

? Lundi 3 novembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°3 (1) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS!!!!
- Chaque calcul doit être introduit par une phrase/des mots : « D'après la loi ... », « D'après l'énoncé », « D'après la définition », « D'après la question ... »
- Exprimer la grandeur demandée en LITTÉRAL, avant de passer aux valeurs numériques.
- **ENCADRER** : grandeur = expression littérale

Exercice n°1 Questions de Travaux Pratiques (Durée : 5 min)

R1. On veut étudier la charge et la décharge d'un condensateur à travers une résistance. Pour cela, on dispose d'un générateur basse fréquence (GBF), d'un oscilloscope (2 voies notées voie 1 et voie 2), d'une résistance et d'un condensateur. On souhaite observer à l'oscilloscope la tension aux bornes du GBF et celle aux bornes du condensateur. **Représenter** le schéma du circuit à réaliser. La terre et les voies de l'oscilloscope devront être clairement indiquées sur le schéma.

R2. De nombreuses mesures de capacité ont été effectuées, et on obtient les résultats suivant :

```
1 C=[1.784e-07, 1.31e-07, 1.1733e-07, 1.0925e-07, 1.048e-07, 1.03667e-07,
2   1.02e-07, 9.8e-08, 9.6889e-08, 9.64e-08]
3 Cmoy = np.mean(C)
4 s_C = np.std(C,ddof=1)
5 u_C = s_C/np.sqrt(len(C))
6 print(Cmoy, s_C, u_C)
1.1377388888888888e-07, 2.5085388066451042e-08, 7.932696227919258e-09
```

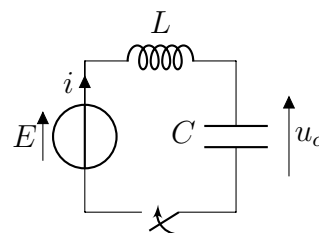
Écrire le résultat de l'expérience de façon conforme.

Exercice n°2 Circuit LC série (Durée : 40 min)

On étudie le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem $E = 4 \text{ V}$ constante au condensateur et à la bobine.



R1. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 u_c(\infty)$$

On identifiera les expressions de ω_0 et $u_c(\infty)$. Comment s'appelle ω_0 ? Quelle est son unité?

Solution:

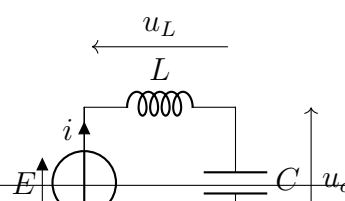
Loi des mailles : $u_c + u_L = E$

Relation du condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt}$

Relation de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$

Enfin : $u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = E$

Pour $t > 0$:



Écrire la phrase complète

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

R2. **Déterminer proprement** les valeurs de $u_c(0^+)$ et $\frac{du_c}{dt}(0^+)$.

Solution:



Remarque – CI

Respecter la rédaction du cours et des corrigés (nombreux) des DM/TD...

Une fonction nulle en 0 n'y passe pas a priori avec une tangente horizontale.

$\Delta \frac{du_c(0^+)}{dt} \neq \frac{du_c}{dt}(0^+)$: la première est TOUJOURS nulle, la deuxième pas a priori.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Pour $t < 0$, l'interruption est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Or l'intensité à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Or $i = C \frac{du_c}{dt}$, donc $\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0$

R3. **Résoudre complètement** l'équation différentielle.

Solution: La solution générale s'écrit $u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + E$ dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.

$$u_c(0^+) = 0 = A + E$$

$$\text{Dérivée de } u_c \text{ par rapport au temps : } \frac{du_c}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 = B\omega_0, \text{ donc } B = 0$$

$$\text{Ainsi } \boxed{u_c(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))}$$

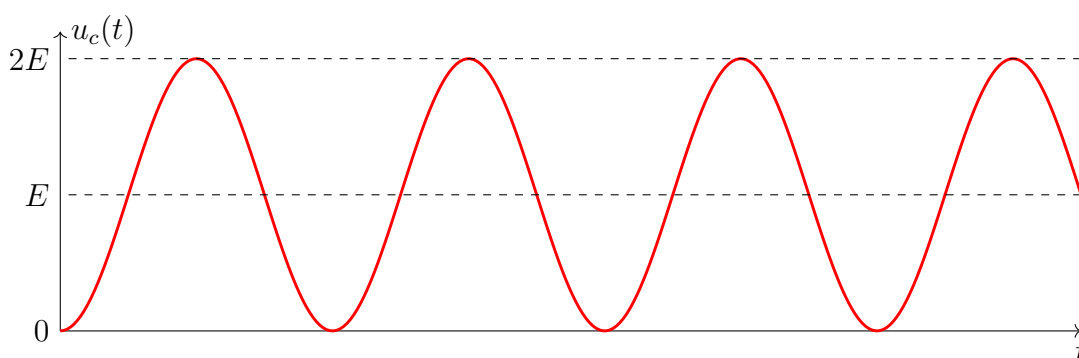
R4. **Représenter l'allure** de $u_c(t)$.

Solution:



Remarque – Allure

à soigner : condition initiale, valeur moyenne, 0 des axes, ...



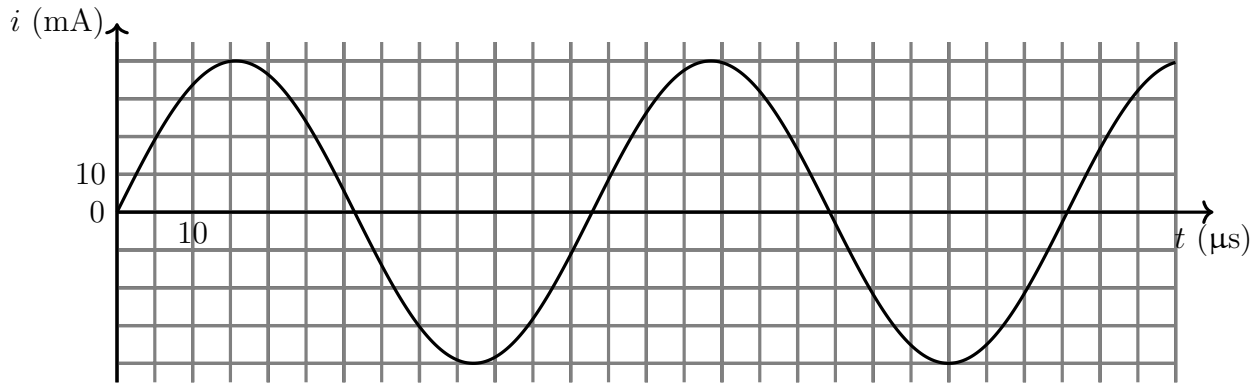
R5. Déterminer l'expression de i en fonction de E , ω_0 , C et t en deux lignes de calculs au maximum.

Solution: D'après la loi du condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

R6. En déduire l'expression de l'amplitude, notée I_m , de i en fonction de C , E et ω_0 .

Solution: D'après l'expression précédente, l'amplitude est $I_m = EC\omega_0$

On donne ci-dessous, le graphe de i en fonction du temps.



- R7. (a) Déterminer graphiquement la période propre. En déduire la pulsation propre.
 (b) Déterminer graphiquement l'amplitude.
 (c) Déduire des deux questions précédentes la valeur de C .
 (d) En déduire la valeur de L .

Donnée : $2\pi \approx 6,3$

Solution:

Période propre : $T_0 = 63 \mu\text{s}$

Pulsation propre : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \approx \frac{2\pi}{63 \times 10^{-6} \text{ s}} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Amplitude : $I_m = EC\omega_0 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ A}$

Ainsi : $C = \frac{I_m}{E\omega_0} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{4 \times 10^5} = 10^{-7} \text{ F}$

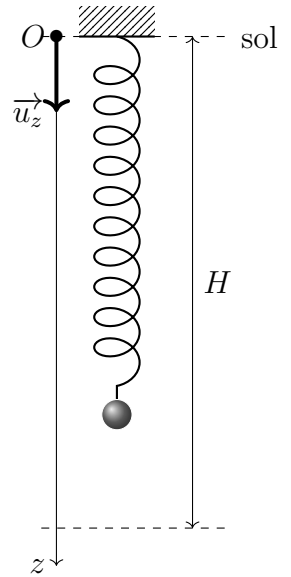
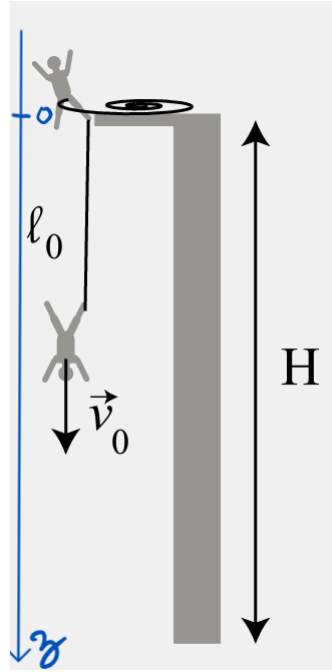
D'après la pulsation propre : $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{10^{-7} \times 10^{10}} = 10^{-3} \text{ H}$

Exercice n°3 Saut à l'élastique (Durée : 1h20)

Le saut à l'élastique est un loisir à sensation forte consistant à se jeter d'un pont, les pieds accrochés à un élastique. Tant que l'élastique est de longueur inférieure à sa longueur au repos ℓ_0 , le corps de masse m est en chute libre, c'est-à-dire soumis uniquement à son poids.

Le sauteur saute, puis tombe en chute libre, jusqu'à l'instant $t = 0$, où l'élastique atteint sa longueur à vide ℓ_0 pour la première fois. Sa vitesse est de $\frac{dz}{dt}(0) = v_0$, avec $v_0 = \sqrt{2g\ell_0}$.

Quand la longueur de l'élastique est supérieure à ℓ_0 , il peut être assimilé à un ressort de constante de raideur k , et de longueur à vide ℓ_0 .



<https://www.ledauphine.com/isere-sud/2014/09/04/le-grand-saut-a-l-elastique>

Phase 1 : chute libre, le ressort n'agit pas (pour $t < 0$ et pour tout t où $\ell(t) < \ell_0$)

Mécanique, Licence/CPGE, Ellipse

Phase 2 : $\ell(t) > \ell_0$, le ressort agit

I Préliminaires

R1. (a) **Définir** le système étudié, le référentiel d'étude et effectuer le bilan des forces pour $t > 0$ (quand l'élastique agit).

Solution:

Système : sauteur à l'élastique

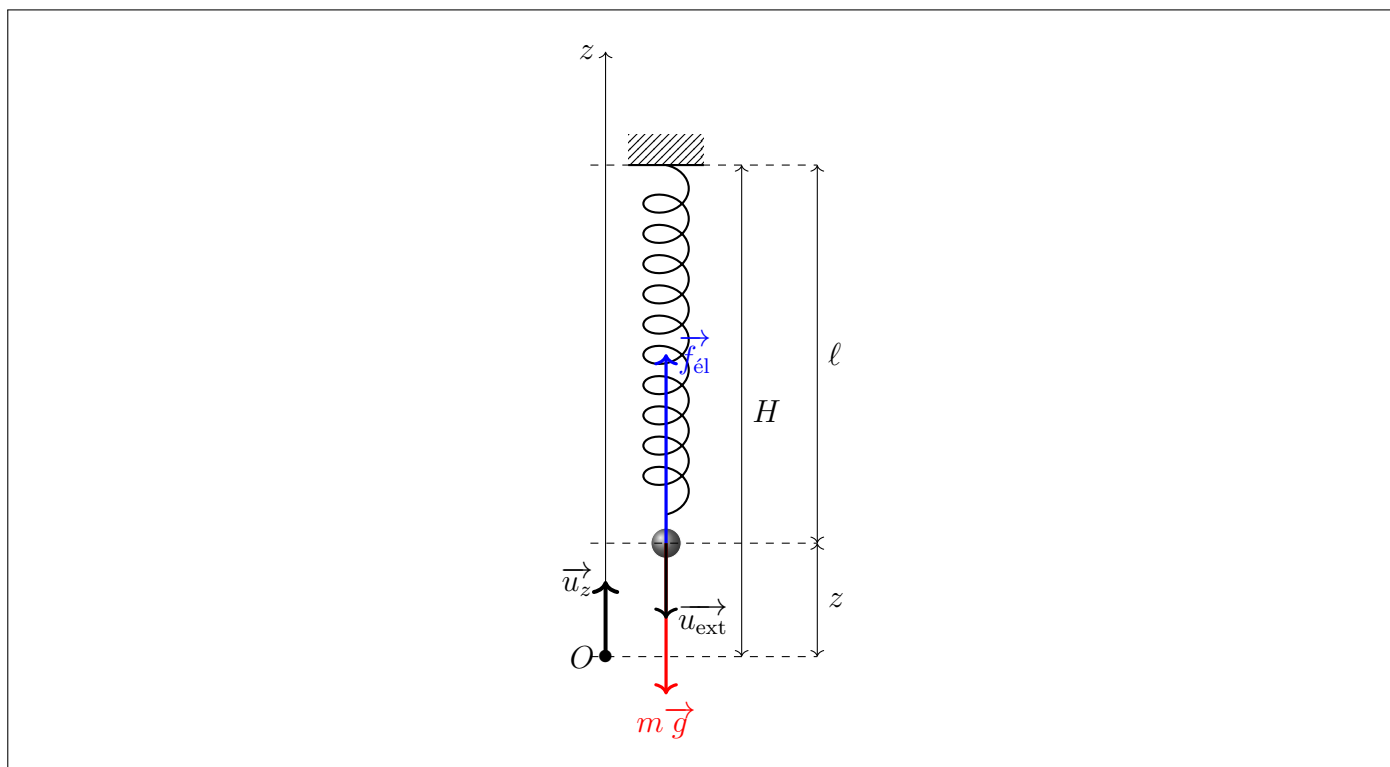
Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
- Force de rappel élastique $\vec{f}_{el}$

(b) **Reproduire le schéma** de l'énoncé pour $t > 0$ quand l'élastique est tendu et se comporte comme un ressort.

Solution:



R2. Force de rappel élastique.

(a) **Donner** la formule générale de la force de rappel élastique, on définira les différentes grandeurs y intervenant sur le schéma précédent. Quelle est l'unité de la constante de raideur k ?

Solution:

$\vec{f}_{\text{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$, où ℓ est la longueur instantanée, et $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort au niveau de la masse.

k s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$

(b) **En déduire** l'expression de la force de rappel élastique en fonction de k , z , ℓ_0 et $\vec{u}_z$.

Solution: $\overrightarrow{u_{\text{ext}}} = +\overrightarrow{u_z}$ et $\ell(t) = z(t)$

Ainsi : $\vec{f}_{\text{él}} = -k(z(t) - \ell_0)\vec{u}_z$

II Première modélisation : sans prise en compte des frottements

Dans cette partie, les frottements de l'air sont négligés.

R3. **Établir** la position d'équilibre z_{eq} du sauteur.

Solution:

À l'équilibre : $\vec{v} = \vec{0}$ et la somme des forces est nulle.

Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{f}_{\text{el}} &= \vec{0} \\ mg\vec{u}_z - k(z_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_z &= \vec{0} \\ mg - kz_{\text{eq}} + k\ell_0 &= 0 \\ z_{\text{eq}} &= \ell_0 + \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

$$z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

On peut vérifier la cohérence physique en exprimant la longueur à l'équilibre :

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0$$

R4. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{\text{eq}}$$

Identifier l'expression ω_0 .

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{P} + \vec{f}_{\text{el}} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z &= mg \vec{u}_z - k(z - \ell_0) \vec{u}_z \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= mg - k(z - \ell_0) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} + kz &= mg + k\ell_0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m} z &= \frac{k}{m} \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z &= \omega_0^2 z_{\text{eq}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et de position d'équilibre $z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

R5. **Résoudre complètement** l'équation différentielle vérifiée par z , avec les conditions initiales suivantes : $z(0) = \ell_0$ et $\frac{dz}{dt}(0) = v_0$.

Solution: Solution générale : $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + z_{\text{eq}}$

À $t = 0$: $z(0) = A + z_{\text{eq}} = \ell_0$, donc $A = \ell_0 - z_{\text{eq}} = -\frac{mg}{k}$

$\frac{dz}{dt}(0) = B\omega_0 = v_0$, donc $B = \frac{v_0}{\omega_0}$

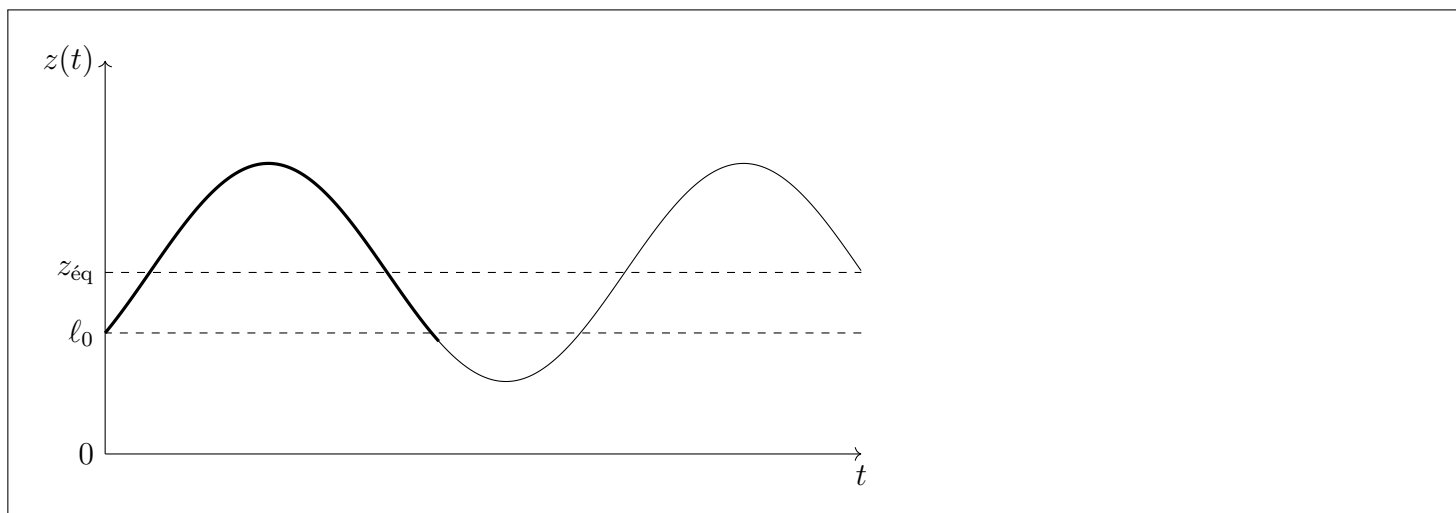
Ainsi $z(t) = -\frac{mg}{k} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + z_{\text{eq}}$

R6. **Représenter l'allure** de $z(t)$.

Solution:

$z(0) = \ell_0 < z_{\text{eq}}$

L'évolution précédente n'est valable que si $\ell(t) > \ell_0$, soit $z(t) > \ell_0$: seule la partie en gras sur la courbe ci-dessous est valide.



Pour les questions suivantes, on admet que la position du sauteur peut s'écrire $z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{\text{éq}}$. On ne cherche pas à exprimer Z_m et φ .

R7. Énergies potentielles :

- (a) **Donner** l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction (notamment) de z en faisant attention au signe compte tenu du sens de l'axe.

Solution: Énergie potentielle de pesanteur, avec l'axe (Oz) descendant : $\mathcal{E}_{pp} = -mgz$

- (b) L'**exprimer** en fonction de mg , Z_m , $z_{\text{éq}}$, ω_0 , φ et t dans le cadre de l'exercice.

Solution: Dans le cadre de l'exercice : $\mathcal{E}_{pp} = -mgZ_m \cos(\omega_0 t + \varphi) - mgz_{\text{éq}}$

- (c) **Donner** l'expression de l'énergie potentielle de élastique, en fonction de k , ℓ et ℓ_0 , puis en fonction de k , $z(t)$, mg .

Puis l'**exprimer** en fonction de k , Z_m , mg , ω_0 , φ et t dans le cadre de l'exercice.

Solution: Énergie potentielle élastique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p,\text{él}} &= \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{\text{éq}} - \ell_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mg}{k}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kZ_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + mgZ_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}kZ_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{(mg)^2}{2k} + mgZ_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- (d) **En déduire** l'énergie potentielle totale en fonction de k , mg , Z_m , ω_0 , φ , $z_{\text{éq}}$ et t .

Solution: Énergie potentielle totale : $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pp} + \mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}kZ_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{(mg)^2}{2k} - mgz_{\text{éq}}$

R8. Après **avoir rappelé la définition** de l'énergie cinétique, l'**exprimer** en fonction de k , Z_m , ω_0 , φ et t .

Solution: Énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mZ_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}mZ_m^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}kZ_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

R9. **Exprimer** l'énergie mécanique en fonction de k , mg , ℓ_0 et Z_m . **Commenter**.

Solution: Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}kZ_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kZ_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{(mg)^2}{2k} - mgz_{\text{eq}} \\ &= \frac{1}{2}kZ_m^2 + \frac{(mg)^2}{2k} - mgz_{\text{eq}} \\ &= \frac{1}{2}kZ_m^2 + \frac{(mg)^2}{2k} - mg \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2}kZ_m^2 - \frac{(mg)^2}{2k} - mg\ell_0\end{aligned}$$

L'énergie mécanique est constante : cela est cohérent avec la modélisation effectuée ici où tous phénomènes dissipatifs sont négligés.

III Deuxième modélisation : prise en compte des frottements fluides

On prend maintenant en compte les frottements fluides dus à l'air, que l'on modélise par la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où α est une constante positive.

R10. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{\text{eq}} \quad (\text{E})$$

Exprimer ω_0 et Q en fonction de m , k et α . Quel est le nom et l'unité de Q ?

Solution: On ajoute au bilan des forces précédents, la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$.
D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}m \vec{a} &= \vec{P} + \vec{f}_{\text{el}} + \vec{f} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z &= mg \vec{u}_z - k(z - \ell_0) \vec{u}_z - \alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dz}{dt} \frac{k}{m} z &= \frac{k}{m} \left(\ell_0 + \frac{mg}{k} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) &= \omega_0^2 z_{\text{eq}}\end{aligned}$$

On retrouve l'expression de ω_0 obtenue précédemment.

On identifie le facteur de qualité Q tel que : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$, sans unité.

R11. **Donner** le nom des différents régimes observables selon la valeur de Q .

Donner pour ces différents régimes l'expression de la durée caractéristique du régime transitoire en fonction de Q et ω_0 . Comment évolue-t-elle si Q augmente ? *Il faudra distinguer deux cas.*

Solution:

- Si $Q < \frac{1}{2}$, le régime est apériodique. Sa durée diminue si le facteur de qualité augmente. $\tau \approx \frac{1}{Q\omega_0}$
- Si $Q = \frac{1}{2}$, le régime est apériodique critique. $\tau \approx \frac{1}{\omega_0}$
- Si $Q > \frac{1}{2}$, le régime est pseudo-périodique. Sa durée augmente si le facteur de qualité augmente.
 $\tau \approx \frac{Q}{\omega_0}$

R12. **Calculer** la valeur de Q pour $m = 50$ kg, $k = 80$ uSI (unité du système international) et $\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$ kg · s⁻². Quelle sera la nature du régime transitoire ?

Solution: $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = \frac{\sqrt{50 \times 200}}{10} = 10 > \frac{1}{2}$: le régime est pseudo-périodique.

On considère les mêmes conditions initiales que **R5**.

R13. On souhaite **résoudre complètement** l'équation différentielle (E), pour cela :

- (a) **Écrire** l'équation différentielle homogène (notée (EH)) correspondante à (E) de **R10**.
- (b) **Exprimer** les racines de l'équation caractéristique associée à (EH).
- (c) **Exprimer** la solution générale de (EH), notée z_H . Y introduire un temps caractéristique τ et une pseudo-pulsation Ω que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q .
- (d) **Déterminer** une solution particulière z_P .
- (e) **En déduire** la solution générale.
- (f) À l'aide des conditions initiales de **R5**, **déterminer** les constantes d'intégration et **conclure**.

Solution:

1. Recherche de la solution homogène de l'équation homogène sans second membre :

a) Équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

b) Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$

c) Racines : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{-4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

d) Solution homogène : $z_H(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \left(A \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) + B \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) \right)$

On peut introduire $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

2. Solution particulière : $z_P = z_{\text{eq}}$

3. Solution générale : $z(t) = z_H + z_P = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right) + z_{\text{eq}}$

4. $z(0) = A + z_{\text{eq}} = \ell_0$, donc $A = \ell_0 - z_{\text{eq}} = -\frac{mg}{k}$

$$\frac{dz}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right) - A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \right)$$

Soit $\frac{dz}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = v_0$, soit $B = \frac{A}{\Omega\tau} - \frac{v_0}{\Omega} = -\frac{mg}{k\Omega\tau} + \frac{v_0}{\Omega}$

Soit $\boxed{z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{mg}{k} \cos(\Omega t) + \left(-\frac{mg}{k\Omega\tau} + \frac{v_0}{\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right) + z_{\text{eq}}}$

R14. **Tracer l'allure** de $z(t)$, en la soignant, et en faisant apparaître les éléments importants.

Solution:

