

? Lundi 3 novembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°3 (2) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS!!!!
- Chaque calcul doit être introduit par une phrase/des mots : « D'après la loi ... », « D'après l'énoncé », « D'après la définition », « D'après la question ... »
- Exprimer la grandeur demandée en LITTÉRAL, avant de passer aux valeurs numériques.
- ENCADRER : grandeur = expression littérale

Exercice n°1 Questions de Travaux Pratiques (Durée ~ 5 min)

R1. On veut étudier la charge et la décharge d'un condensateur à travers une résistance. Pour cela, on dispose d'un générateur basse fréquence (GBF), d'un oscilloscope (2 voies notées voie 1 et voie 2), d'une résistance et d'un condensateur. On souhaite observer à l'oscilloscope la tension aux bornes du GBF et celle aux bornes du condensateur. **Représenter** le schéma du circuit à réaliser. La terre et les voies de l'oscilloscope devront être clairement indiquées sur le schéma.

R2. De nombreuses mesures de capacité ont été effectuées, et on obtient les résultats suivant :

```
1 C=[1.784e-07, 1.31e-07, 1.1733e-07, 1.0925e-07, 1.048e-07, 1.03667e-07,
2   1.02e-07, 9.8e-08, 9.6889e-08, 9.64e-08]
3 Cmoy = np.mean(C)
4 s_C = np.std(C,ddof=1)
5 u_C = s_C/np.sqrt(len(C))
6 print(Cmoy, s_C, u_C)
1.1377388888888888e-07, 2.5085388066451042e-08, 7.932696227919258e-09
```

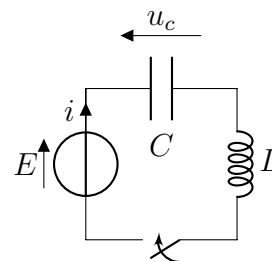
Écrire le résultat de l'expérience de façon conforme.

Exercice n°2 Circuit LC série (Durée ~ 30 min)

On étudie le circuit ci-contre.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule.

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le générateur idéal de fem $E = 4 \text{ V}$ constante au condensateur et à la bobine.



R1. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 u_c(\infty)$$

On identifiera les expressions de ω_0 et $u_c(\infty)$.

Comment s'appelle ω_0 ? Quelle est son unité ?

Solution:

Loi des mailles : $u_c + u_L = E$

Relation du condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt}$

Relation de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$

Enfin : $u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = E$

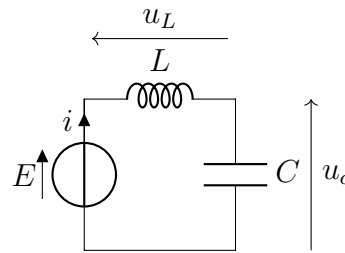
$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{u_c}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Écrire la phrase complète

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour $t > 0$:



R2. Résoudre complètement l'équation différentielle.

Solution: La solution générale s'écrit $u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + E$ dont les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions initiales.

Conditions initiales ?

⚠ Remarque – CI

Respecter la rédaction du cours et des corrigés (nombreux) des DM/TD...

Une fonction nulle en 0 n'y passe pas a priori avec une tangente horizontale.

⚠ $\frac{du_c(0^+)}{dt} \neq \frac{du_c}{dt}(0^+)$: la première est TOUJOURS nulle, la deuxième pas a priori.

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$

Pour $t < 0$, l'interruption est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Or l'intensité à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Or $i = C \frac{du_c}{dt}$, donc $\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0$

$u_c(0^+) = 0 = A + E$

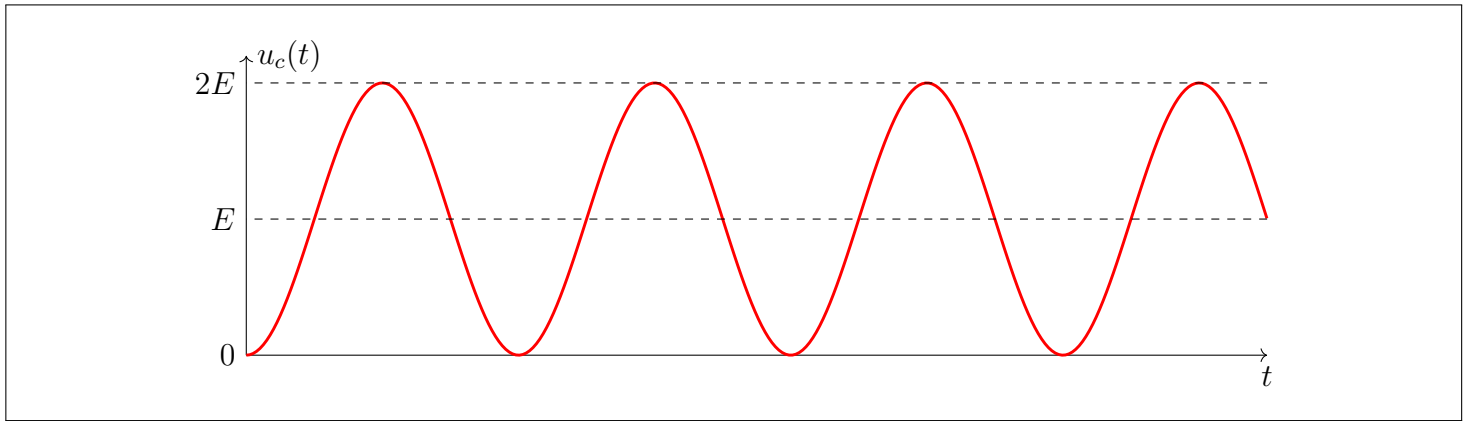
Dérivée de u_c par rapport au temps : $\frac{du_c}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\frac{du_c}{dt}(0^+) = 0 = B\omega_0$, donc $B = 0$

Ainsi $u_c(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$

R3. Représenter l'allure de $u_c(t)$.

Solution: à soigner : condition initiale, valeur moyenne, 0 des axes, ...



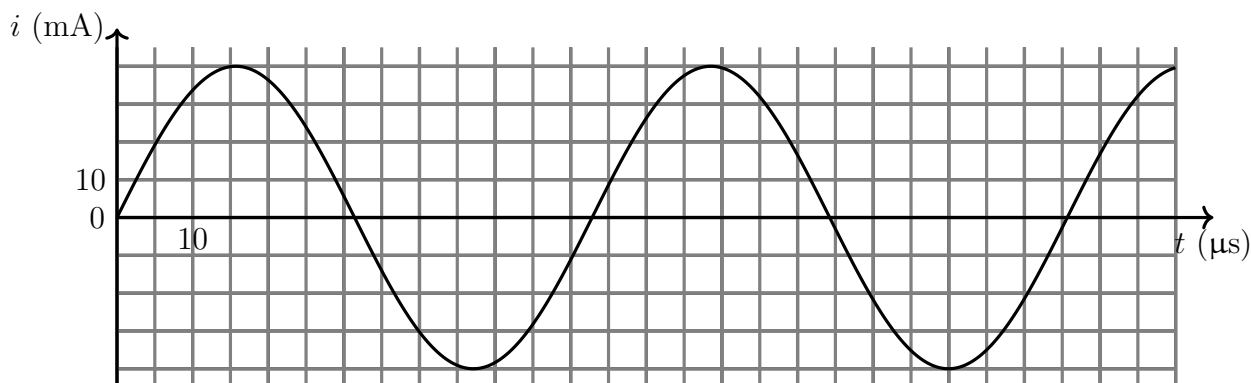
R4. **Déterminer l'expression** de i en fonction de E , ω_0 , C et t . Une (voire deux) ligne de calculs au maximum sont nécessaires.

Solution: D'après la loi du condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

R5. **En déduire** l'expression de l'amplitude, notée I_m , de i en fonction de C , E et ω_0 .

Solution: D'après l'expression précédente, l'amplitude est $I_m = EC\omega_0$

On donne ci-dessous, le graphe de i en fonction du temps.



R6. **Déterminer graphiquement** l'amplitude et la période propre. En déduire la pulsation propre, puis la valeur de C , puis la valeur de L .

Donnée : $2\pi \approx 6,3$

Solution:

Période propre : $T_0 = 63 \mu\text{s}$

Pulsation propre : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \approx \frac{2\pi}{63 \times 10^{-6} \text{ s}} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Amplitude : $I_m = EC\omega_0 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ A}$

Ainsi : $C = \frac{I_m}{E\omega_0} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{4 \times 10^5} = 10^{-7} \text{ F}$

D'après la pulsation propre : $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{10^{-7} \times 10^{10}} = 10^{-3} \text{ H}$

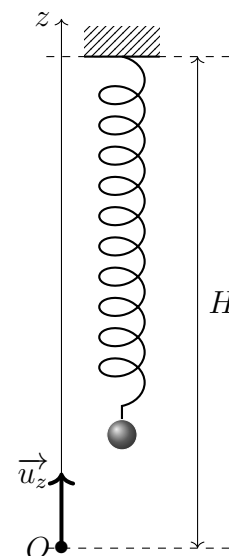
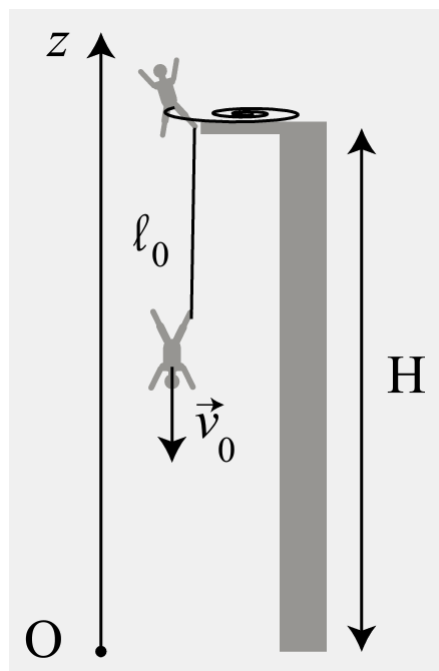
Exercice n°3 Saut à l'élastique (Durée ~ 1h15)

Le saut à l'élastique est un loisir à sensation forte consistant à se jeter d'un pont, les pieds accrochés à un élastique.

Tant que l'élastique est de longueur inférieure à sa longueur au repos ℓ_0 , le corps de masse m est en chute libre, c'est-à-dire soumis uniquement à son poids.

Le sauteur saute, puis tombe en chute libre, jusqu'à l'instant $t = 0$, où l'élastique atteint sa longueur à vide ℓ_0 pour la première fois. Sa vitesse est de $\frac{dz}{dt}(0) = -v_0$, avec $v_0 = \sqrt{2g\ell_0}$.

Quand la longueur de l'élastique est supérieure à ℓ_0 , il peut être assimilé à un ressort de constante de raideur k , et de longueur à vide ℓ_0 .



<https://www.ledauphine.com/isere-sud/2014/09/04/le-grand-saut-a-l-elastique>

Phase 1 : chute libre, le ressort n'agit pas (pour $t < 0$ et pour tout t où $\ell(t) < \ell_0$)

Mécanique, Licence/CPGE, Ellipse

Phase 2 : $\ell(t) > \ell_0$, le ressort agit

I Préliminaires

R1. (a) Définir le système étudié, le référentiel d'étude et effectuer le bilan des forces pour $t > 0$.

Solution:

Système : sauteur à l'élastique

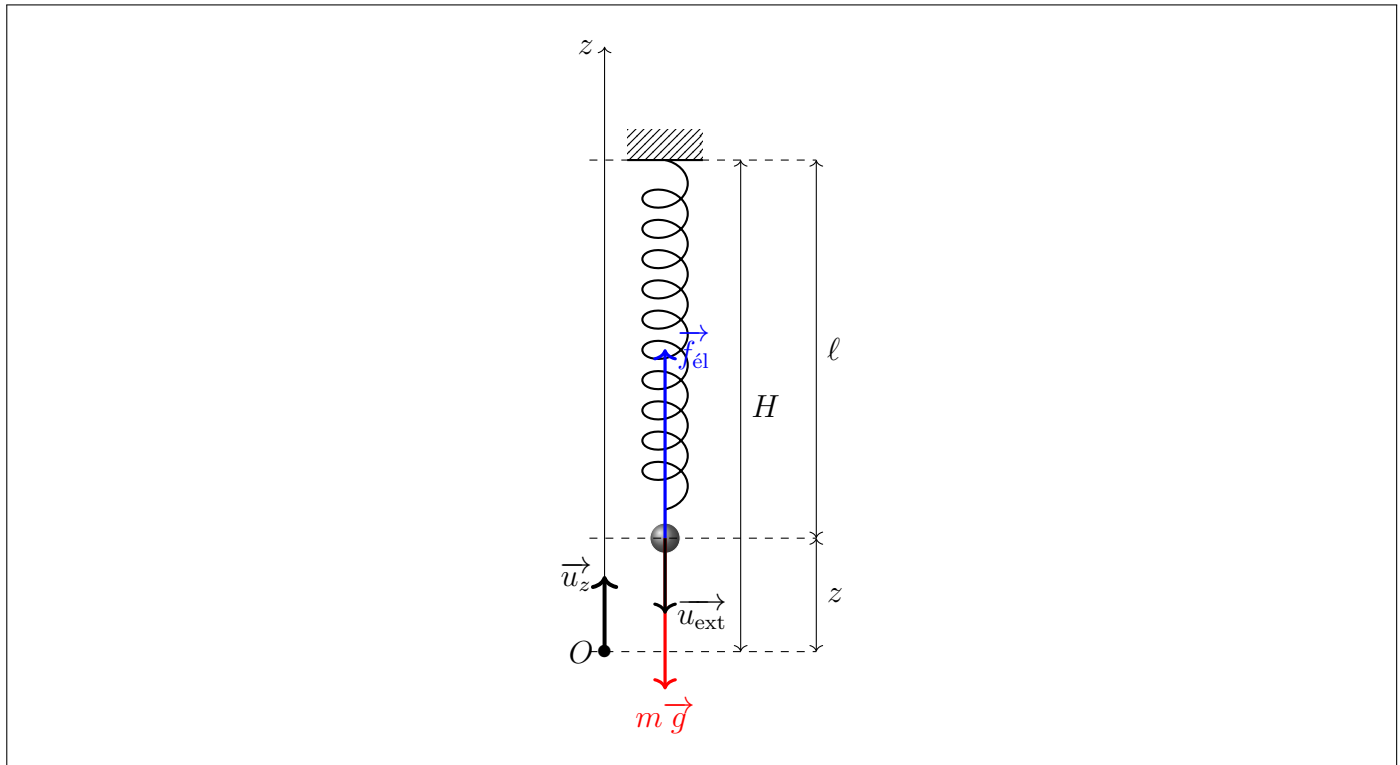
Référentiel : Terrestre, supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- Force de rappel élastique $\vec{f}_{el}$

(b) Reproduire le schéma de l'énoncé pour $t > 0$ quand l'élastique est tendu et se comporte comme un ressort, et le compléter avec les informations nécessaires.

Solution:



R2. **Exprimer** la force de rappel élastique en fonction de k , H , z , ℓ_0 et $\vec{u}_z$. Donner l'unité de k .

Solution: $\vec{f}_{\text{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$, où ℓ est la longueur instantanée, et $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort au niveau de la masse.

k s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$

$\vec{u}_{\text{ext}} = -\vec{u}_z$ et $\ell(t) = H - z(t)$

Ainsi : $\boxed{\vec{f}_{\text{él}} = k(H - z(t) - \ell_0)\vec{u}_z}$

II Première modélisation : sans prise en compte des frottements

Dans cette partie, les frottements de l'air sont négligés.

R3. **Établir** la position d'équilibre z_{eq} du sauteur.

Solution:

À l'équilibre : $\vec{v} = \vec{0}$ et la somme des forces est nulle.

Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{f}_{\text{él}} &= \vec{0} \\ -mg\vec{u}_z + k(H - z_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{u}_z &= \vec{0} \\ -mg + kH - kz_{\text{eq}} - k\ell_0 &= 0 \\ z_{\text{eq}} &= H - \ell_0 - \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{z_{\text{eq}} = H - \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

On peut vérifier la cohérence physique en exprimant la longueur à l'équilibre :

$$\ell_{\text{eq}} = H - z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0$$

R4. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{\text{eq}}$$

Identifier l'expression ω_0 .

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{P} + \vec{f}_{\text{el}} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z &= -mg \vec{u}_z + k(H - z - \ell_0) \vec{u}_z \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg + k(H - z - \ell_0) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz &= -mg + kH - k\ell_0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z &= \frac{k}{m} \left(H - \ell_0 - \frac{mg}{k} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z &= \omega_0^2 z_{\text{éq}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en

rad · s⁻¹) et de position d'équilibre $z_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{mg}{k}$

R5. **Résoudre complètement** l'équation différentielle vérifiée par z , avec les conditions initiales suivantes : $z(0) = H - \ell_0$ et $\frac{dz}{dt}(0) = -v_0$.

Solution: Solution générale : $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + z_{\text{éq}}$

À $t = 0$: $z(0) = A + z_{\text{éq}} = H - \ell_0$, donc $A = H - \ell_0 - z_{\text{éq}} = \frac{mg}{k}$

$\frac{dz}{dt}(0) = B\omega_0 = -v_0$, donc $B = \frac{-v_0}{\omega_0}$

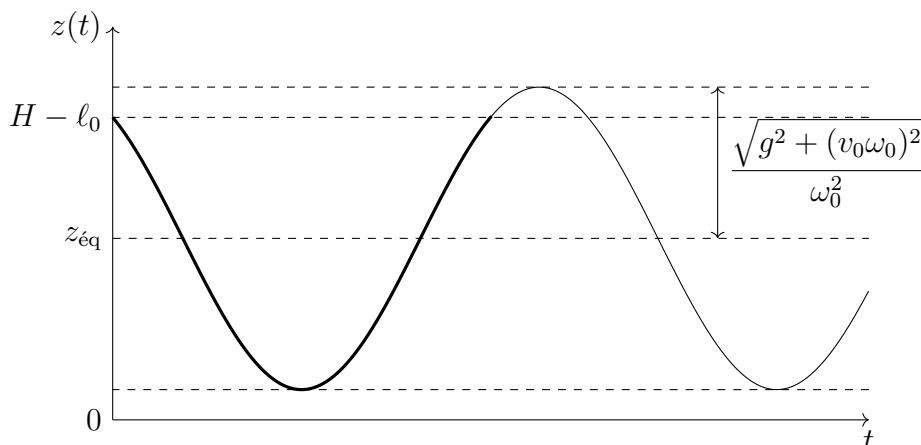
Ainsi $z(t) = \frac{mg}{k} \cos(\omega_0 t) - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + z_{\text{éq}}$

R6. **Représenter l'allure** de $z(t)$.

Solution:

$z(0) = H - \ell_0 > z_{\text{éq}}$

L'évolution précédente n'est valable que si $\ell(t) > \ell_0$, soit $z(t) < H - \ell_0$: seule la partie en gras sur la courbe ci-dessous est valide.



R7. **Exprimer** l'amplitude du mouvement. **En déduire** la valeur z minimale atteinte au cours du saut. À quelle condition sur la hauteur du pont n'est-ce pas dangereux ?

Solution:

Amplitude :

$$\begin{aligned} Z_m &= \sqrt{\frac{(mg)^2}{k^2} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ &= \sqrt{\frac{g^2}{\omega_0^4} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{\sqrt{g^2 + (v_0\omega_0)^2}}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

L'altitude minimale atteinte par le sauteur au cours du saut, est $z_{\min} = z_{\text{éq}} - Z_m$

Le sauteur ne risque rien :

$$\begin{aligned} z_{\min} &> 0 \\ z_{\text{éq}} &> Z_m \\ H - \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} &> \frac{\sqrt{g^2 + (v_0\omega_0)^2}}{\omega_0^2} \\ H - \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} &> \frac{\sqrt{g^2 + 2gH\omega_0^2}}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

R8. **Exprimer** $z(t)$ à l'aide de l'amplitude Z_m et d'une phase à l'origine des temps φ que l'on ne cherchera pas à exprimer.

Solution: $z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{\text{éq}}$

R9. **Exprimer** l'énergie mécanique du système en fonction de k , mg , H , ℓ_0 et Z_m . Commenter.

Solution:

$$\begin{aligned}
 \text{Énergie potentielle de pesanteur } \mathcal{E}_{pp} &= +mgz \\
 &= mgZ_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + mgz_{\text{éq}} \\
 \text{Énergie potentielle élastique } \mathcal{E}_{p,\text{él}} &= \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \\
 &= \frac{1}{2}k(H - z - \ell_0)^2 \\
 &= \frac{1}{2}k(H - Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) - z_{\text{éq}} - \ell_0)^2 \\
 &= \frac{1}{2}k\left(-Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mg}{k}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}kZ_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 - mgZ_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\
 \text{Énergie cinétique } \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\
 &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}mZ_m^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\
 \text{Énergie mécanique } \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pp} + \mathcal{E}_{p,\text{él}} \\
 &= \frac{1}{2}kZ_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kZ_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{(mg)^2}{2k}mgz_{\text{éq}} \\
 &= \frac{1}{2}kZ_m^2 + \frac{(mg)^2}{2k} + mgz_{\text{éq}} \\
 &= \frac{1}{2}kZ_m^2 + \frac{(mg)^2}{2k} + mg\left(H - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right) \\
 &= \frac{1}{2}kZ_m^2 - \frac{(mg)^2}{2k} + mg(H - \ell_0)
 \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est constante : cela est cohérent avec la modélisation effectuée ici où tous phénomènes dissipatifs sont négligés.

III Deuxième modélisation : prise en compte des frottements fluides

On prend maintenant en compte les frottements fluides dus à l'air, que l'on modélise par la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où α est une constante positive.

R10. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

Exprimer ω_0 et Q en fonction de m , k et α . Quel est le nom et l'unité de Q ?

Solution: On ajoute au bilan des forces précédents, la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{P} + \vec{f}_{\text{él}} + \vec{f} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z &= -mg \vec{u}_z + k(H - z - \ell_0) \vec{u}_z - \alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dz}{dt} &= \frac{k}{m} \left(H - \ell_0 - \frac{mg}{k} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) &= \omega_0^2 z_{\text{eq}} \end{aligned}$$

On retrouve l'expression de ω_0 obtenue précédemment.

On identifie le facteur de qualité Q tel que : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$, sans unité.

R11. **Donner** le nom des différents régimes observables selon la valeur de Q .

Donner pour ces différents régimes l'expression de la durée caractéristique du régime transitoire en fonction de Q et ω_0 . Comment évolue-t-elle si Q augmente ? *Il faudra distinguer deux cas.*

Solution:

- Si $Q < \frac{1}{2}$, le régime est apériodique. Sa durée diminue si le facteur de qualité augmente. $\tau \approx \frac{1}{Q\omega_0}$
- Si $Q = \frac{1}{2}$, le régime est apériodique critique. $\tau \approx \frac{1}{\omega_0}$
- Si $Q > \frac{1}{2}$, le régime est pseudo-périodique. Sa durée augmente si le facteur de qualité augmente.
 $\tau \approx \frac{Q}{\omega_0}$

R12. **Calculer** la valeur de Q pour $m = 50$ kg, $k = 80$ uSI (unité du système international) et $\alpha = 4.10^{-4}$ kg · s⁻². Quelle sera la nature du régime transitoire ?

Solution: $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = \frac{\sqrt{50 \times 200}}{10} = 10 > \frac{1}{2}$: le régime est pseudo-périodique.

On considère les mêmes conditions initiales que **R5**.

R13. **Résoudre complètement** l'équation différentielle.

Solution:

1. Recherche de la solution homogène de l'équation homogène sans second membre :

a) Équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

b) Discriminant : $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$

c) Racines : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{-4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

d) Solution homogène : $z_H(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \left(A \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) + B \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) \right)$

On peut introduire $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

2. Solution particulière : $z_P = z_{\text{éq}}$

3. Solution générale : $z(t) = z_H + z_P = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right) + z_{\text{éq}}$

4. $z(0) = A + z_{\text{éq}} = H - \ell_0$, donc $A = H - \ell_0 - z_{\text{éq}} = \frac{mg}{k}$

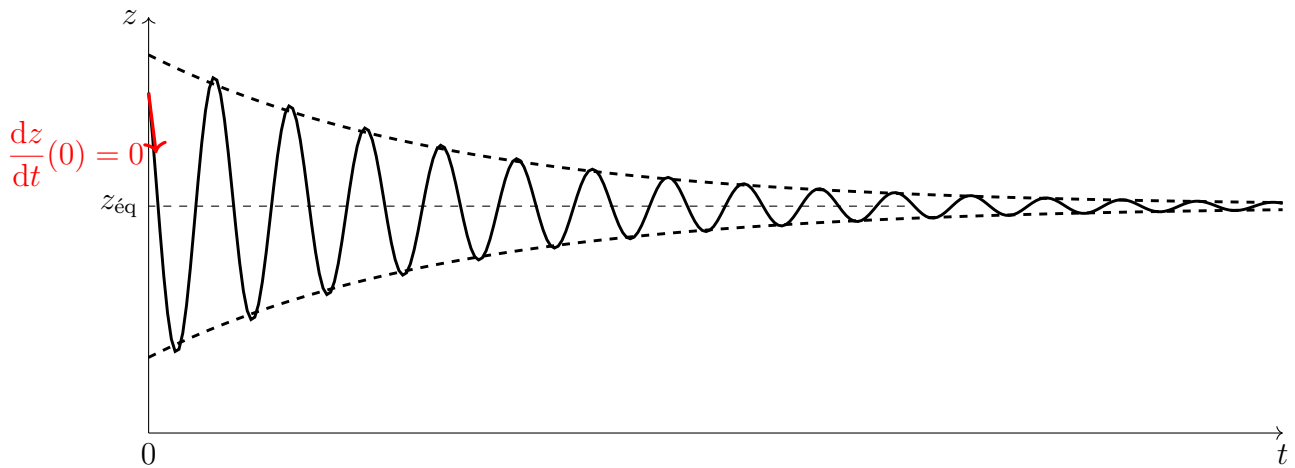
$$\frac{dz}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right) - A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \right)$$

$$\text{Soit } \frac{dz}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = -v_0, \text{ soit } B = \frac{A}{\Omega\tau} - \frac{v_0}{\Omega} = \frac{mg}{k\Omega\tau} - \frac{v_0}{\Omega}$$

$$\text{Soit } z(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{mg}{k} \cos(\Omega t) + \left(\frac{mg}{k\Omega\tau} - \frac{v_0}{\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right) + z_{\text{éq}}$$

R14. **Tracer l'allure** de $z(t)$, en la soignant, et en faisant apparaître les éléments importants.

Solution:



Exercice n°4 Distributeur de plateaux à la cantine (Durée ~ 20 min)

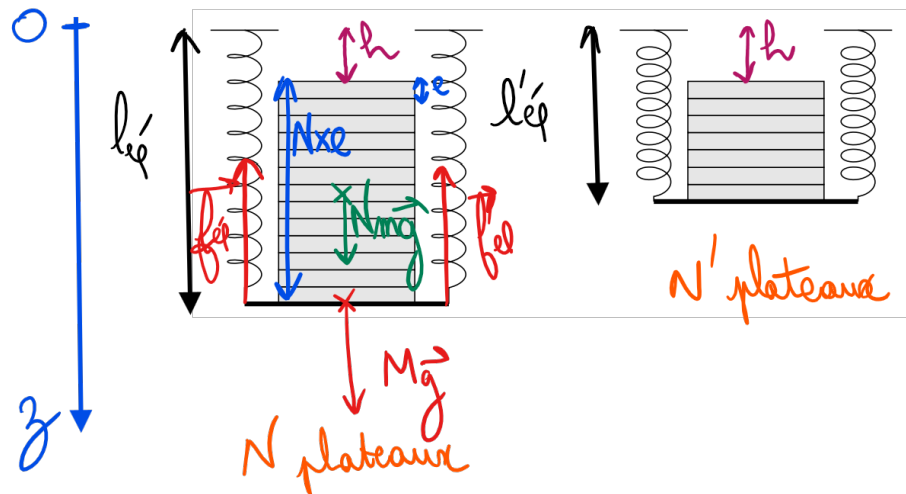
De nombreuses structures de restauration collective utilisent pour la distribution des plateaux ou assiettes des chariots à niveau constant. Les plateaux sont posés sur un support plan maintenu par des ressorts de telle sorte que le haut de la pile soit toujours à la même hauteur, quel que soit le nombre de plateaux empilés.

Déterminer la constante de raideur et la longueur à vide des ressorts à utiliser.

Cet exercice demande de l'initiative : toute prise d'initiative sera valorisée. Ne pas hésiter à introduire toutes les grandeurs nécessaires, que l'on prendra soin de définir.

Il faudra proposer des valeurs raisonnables de la masse d'un plateau, de son épaisseur, et de la hauteur qui sépare le haut de la pile et les arêtes supérieures des ressorts.

Solution:



Je note M la masse du support plan sur lequel sont posés les plateaux, $m = 100$ g la masse d'un plateau, et $e = 1$ cm son épaisseur.

Les deux ressorts sont identiques, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k .

Système : {support + N plateaux }

Référentiel : celui de la cantine

Bilan des forces :

— poids $(M + Nm)\vec{g} = (M + Nm)g\vec{u}_z$

— force de rappel élastique : $\vec{f}_{el} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$ (à compter deux fois, car il y a deux ressorts)

À l'équilibre : $(M + Nm)\vec{g} + 2\vec{f}_{el} = \vec{0}$

Soit $(M + Nm)g = 2k(\ell_{eq} - \ell_0)$

Ce qui est important à exprimer dans cet exercice est la distance entre le haut du support et le haut de la pile de plateau, qui doit être constante : notons-la h .

Pour N plateaux : $h = \ell_{eq} - Ne$, soit $\ell_{eq} = h + Ne$

Ainsi : $(M + Nm)g = 2k(h + Ne - \ell_0)$

Ajoutons un plateau : $(M + (N + 1)m)g = 2k(h + (N + 1)e - \ell_0)$

Soustrayons ces deux relations : $mg = 2ke$, soit $k = \frac{mg}{2e}$

AN. $k = \frac{0,1 \times 10}{2 \times 0,01} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pour $N = 0$ plateaux : $Mg = 2k(h - \ell_0)$, soit $\ell_0 = h - \frac{Mg}{2k}$

Prenons $M = m = 100$ g, et $h = 10$ cm, soit $\ell_0 = 0,1 - \frac{0,1 \times 10}{2 \times 50} = 0,99 \text{ m} = 9,9 \text{ cm}$