

? À rendre jeudi 11 juin 2026

Devoir Maison n°22 le dernier :'(— Induction — Corrigé

Exercice n°1 Haut-parleur électrodynamique (D'après E3A PSI 2021 (et 10 autres épreuves))

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (figure ??). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe $(X'X)$, de résistance R , d'inductance propre L , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction $(X'X)$ normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique $x(t)$, elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$. On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.

La bobine est placée dans un champ magnétique radial $\vec{B}$, uniforme en norme, normal à $(X'X)$, créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la figure 1. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.) $E(t)$ délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur ℓ qui se déplace de $x(t)$. Cette grandeur $x(t)$ représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur ℓ_0 . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note m_T la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe z , l'axe x étant horizontal. On note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base des vecteurs unitaires de la figure 1.

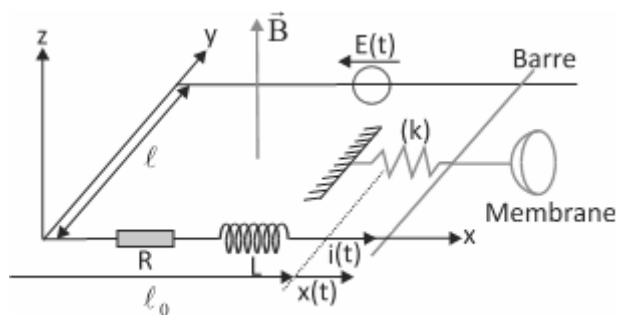


FIGURE 1 – Schéma du haut-parleur de l'étude

R1. Montrer que la f.é.m. induite e dans le cadre vaut $e = -Blv(t)$ est la vitesse, dérivée de $x(t)$.

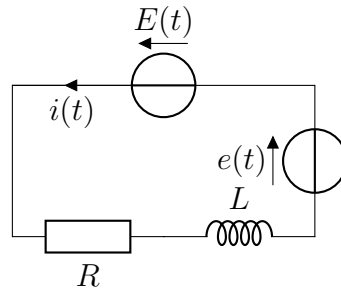
Solution: La f.é.m induite par le déplacement de la tige est donnée par la loi de Faraday :

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} \\ &= -\frac{d(B\vec{u}_z \cdot (\ell_0 + x(t))\ell\vec{u}_z)}{dt} \\ &= -\frac{d(B(\ell_0 + x(t))\ell)}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi $e = -Blv(t)$

R2. Dédurre de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera $i(t)$ le courant induit dans ce circuit.

Solution:



Loi des mailles : $e(t) + E(t) - Ri(t) - L \frac{di}{dt} = 0$

Soit $E(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + Blv$ (EE)

R3. Établir l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la tige.

Solution: force de Laplace :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathcal{L}} &= \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= \int_0^\ell i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z \\ &= iB \int_0^\ell dy \vec{u}_x \\ &= iB\ell \vec{u}_x \end{aligned}$$

R4. Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble { barre + haut-parleur } de masse m_T . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

Solution: Système : équipage mobile de masse m

Référentiel : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m_T \vec{g}$;
- réaction du support (au niveau des rails) : $\vec{R}_N$ (frottements solides négligés) ;
- force de rappel élastique : $\vec{f}_{\text{él}} = -kx(t)\vec{u}_x$;
- force de frottement fluide : $\vec{f}_f = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$
- force de Laplace $\vec{F}_{\mathcal{L}} = iB\ell \vec{u}_x$

D'après le principe fondamental de la dynamique à l'équipage mobile dans le référentiel terrestre :

$$m_T \vec{a}(G) = m_T \vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{\text{él}} + \vec{f}_f + \vec{F}_{\mathcal{L}}$$

On projette selon $\vec{u}_x$: $m_T \ddot{x} = -kx(t) - \alpha \dot{x} + i\ell B$ (EM)

R5. Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

Solution: Pour effectuer le bilan de puissance, il faut multiplier (EE) par i et (EM) par $\dot{x}$, puis les combiner en « éliminant » le terme croisé en $\dot{x}i$.

$$E(t) \times i(t) = Ri^2 + L \frac{di}{dt} \times i(t) + Ba\dot{x} \times i(t)$$

$$\text{Soit } E(t)i(t) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ba\dot{x}i$$

$$m_T \ddot{x} \times \dot{x} = -kx(t) \times \dot{x} - \alpha \dot{x}^2 + \ell B \dot{x} \times \dot{x}$$

$$\text{Soit } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) - \alpha \dot{x}^2 + \ell B \dot{x} \dot{x}$$

$$\text{Ainsi } E(t)i(t) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right)}_{\substack{d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,el}) \\ = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}}} + \alpha \dot{x}^2$$

$$\text{Ainsi } Ei = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} + \alpha \dot{x}^2 + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

La puissance fournie par le générateur Ei est en partie convertie en énergie mécanique ($\mathcal{E}_m$), une partie est émise sous forme d'onde sonore ($\alpha \dot{x}^2$), une partie est perdue par effet Joule dans la résistance des fils, enfin une partie est emmagasinée sous forme d'énergie magnétique.

R6. Comparer la puissance de la f.é.m. $\mathcal{P}_{fem} = ei$ à la puissance de la force de Laplace $\mathcal{P}_L$.

Solution: On constate que $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \overrightarrow{F_{\mathcal{L}}} \cdot \overrightarrow{v} = \ell B \dot{x} = -\mathcal{P}(\text{f.é.m induite par le déplacement}) = -B\ell \dot{x}i$
L'intégralité de la puissance des forces de Laplace est convertie en énergie électrique disponible dans le circuit.

R7. Le générateur délivre une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$, $E(t)$ s'identifiant alors avec la partie réelle de $\underline{E}(t)$.

Montrer que l'on a $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i} = \underline{Z}_m \underline{i}$, où $\underline{i}$ est le courant complexe traversant le circuit et $\underline{Z}_m$ est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de B , ℓ , α , m_T , ω et k .

Solution: Écrivons les deux équations (EE) et (EM) en complexe :

$$\begin{cases} \underline{E} &= Ri + Lj\omega \underline{i} + B\ell j\omega \underline{x} \\ -m_T \omega^2 \underline{x} &= -k\underline{x} - \alpha j\omega \underline{x} + \underline{i}\ell B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{E} &= \left(R + Lj\omega + B\ell j\omega \times \frac{aB}{k - m_T \omega^2 + \alpha j\omega} \right) \underline{i} \\ \underline{x} &= \frac{\ell B}{k - m_T \omega^2 + \alpha j\omega} \underline{i} \end{cases}$$

$$\text{Soit } \underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}} = R + Lj\omega + \frac{(B\ell)^2 j\omega}{k - m\omega^2 + \alpha j\omega}$$

$$\text{On introduit l'impédance motionnelle } \underline{Z}_m = \frac{(B\ell)^2 j\omega}{k - m_T \omega^2 + \alpha j\omega}$$

R8. 🎵 🎵 Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m \omega + \frac{1}{jL_m \omega}$$

Donner l'expression des termes R_m , C_m et L_m en fonction de B , ℓ , α , m_T et k .

Solution:

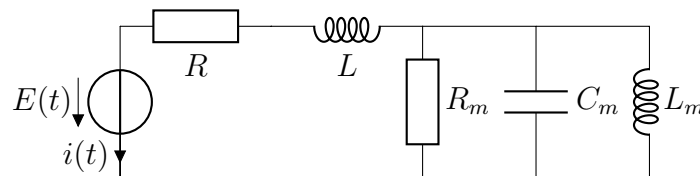
$$\begin{aligned} \underline{Z_m} &= \frac{(B\ell)^2 j\omega}{k - m_T \omega^2 + \alpha j\omega} \\ \frac{1}{\underline{Z_m}} &= \frac{k}{(B\ell)^2 j\omega} - \frac{m_T \omega^2}{(B\ell)^2 j\omega} + \frac{\alpha}{(B\ell)^2} \\ \frac{1}{\underline{Z_m}} &= \frac{k}{(B\ell)^2 j\omega} + \frac{m_T}{(B\ell)^2} j\omega + \frac{\alpha}{(B\ell)^2} \\ \frac{1}{\underline{Z_m}} &= \frac{1}{L_m j\omega} + C_m j\omega + \frac{1}{R_m} \end{aligned}$$

avec :

- « inductance motionnelle » : $L_m = \frac{(B\ell)^2}{k}$
- « capacité motionnelle » : $C_m = \frac{m_T}{(B\ell)^2}$
- « résistance motionnelle » : $R_m = \frac{(B\ell)^2}{\alpha}$

R9. 🎵 🎵 Déduire de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Solution: D'après $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z_m})\underline{i}$ on peut conclure que le haut-parleur peut être modélisé par l'association série d'une résistance R , d'une bobine L et d'une impédance $\underline{Z_m}$. L'admittance de cette dernière est égale à une somme d'admittance, et correspond donc à l'association parallèle de R_m , C_m et L_m .



Le rendement η du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

R10. 🎵 🎵 Montrer que la relation établie à la question R5 devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$$

Commenter ce résultat.

Solution:

$$\begin{aligned} Ei &= \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} + \alpha v^2 + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \\ \langle Ei \rangle &= \left\langle \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \right\rangle + \langle \alpha v^2 \rangle + \langle Ri^2 \rangle + \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \right\rangle \\ \left\langle \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} dt \\ \left\langle \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} (\mathcal{E}_m(T) - \mathcal{E}_m(0)) \\ &= 0 \\ \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\langle Ei \rangle = \langle \alpha v^2 \rangle + \langle Ri^2 \rangle$: en moyenne sur une période, la puissance fournie par le générateur est convertie en puissance sonore, et en chaleur par dissipation par effet Joule dans les fils conducteurs.

En identifiant la puissance émise par l'onde sonore $\langle \mathcal{P}_{son} \rangle$ à $\langle \alpha v^2 \rangle$, où v est la vitesse de la membrane, on peut montrer que η est de la forme :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

avec $Q = \frac{\sqrt{km_T}}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_T}}$.

R11. 🎵 🎵 Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de ω_0 .

Pourquoi est-il nécessaire pour restituer un son de qualité, de combiner plusieurs hauts-parleurs ?

Solution: D'après l'expression fournie : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta = 0 = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \eta$

De plus, η est maximal quand le dénominateur est minimal (puisque le numérateur est indépendant de ω), ce qui se produit pour $\omega = \omega_0$, où $\eta(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m}}$

Le haut parleur se comporte comme un filtre passe-bande : les signaux de pulsations proches de la pulsation de résonance ω_0 sont transmis avec une amplitude notable, ce qui n'est pas le cas pour les signaux de pulsations faibles ou grandes devant ω_0 .

Exercice n°2 Compresseur d'une pompe à chaleur 🎵 🎵 🎵 (D'après Centrale-Supélec TSI 2016)

Le compresseur (d'une pompe à chaleur ou d'un réfrigérateur) fonctionne grâce à un moteur asynchrone que nous allons à présent étudier. Le moteur asynchrone est constitué de deux bobinages fixes (modélisés par des solénoïdes infinis) et d'une bobine plate carrée en rotation autour d'un axe fixe. Il est alimenté par le secteur via une prise de courant classique.

Dans tout cet exercice, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En faisant abstraction des spires manquantes dans la partie centrale, on considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon A , de grande dimension selon leur axe, disposés de sorte que leurs axes respectifs ($x'x$) et ($y'y$) soient perpendiculaires et concourant au point O (Figure 2).

Ils comportent n spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs $i_1(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \alpha)$ où ω_0 est une pulsation constante. Le sens de parcours des courants est indiqué sur la Figure 2.

On rappelle qu'un solénoïde infini de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant i crée un champ magnétique de norme $\mu_0 n i$.

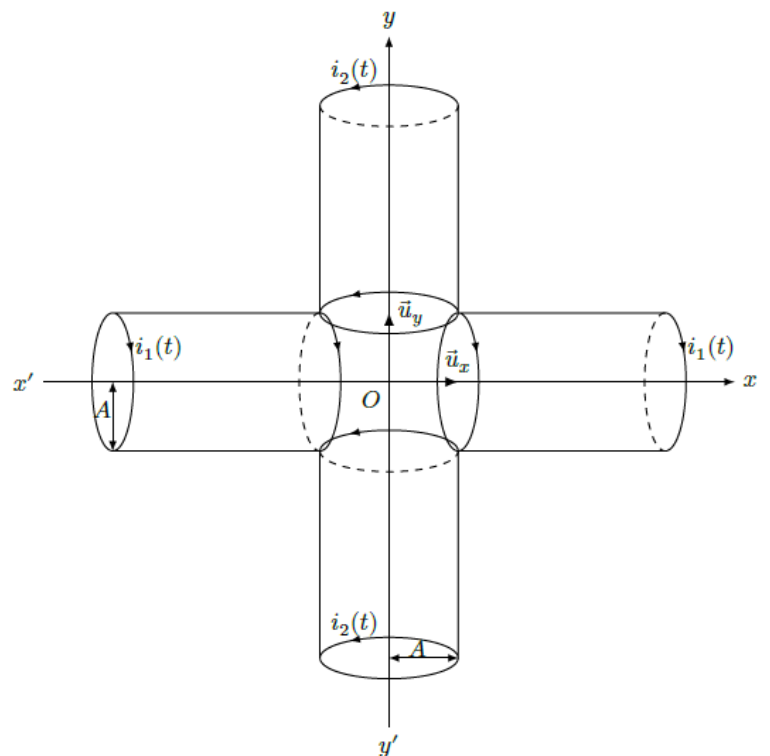
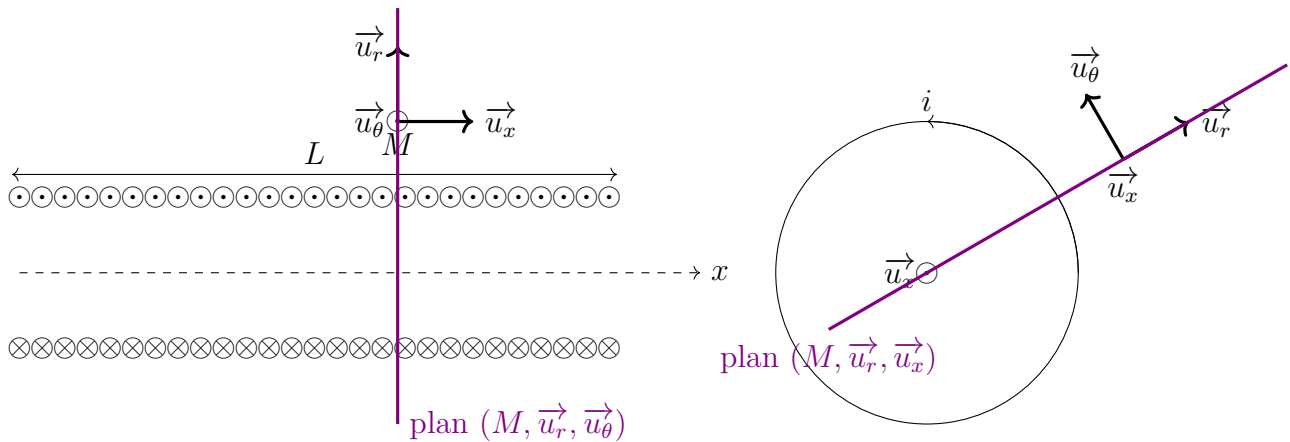


FIGURE 2 – Moteur asynchrone

- R1. Par une étude rigoureuse des symétries et des invariances, déterminer la forme générale du champ magnétique créé par le solénoïde (1). Enfin, compte tenu de l'orientation de i_1 , déterminer son expression complète.

Solution: Soit $M(r, \theta, x)$ un point de l'espace quelconque.



Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, donc les composantes selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ est nulle.

Conclusion : $\vec{B}(M) = B_x(r, \theta, x)\vec{u}_x$

La distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Ox) , donc B_x ne dépend pas de x .
La distribution de courant est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) d'angle θ , donc B_x ne dépend pas de θ .

Conclusion : $\vec{B}(M) = B_x(r)\vec{u}_x$

d'après la règle de la main droite avec i_1 , le champ magnétique est selon $+\vec{u}_x$, d'où $\boxed{\vec{B}_1(M) = \mu_0 n i_1 \vec{u}_x}$

- R2. On considère maintenant l'association des deux solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus (Figure 2).

Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé en O dans les cas où $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = -\pi/2$.

Pourquoi peut-on qualifier ce champ magnétique de « champ tournant » ?

Solution: Champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé en O :

$$\vec{B}(O, t) = \vec{B}_1(O, t) + \vec{B}_2(O, t) = \mu_0 n i_1(t) \vec{u}_x + \mu_0 n i_2(t) (-\vec{u}_y)$$

ATTENTION À LA RÈGLE DE LA MAIN DROITE (notamment pour $\vec{B}_2$, petit piège si on n'y fait pas attention ...)

$$\text{Ainsi } \vec{B}(O, t) = \mu_0 n I_M \left(\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x - \left(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_y \right)$$

$$\text{Soit } \boxed{\vec{B}(O, t) = \mu_0 n I_M \left(\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x \pm \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y \right)}$$

Ce champ magnétique de « champ tournant » car au cours du temps la direction du champ magnétique tourne à la pulsation ω_0 (l'angle entre l'axe (Ox) et le champ $\vec{B}$ vaut $\omega_0 t$) tout en gardant une norme fixe égale à $\mu_0 n I_M$.

$$\text{Pour } \alpha = \pi/2 : \boxed{\vec{B}(O, t) = \mu_0 n I_M \left(\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x + \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y \right)}$$

Dans la suite du problème, on se placera dans le premier cas $\alpha = \pi/2$.

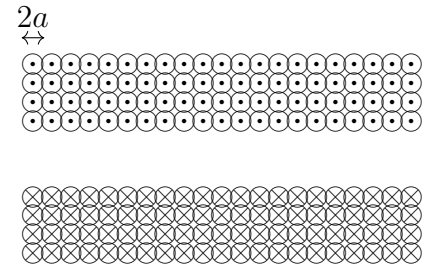
- R3. Chaque solénoïde est constitué d'un enroulement de 4 rangées de spires jointives. On donne $a = 0,25$ mm le rayon du fil de cuivre utilisé, et $I_M = 0,1$ A. Calculer la norme du champ magnétique créé en O . Commenter.

Solution:

Norme du champ magnétique créé en O : $B_m(O) = \mu_0 n I_M$

Commençons par déterminer le nombre de spires par unité de longueur : $n = \frac{4}{2a}$ (il y a 4 spires sur la distance $2a$).

A.N. : $B_m(O) = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ T}$



On place en O une bobine plate carrée (S) de surface $S = b^2$ comportant N spires orientées (Figure 3). Le vecteur surface $\vec{S} = b^2 \vec{n}$ reste dans le plan xOy où il est repéré à la date t par l'angle $\theta(t) = \omega t$ par rapport à Ox .

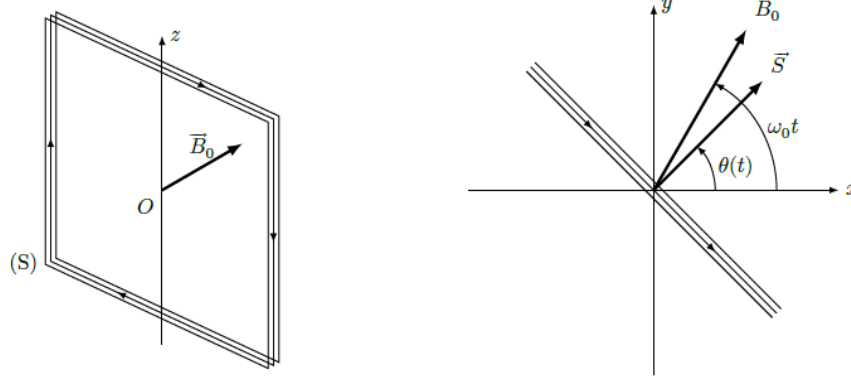


FIGURE 3 – Bobine rectangulaire

Cette bobine (S) possède une résistance R et une inductance propre L .

Le côté b de la bobine plate (S) est supposé très petit devant le rayon A des deux solénoïdes. Ainsi, le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé par les deux solénoïdes peut être supposé uniforme sur toute la surface S de la bobine (S), on le notera $\vec{B}_0$. Dans le plan xOy , il est repéré à la date t par l'angle $\omega_0 t$ (Figure 3).

En fonctionnement, cette bobine (S) entraîne le reste du dispositif en exerçant sur lui un couple $+\Gamma \vec{u}_z$. On considère que la liaison entre la bobine et son support est parfaite.

R4. Justifier sans calcul l'existence d'un courant induit $i(t)$ dans la bobine (S).

Solution: La bobine (S) est placée dans le champ magnétique $\vec{B}_0(t)$ qui tourne, par conséquent le flux du champ magnétique $\vec{B}_0(t)$ varie au cours du temps à travers la bobine (S), il se produit un phénomène d'induction, qui se traduit par l'apparition d'un courant électrique induit dans la bobine (S).

R5. Justifier sans calcul l'origine du mouvement de la bobine (S).

Solution: La bobine (S) parcourue par un courant électrique et plongée dans un champ magnétique est soumise aux actions mécaniques de Laplace qui provoquent sa mise en mouvement.

R6. Montrer que l'équation électrique (E) vérifiée par l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans (S) s'écrit : $L \frac{di}{dt} + Ri(t) = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$, avec $\Omega = \omega_0 - \omega$ et $\Phi_0 = NSB_0$.

Solution:

La fem induite à travers la bobine S s'exprime selon $e = -\frac{d\varphi}{dt}$, avec $\varphi = \varphi_P + \varphi_{\text{ext}}$.

— flux propre : $\varphi_P = Li$

— Flux extérieur à travers les N spires :

$$\varphi_{\text{ext}} = N\vec{B}_0 \cdot \vec{S} = NB_0S \cos((\omega_0 - \omega)t)$$

Ainsi $\varphi = Li + N\vec{B}_0 \cdot \vec{S} = NB_0S \cos((\omega_0 - \omega)t)$

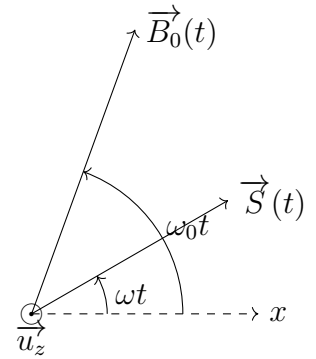
$$\text{et } e(t) = -L\frac{di}{dt} + NB_0S(\omega_0 - \omega) \sin((\omega_0 - \omega)t)$$

Loi des mailles : $e(t) = Ri(t)$

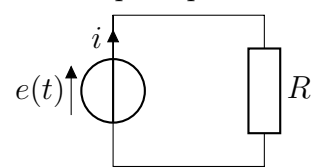
$$\text{Soit } -L\frac{di}{dt} + NB_0S(\omega_0 - \omega) \sin((\omega_0 - \omega)t) = Ri(t)$$

$$\text{Soit } L\frac{di}{dt} + Ri(t) = \Phi_0\Omega \sin(\Omega t)$$

avec $\Phi_0 = NB_0S$ et $\Omega = \omega_0 - \omega$



Circuit électrique équivalent :



Dans la suite du problème, on suppose le régime forcé établi, donc Ω est constante.

On note : $i(t) = i_m \sin(\Omega t - \psi)$ la solution de l'équation (E) en régime établi.

R7. À l'aide de l'équation précédente, exprimer i_m et ψ en fonction de Ω et des données du problème.

Solution: La détermination de i_m et ψ en fonction de Ω et des données du problème se fait à l'aide de la notation complexe : $\underline{i} = i_m e^{j(\Omega t - \psi)}$

$$Lj\Omega \underline{i} + R\underline{i} = \Phi_0\Omega e^{j\Omega t}$$

$$\text{Soit } i_m e^{j(\Omega t - \psi)} = \frac{\Phi_0\Omega e^{j\Omega t}}{R + Lj\Omega}$$

$$\text{En calculant le module : } i_m = \frac{\Phi_0\Omega}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}}$$

$$\text{et en calculant l'argument : } -\psi = -\arg(R + Lj\Omega), \text{ soit } \psi = \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)$$

R8. Définir le moment magnétique $\vec{M}$ associé à la bobine plate (S).

Solution: Moment magnétique $\vec{M}$ associé à la bobine plate (S) constituée de N spires :

$$\vec{M} = Ni\vec{S} \quad \text{ATTENTION à ne pas oublier les } N \text{ spires.}$$

R9. Expliciter l'action mécanique de Laplace s'exerçant sur la bobine (S).

Solution: L'action mécanique de Laplace qui s'exerce sur la bobine plate est un couple de moment résultant :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 = Ni_m \sin(\Omega t - \psi) \underbrace{\vec{S} \wedge \vec{B}_0}_{=SB_0 \sin((\omega_0 - \omega)t)\vec{u}_z}$$

$$\text{Soit } \vec{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} = Ni_m SB_0 \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t) \vec{u}_z = i_m \Phi_0 \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t) \vec{u}_z$$

R10. Montre que l'équation mécanique (M) vérifiée par l'angle $\theta(t)$ s'écrit $J\ddot{\theta} = -\Gamma + \Phi_0 i_m \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t)$.

Solution: Système : bobine plate (S)

Référentiel : celui du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids, de moment nul par rapport à l'axe de rotation, car sa droite d'action coupe l'axe
- liaison pivot, de moment nul par rapport à l'axe de rotation, car elle est supposée parfaite
- action mécanique de Laplace, de moment, par rapport à l'axe de rotation

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}, Oz} = i_m \Phi_0 \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t)$$

- couple exercé par le reste du dispositif sur la bobine : $-\Gamma$ (attention au signe : l'énoncé indique le couple qu'exerce la bobine sur le reste du dispositif).

Loi du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = -\Gamma + \mathcal{M}_{\mathcal{L}, Oz}$, avec $L_{Oz} = J\omega = J\ddot{\theta}$,

soit $J\ddot{\theta} = -\Gamma + \Phi_0 i_m \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t)$

R11. Exprimer le couple $\Gamma(t)$ en fonction de Ω et des données du problème quand le régime permanent sinusoïdal est atteint.

Solution: Le régime permanent étant atteint, ω est constant, donc $\ddot{\theta} = 0$.

Ainsi $\Gamma(t) = i_m \Phi_0 \sin(\Omega t - \psi) \sin(\Omega t)$

Dans un fonctionnement usuel, c'est la valeur moyenne temporelle $\langle \Gamma \rangle$ du couple qui intervient.

On rappelle que $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$

R12. Montrer que $\langle \Gamma \rangle = \frac{i_m \Phi_0}{2} \cos(\psi)$, puis en utilisant les résultats précédents $\langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0(1 - X)}{1 + \lambda^2(1 - X)^2}$ avec $X = \omega/\omega_0$. On exprimera λ et Γ_0 en fonction des données du problème.

Solution: Commençons par linéariser l'expression précédente : $\Gamma(t) = \frac{i_m \Phi_0}{2} (-\cos(2\Omega t - \psi) + \cos(\psi))$

dont la valeur moyenne vaut $\langle \Gamma(t) \rangle = \frac{i_m \Phi_0}{2} \cos(\psi)$

Soit, avec les expressions de i_m et ψ :

$$\langle \Gamma(t) \rangle = \frac{\Phi_0^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \cos\left(\arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right),$$

Soit, avec un peu de trigo : $\langle \Gamma(t) \rangle = \frac{\Phi_0^2 \Omega}{2\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2 \Omega^2}{R^2}}}$

Soit $\langle \Gamma(t) \rangle = \frac{\Phi_0^2 \Omega}{2R \left(1 + \frac{L^2 \Omega^2}{R^2}\right)}$, avec $\Omega = \omega_0 - \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$

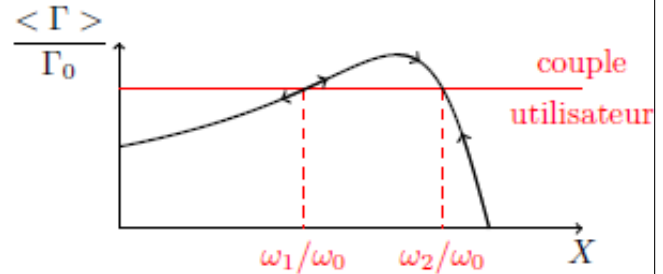
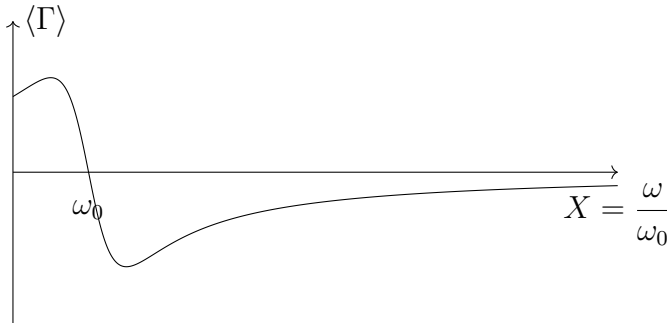
Ainsi : $\langle \Gamma(t) \rangle = \frac{\Phi_0^2 \omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{2R \left(1 + \frac{L^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{R^2}\right)}$ En posant $X = \frac{\omega}{\omega_0}$; $\lambda = \frac{L\omega_0}{R}$ et $\Gamma_0 = \frac{\Phi_0^2 \omega_0}{2R}$

On obtient bien $\langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0(1 - X)}{1 + \lambda^2(1 - X)^2}$

- R13. Tracer l'allure de $\langle \Gamma \rangle / \Gamma_0$ en fonction de X en prenant $\lambda = 4$. Commenter l'allure de la courbe obtenue. Dans la suite du problème, on considère la plage de vitesse : $0 < \omega < \omega_0$.

Solution: Allure de $\langle \Gamma(t) \rangle$.

Le couple s'annule lorsque $\omega = \omega_0$, car dans ce cas il n'y a pas de phénomène d'induction dans la bobine S puisque le flux de $\vec{B}_0$ ne varie plus dans la bobine. Sans induction, il n'y a pas de courant induit, et donc pas d'action de Laplace.



- R14. On s'intéresse à la stabilité du moteur en cours de fonctionnement. La partie utilisatrice impose une valeur de $\langle \Gamma \rangle$, on trouve alors en général deux valeurs possibles de ω : ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$. Montrer qualitativement que la valeur de ω_2 correspond à un régime stable.

Solution: On impose $\langle \Gamma \rangle > 0$: on peut alors bien trouver deux valeurs possibles pour ω (cf ci-dessus).

Il faut ici partir de la LMC $J \frac{d\omega}{dt} = -\Gamma + \mathcal{M}_{\mathcal{L}, Oz}$.

Ainsi si $\Gamma < \mathcal{M}_{\mathcal{L}, Oz}$ la vitesse de rotation augmente, si $\Gamma > \mathcal{M}_{\mathcal{L}, Oz}$ la vitesse de rotation diminue.

Donc si l'on part de ω_1 et que la pulsation augmente légèrement, alors le couple moteur devient supérieur au couple de la partie utilisatrice, ainsi le moteur va s'emballer et la pulsation continue à augmenter. Inversement si la pulsation diminue depuis ω_1 le couple moteur diminue et devient donc inférieur au couple utilisateur, le moteur est donc ralenti diminuant encore plus la pulsation...

Cette position n'est donc pas stable.

Dans le cas de ω_2 , on remarque que si l'on diminue la pulsation, alors le couple moteur augmente forçant ainsi la pulsation à augmenter pour revenir à ω_2 . Inversement si l'on augmente la pulsation, le couple moteur diminue entraînant alors une diminution de la pulsation... Cette position est donc une position stable.

- R15. Exprimer la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la puissance mécanique fournie par le moteur. Commenter l'expression obtenue.

Solution: Valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la puissance mécanique fournie par le moteur, c'est-à-dire par la bobine (S) au milieu extérieur.

Sachant que la bobine (S) tourne à la vitesse angulaire ω :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Gamma \rangle \times \omega = \langle \Gamma \rangle \times \omega_0 X$$

$$\text{Soit } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\Gamma_0 \omega_0 (1 - X) X}{1 + \lambda^2 (1 - X)^2}$$

La puissance fournie est nulle pour $\omega = 0$ ou pour $\omega = \omega_0$ (cf remarque précédente).

La puissance est maximale pour $\omega \approx 0,7\omega_0$

- R16. On donne Figure 4 le tracé de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de $X = \omega / \omega_0$.

Dans le cas de la pompe à chaleur étudiée ici, le moteur du compresseur fournit une valeur moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = 50 \text{ W}$. Déterminer la valeur de la vitesse de rotation ω . Commenter.

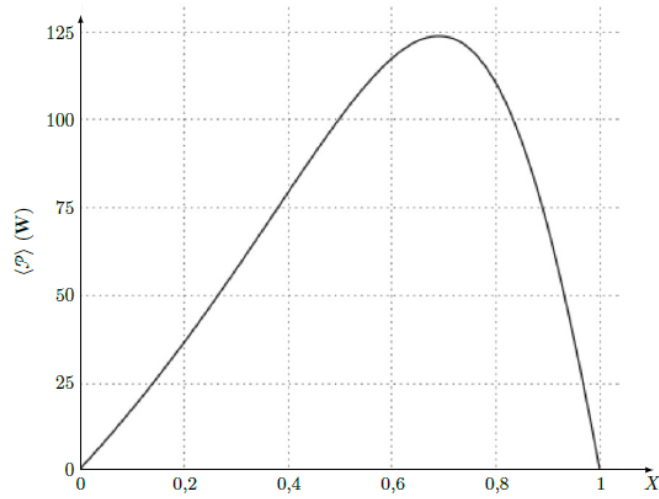


FIGURE 4 – Valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de $X = \omega/\omega_0$

Solution: D'après le graphe la vitesse de rotation stable est donc d'environ $0,95\omega_0$ (position stable). Comme le système est alimenté avec le 50 Hz du réseau, cela signifie que le moteur tourne à $2850 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.