

? Lundi 17 novembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°4 (1) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS!!!!
- Chaque calcul doit être introduit par une phrase/des mots : « D'après la loi ... », « D'après l'énoncé », « D'après la définition », « D'après la question ... »
- Exprimer la grandeur demandée en LITTÉRAL, avant de passer aux valeurs numériques.
- ENCADRER : grandeur = expression littérale

Exercice n°1 Questions de cours : Représentation complexe (Durée : MAX 5 min)

R1. **Donner** la solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_A(t) \quad \text{où} \quad z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$$

Solution: La solution particulière est recherchée sous la forme du second membre : $Z_p = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$



Remarque –

Sous la forme de, ne signifie pas, égal à.
Les dérivées de Z_p ne sont pas nulles.

R2. **Donner** la représentation complexe de $z_A(t) = Z_{Am} \cos(\omega t)$.

Solution: $\underline{z_A} = Z_{Am} e^{j\omega t}$

R3. **Donner** la représentation complexe de $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, puis introduire l'amplitude complexe.

Solution: $\underline{s} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S_m} e^{j\omega t}$, avec $\underline{S_m} = S_m e^{j\varphi}$.

R4. Comment obtient-on S_m et φ connaissant $\underline{S_m}$?

Solution: $S_m = |\underline{S_m}|$ et $\varphi = \arg(\underline{S_m})$

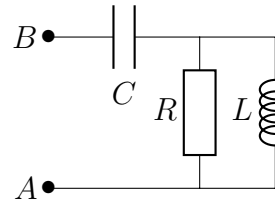
Exercice n°2 Circuits électriques en RSF (Durée : MAX 10 min)

R1. **Donner** l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R , d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C .

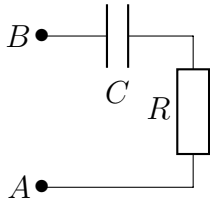
Solution: Impédance complexe de la résistance : $\underline{Z_R} = R$; du condensateur : $\underline{Z_C} = \frac{1}{Cj\omega}$ et de la bobine : $\underline{Z_L} = Lj\omega$

R2. Déterminer les impédances équivalentes entre A et B des circuits suivants.

(b) .



(a) .



Solution: Cf cours !

Solution: Cf cours !

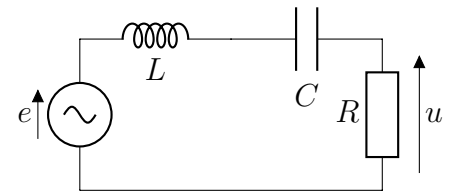


Remarque –

attention aux calculs lors de l'association parallèle, et notamment aux règles de calculs sur les fractions

R3. Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de force électromotrice $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R , C et L de façon efficace.



Solution: Les dipôles sont en série, d'après la relation du pont diviseur de tension : $\underline{u} = \frac{R}{R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} \underline{e}$



Remarque –

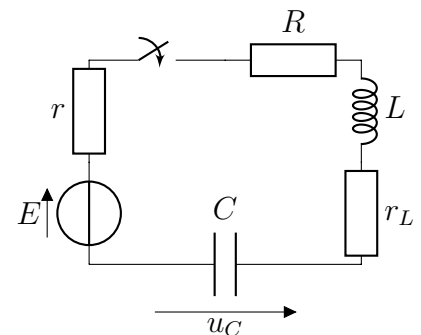
Il faut reconnaître une situation d'utilisation d'un pont diviseur de tension : les dipôles sont en série, et on souhaite déterminer la tension aux bornes de l'un d'entre eux.

ATTENTION : il ne faut pas confondre tension et impédance. Aucune loi ne somme des tensions (u et e) et des impédances.

Exercice n°3 Étude d'un circuit RLC (Durée ~ 30 min)

On étudie la réponse d'un circuit RCL série constitué, d'un condensateur de capacité $C = 1,0 \text{ nF}$, d'une résistance $R = 100 \Omega$, d'une bobine réelle (modélisée par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L et d'une résistance r_L) en série alimenté par un générateur réel modélisé par son modèle de Thévenin, de force électromotrice E et de résistance interne $r = 50 \Omega$.

Pour les temps $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est déchargé. À l'instant initial, $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

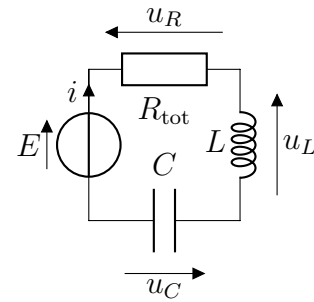


R1. Déterminer la résistance R_{tot} équivalente aux résistances de ce circuit. Reproduire le circuit avec R_{tot} .

Solution:

Remarque –

Il y a bien trois résistances en série !
Représenter un seul schéma pour toute la suite de l'exercice, de suite suffisamment grand et complété.



Les trois résistances R , r et r_L sont en série, ainsi

$$R_{\text{tot}} = R + r + r_L$$

R2. **Déterminer**, en justifiant très proprement la réponse, les valeurs de $u_C(0^+)$ et $\frac{du_C}{dt}(0^+)$, juste après la fermeture de l'interrupteur.

Solution: Le condensateur est initialement déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, d'où $u_c(0^+) = 0$

Avant la fermeture de l'interrupteur, l'intensité du courant est nulle, $i(0^-) = 0$.

L'intensité du courant à travers la bobine ne peut pas subir de discontinuité, donc $i(0^+) = i(0^-)$, d'où $i(0^+) = 0$

Or $\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$, donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$

R3. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$, et l'écrire sous forme canonique

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_C(\infty)$$

Identifier les expressions de ω_0 , Q et $u_C(\infty)$. Les nommer et donner leurs unités.

Solution:

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par u_c , il faut tout exprimer en fonction de u_c :

- Intensité du courant à travers le condensateur : $i = C \frac{du_c}{dt}$
- Tension aux bornes de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$, d'où : $u_L = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2}$
- Tension aux bornes de R_{tot} : $u_R = R_{\text{tot}} i = R_{\text{tot}} C \frac{du_c}{dt}$

Ainsi $u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_{\text{tot}} C \frac{du_c}{dt} = E \Leftrightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R_{\text{tot}}}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = \frac{E}{LC}$

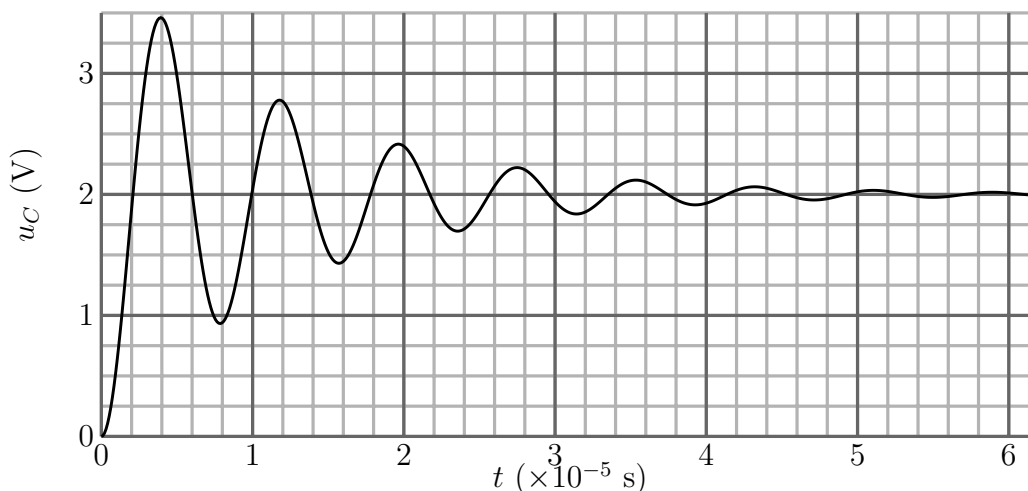
On identifie :

- la pulsation propre (en rad/s) : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;
- le facteur de qualité (sans unité) : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_{\text{tot}}}{L} \Leftrightarrow Q = \frac{L}{R_{\text{tot}}} \omega_0 \Leftrightarrow Q = \frac{L}{R_{\text{tot}}} \times \frac{1}{\sqrt{LC}}$, soit

$$Q = \frac{1}{R_{\text{tot}}} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Avec le second membre $u_C(\infty) = E$, la tension aux bornes du condensateur en régime permanent (en volt)

On donne l'évolution de u_C au cours du temps.



R4. Quelle est la nature du régime transitoire ? Que peut-on en déduire sur Q ?

Solution: L'évolution temporelle fournie est pseudo-périodique, donc $Q > \frac{1}{2}$.

R5. **Établir** la solution générale de l'équation différentielle précédente.

Exprimer la pseudo-période, notée T , en fonction de ω_0 et Q .

Solution:

1. Équation homogène $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$

a) Équation caractéristique : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$

b) Discriminant : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$

c) L'évolution temporelle fournie est pseudo-périodique, donc $\Delta < 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont complexes : $X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

2. Solution particulière : $\omega_0^2 u_{C,p} = \omega_0^2 E$, soit $u_{C,p} = E$.

3. Solution générale : $u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) + B \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) \right) + E$

La pseudo-pulsation s'écrit $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, et la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$



Remarque –

Il faut bien distinguer la pseudo-période, notée T , liée à la pseudo-pulsation qui intervient dans cos et sin ; et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ la constante de temps caractéristique qui intervient dans l'exponentielle.

R6. **Déterminer** les constantes d'intégration et conclure.

Solution: Conditions initiales :

$$u_c(0) = A + E = 0, \text{ soit } A = -E$$

$$\text{Dérivée : } \frac{du_c}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) - A\Omega \sin(\Omega t) + \Omega B \cos(\Omega t) \right)$$

$$\frac{du_c}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = 0, \text{ donc } B = \frac{A}{\Omega\tau} = -\frac{E}{\Omega\tau}$$

$$\text{Ainsi : } u_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right) \right)$$

Exercice n°4 Airbag (D'après Centrale-Supélec TSI 2022)

On se propose dans cette partie d'analyser le principe de détection d'un choc, conduisant au gonflage d'un airbag, à l'aide d'un matériau piézoélectrique.

I Principe d'un accéléromètre (Durée ~ 30 minutes)

On considère une masse m susceptible de se déplacer par rapport à une voiture. L'ensemble est modélisé en figure 1.

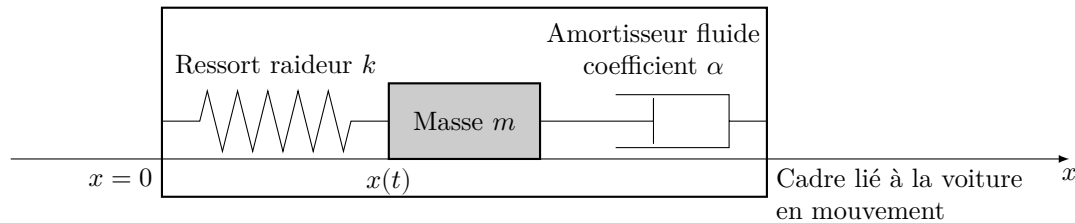


FIGURE 1

La masse m se déplace horizontalement et sans frottement solide sur un support lié à la voiture. Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide L_0 . L'amortisseur exerce une force de frottement fluide sur la masse, son expression étant $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$ où $\vec{V}$ représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture.

Le vecteur unitaire de l'axe des x , orienté dans le sens des x positifs, est noté $\vec{u}_x$. Le référentiel lié à la voiture est en mouvement par rapport au référentiel terrestre.

Pour étudier le mouvement de la masse dans le référentiel lié à la voiture, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entraînement, d'expression $\vec{f}_{ie} = m a_e \vec{u}_x$, où a_e est l'accélération constante de la voiture.

R1. Effectuer le bilan des différentes forces s'exerçant sur la masse m .

Solution: Système : masse $M(m)$

Référentiel : celui de la voiture

Bilan des forces :

- poids $m \vec{g}$
- réaction du support $\vec{R}_N$
- force de rappel $\vec{f}_{el} = -k(\ell(t) - L_0) \vec{u}_x = -k(x(t) - L_0) \vec{u}_x$
- force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$
- force d'inertie : $\vec{f}_{ie} = m a_e \vec{u}_x$

R2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, **montrer que**

l'équation différentielle du mouvement en $X(t) = x(t) - L_0$ peut être mise sous la forme

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = a_e$$

en exprimant Q et ω_0 en fonction de m , k et α .

Comment s'appellent ces grandeurs ? Quelles sont leurs unités ?

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{\text{él}} + \vec{f} + \vec{f}_{ie}$$

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R}_N - k(x(t) - L_0) \vec{u}_x + -\alpha \vec{V} + m a_e \vec{u}_x$$

$$\text{Selon } \vec{u}_x \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 + 0 - k(x(t) - L_0) - \alpha \frac{dx}{dt} + ma$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + k(x(t) - L_0) = ma_e$$

$$\text{Avec } X(t) = x(t) - L_0$$

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + \alpha \frac{dX}{dt} + kX(t) = ma_e$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dX}{dt} + \frac{k}{m} X(t) = a_e$$

On identifie avec la forme fournie en introduisant la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en rad/s) et le facteur

de qualité Q sans unité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Résolution

On suppose que la phase de freinage commence à $t = 0$ et on note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, le ressort a une longueur égale à L_0 . On s'intéresse au cas où le facteur de qualité Q est égal à $\frac{1}{2}$.

R3. Pourquoi $X(t = 0) = 0$ et $\frac{dX}{dt}(t = 0) = 0$?

Solution: Pour $t < 0$, la voiture ne freine pas, et la longueur du ressort vaut L_0 , donc $X(t < 0) = 0$

Comme pour tout $t < 0$, la longueur du ressort est constante, donc la masse ne bouge pas dans la voiture, donc $\frac{dX}{dt}(t < 0) = 0$.

R4. **Résoudre complètement** l'équation différentielle établie à la question R2 à l'aide des conditions initiales (R3).

Solution:

1. Résolution de l'équation homogène

$$\text{Polynôme caractéristique : } r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{Discriminant : } \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0, \text{ avec } Q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Racine double : } r = -\omega_0$$

$$\text{Solution homogène : } X_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

2. Solution particulière : $X_p = \frac{a}{\omega_0^2}$

3. Solution générale : $X(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + \frac{a_e}{\omega_0^2}$

4. Conditions initiales : $X(0) = 0 = B + \frac{a_e}{\omega_0^2}$

Dans le référentiel de la voiture, avant le début du freinage, la masse ne bouge pas, donc $\dot{X}(0) = 0$

Or $\dot{X} = e^{-\omega_0 t} \left(-\omega_0(At + B) + A \right)$

à $t = 0$: $\dot{X}(0) = 0 = -B\omega_0 + A$

Ainsi : $X(t) = \frac{a_e}{\omega_0^2} \left(1 - \left(1 + \omega_0 t \right) e^{-\omega_0 t} \right)$

Remarque –

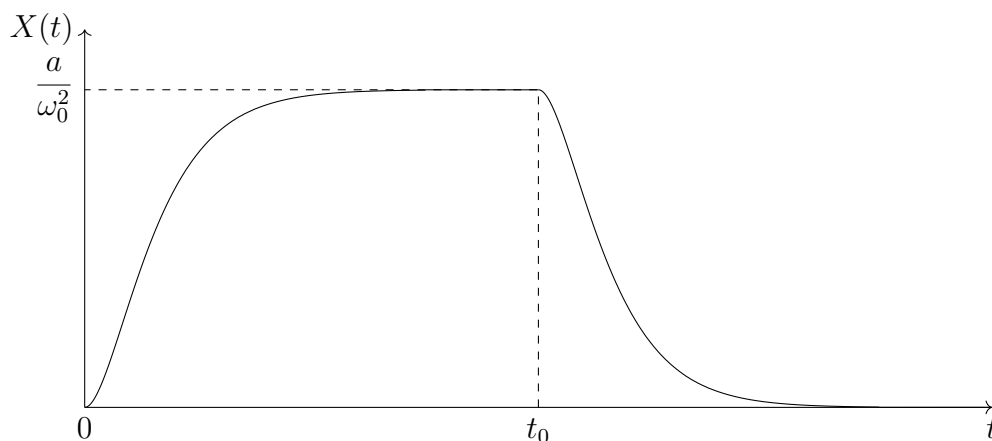
Exprimer les solutions à l'aide de ω_0 dans l'exponentielle (et non r), et de même dans la solution particulière.

R5. Quelle est la valeur atteinte par X quand $t \rightarrow \infty$?

Solution: $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \frac{a}{\omega_0^2}$

R6. **Représenter l'allure** des variations de $X(t)$ pour tout t , en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0 . On précisera en particulier l'expression de $X(t)$ à $t = t_0$ ainsi que sa valeur si t tend vers l'infini mais le calcul au-delà de t_0 n'est en aucun cas demandé.

Solution:



$X(t_0) = \frac{a}{\omega_0^2}$ puisque le régime permanent a eu le temps de s'établir.

Une fois que la voiture a fini de freiner, la masse occupe sa position d'équilibre et $X(0) = 0$ (ça revient à trouver la solution particulière de l'équation différentielle quand la voiture ne bouge plus, et pour laquelle $a_e = 0$).

Remarque –

Il fallait aussi tracer au-delà de t_0 .

II Microgénérateur piézoélectrique (Durée ~ 30 minutes)

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

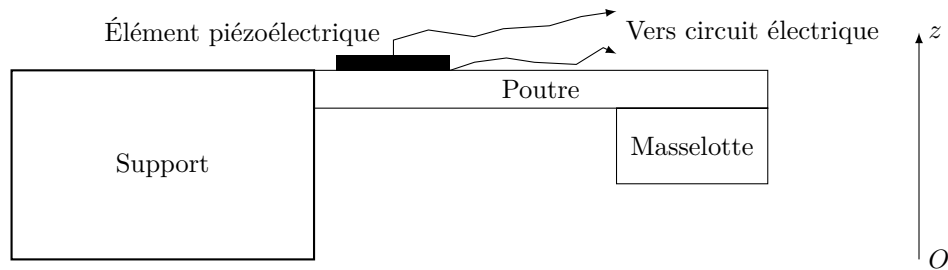


FIGURE 2

On appelle $\vec{F}_E$ la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\vec{F}_E = F_E \vec{u}_x = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_E(t)}{M}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$; $Q = \frac{\sqrt{kM}}{\alpha}$ et $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

On utilise la représentation complexe et on écrit $\underline{F}_E = F_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$.

R7. **Établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z}_m$ en fonction de F_0 , M , ω_0 , Q et ω .

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{z}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{z}}{dt} + \omega_0^2 \underline{z} &= \frac{\underline{F}_E}{M} \\ -\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} &= \frac{\underline{F}_E}{M} \\ \underline{z} &= \frac{\underline{F}_E/M}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \\ \underline{Z}_m e^{j\omega t} &= \frac{F_0 e^{j\omega t}/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \end{aligned}$$

Soit $\underline{Z}_m = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

On introduit pour la suite la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

R8. **Montrer** que l'amplitude Z_m s'écrit :

$$Z_m(x) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Solution:

$$\text{Amplitude complexe : } \underline{Z}_m = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_0}{M\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$\text{Amplitude : } Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On introduit la fonction $g : x \mapsto (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

R9. Résonance ?

(a) **Déterminer** les annulations de la dérivée de g .

$$\textbf{Solution:} \text{ Dérivée : } \frac{dg}{dx} = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

$$\frac{dg}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 1-x^2 = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

(b) À quelle condition sur Q la dérivée de g s'annule ailleurs qu'en 0 ?

$$\textbf{Solution:} \quad x \in \mathbb{R}, \text{ donc } x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \text{ n'existe que si } 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0, \text{ soit } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) **En déduire** que l'amplitude admet un maximum pour une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q . **Donner** la condition sur Q pour qu'elle existe.

$$\textbf{Solution:} \quad \text{L'amplitude admet bien un maximum lorsque } Q > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ en } \boxed{\omega_r = \omega_0 x_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

R10. Tracer l'allure de $Z_m(\omega)$ lorsque $Q = 2$ et $Q = 0,5$.

Solution:

