

- 2^e bobine. Flux magnétique : $\varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1$

Fem induite : $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

Loi des mailles : $e_2 + u_2 - R_2 i_2 = 0$, soit $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2$

En notation complexe $\underline{u_2} = (R_2 + L_2 j\omega) \underline{i_2} + M j\omega \underline{i_1}$

Or le voltmètre branché aux bornes de la deuxième bobine est de très grande impédance, donc $i_2 \approx 0$

D'où $\underline{u_1} = (R_1 + L_1 j\omega) \underline{i_1}$ et $\underline{u_2} = M j\omega \underline{i_1}$

Ainsi $\frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{M j\omega}{L_1 j\omega + R_1}$

Ainsi le gain vaut $G = \frac{M\omega}{\sqrt{R_1^2 + (L_1 \omega)^2}}$

On peut négliger R_1 devant $L_1 \omega$ à haute fréquence, ce qui est confirmé sur le diagramme fourni où le gain en décibels est constant à haute fréquence : $G \approx \frac{M}{L_1}$.

On lit $G_{dB} = 42$ dB, avec $G_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{M}{L_1} \right)$

Soit $M = L_1 \times 10^{G_{dB}/20} = 0,6$ H