

? Lundi 17 novembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°4 (2) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS!!!!
- Chaque calcul doit être introduit par une phrase/des mots : « D'après la loi ... », « D'après l'énoncé », « D'après la définition », « D'après la question ... »
- Exprimer la grandeur demandée en LITTÉRAL, avant de passer aux valeurs numériques.
- ENCADRER : grandeur = expression littérale

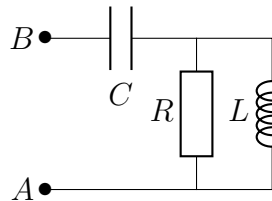
Exercice n°1 Circuits électriques en RSF (Durée ~ 15 min)

R1. **Donner** l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R , d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C .

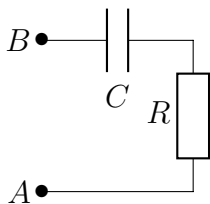
Solution: Impédance complexe de la résistance : $\underline{Z}_R = R$; du condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{Cj\omega}$ et de la bobine : $\underline{Z}_L = Lj\omega$

R2. **Déterminer** les impédances équivalentes entre A et B des circuits suivants.

(b) .



(a) .



Solution: Cf cours!

Solution: Cf cours!

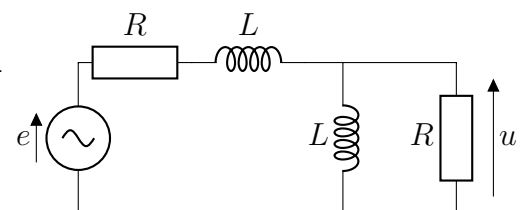


Remarque –

attention aux calculs lors de l'association parallèle, et notamment aux règles de calculs sur les fractions

R3. Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de force électromotrice $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R et L de façon efficace.

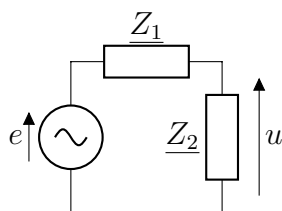


Solution:

Relation du pont diviseur de tension :

R et L en série : $\underline{Z}_1 = R + Lj\omega$

R et L en parallèle : $\frac{\underline{Z}_2}{R} + \frac{1}{Lj\omega}$

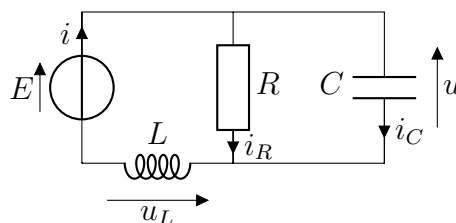


$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} e \\ &= \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \times \frac{1}{\underline{Z}_2}} e \\ &= \frac{1}{1 + (R + Lj\omega) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Lj\omega} \right)} e \\ &= \frac{1}{3 + RLj\omega + \frac{1}{RLj\omega}} e \end{aligned}$$

Exercice n°2 Étude d'un circuit RLC (Durée ~ 45 min)

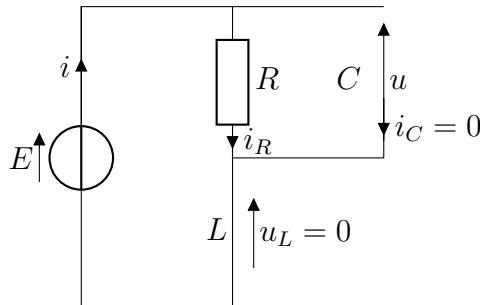
Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé.

L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.



R1. Par une étude du circuit en régime permanent, **déterminer** l'expression de u en régime permanent.

Solution: En régime permanent



soit $i_C(\infty) = 0$, $u_L(\infty) = 0$. La loi des mailles donne $\boxed{u(\infty) = E}$

R2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par u et l'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u(\infty)$$

Identifier les expressions de Q , ω_0 et $u(\infty)$. Les nommer et donner leurs unités.

Solution:

$$\begin{aligned}
 \text{Loi des mailles : } u_L + u &= E \\
 \text{Loi des nœuds : } i &= i_R + i_C \\
 \text{Loi d'Ohm : } u &= Ri_R \\
 \text{Loi du condensateur : } i_C &= C \frac{du}{dt} \\
 \text{Loi de la bobine : } u_L &= L \frac{di}{dt} \\
 E - u &= L \frac{d}{dt} (i_R + i_C) \\
 E - u &= L \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \right) \\
 E - u &= \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} \\
 LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u &= E \\
 \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} &= \frac{E}{LC}
 \end{aligned}$$

On identifie la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$, soit $Q = RC\omega_0$,

soit
$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

R3. **Déterminer** les deux conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation différentielle précédente.

Solution:

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé, donc $u(0^-) = 0$. Par continuité aux bornes du condensateur,

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

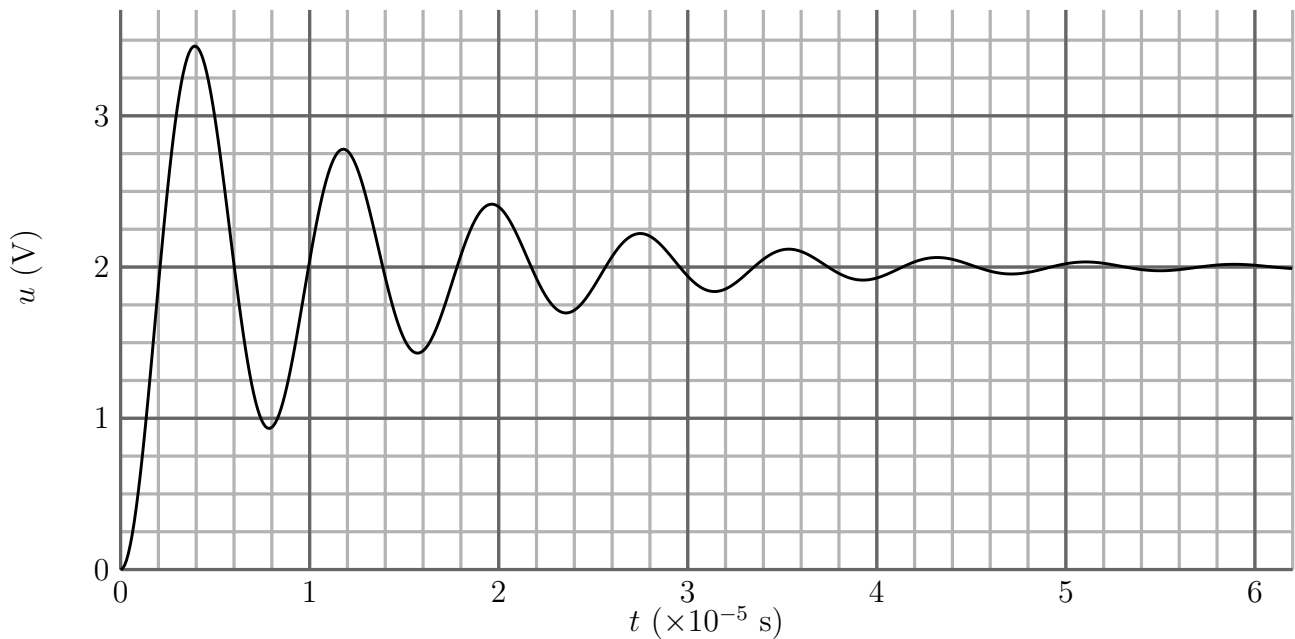
Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, donc $i(0^-) = 0$. Par continuité à travers l'intensité, $i(0^+) = i(0^-) = 0$

La loi d'Ohm donne $i_R(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$

Enfin, la loi des nœuds donne $i_C(0^+) = i(0^+) - i_R(0^+) = 0$

La loi du condensateur donne $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$

On donne l'évolution de u au cours du temps.



R4. Quelle est la nature du régime transitoire ?

Solution: L'évolution temporelle fournie est pseudo-périodique, donc $Q > \frac{1}{2}$.

R5. **Résoudre complètement** l'équation différentielle précédente dans ce cadre-là.

Exprimer la pseudo-période, notée T , en fonction de ω_0 et Q .

Solution:

Équation caractéristique associée à l'équation homogène : $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$

Les racines du polynôme caractéristique sont complexes : $X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Solution homogène : $u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) + B \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t\right) \right)$

On introduit pseudo-pulsation s'écrit $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, et la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$, et

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Solution particulière : $u_p = E$

Solution générale : $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + E$

$u(0) = A + E = 0$, soit $A = -E$

Dérivée : $\frac{du}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{1}{\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) - A\Omega \sin(\Omega t) + \Omega B \cos(\Omega t) \right)$

$\frac{du}{dt}(0) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = 0$, donc $B = \frac{A}{\Omega\tau} = -\frac{E}{\Omega\tau}$

Ainsi : $u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right) \right)$

Le décrément logarithmique est défini par $\delta = \ln \left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t+T) - u(\infty)} \right)$, où T est la pseudo-période.

R6. **Montrer** que le décrément logarithmique s'exprime uniquement en fonction de Q :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Solution: Expression du décrément logarithmique :

$$u(t+T) - u(\infty) = -u(\infty)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)} \left(\cos(\Omega(t+T)) + \frac{\frac{\omega_0}{2Q}}{\Omega} \sin(\Omega(t+T)) \right)$$

$$u(t+T) - u(\infty) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} \left[-u(\infty)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\frac{\omega_0}{2Q}}{\Omega} \sin(\Omega t) \right) \right]$$

$$u(t+T) - u(\infty) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} \times (u(t) - u(\infty))$$

$$\delta = \ln \left(\frac{1}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}} \right)$$

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q}T$$

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Soit $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

R7. En exploitant le graphe fourni, déterminer la valeur de Q .

En déduire la valeur de ω_0 . *Des approximations raisonnables et justifiées pourront être faites.*

Solution:

 **Remarque —**

Attention à la lecture de δ , la définition fait bien intervenir les amplitudes des pseudo-périodes successives : il faut mesurer l'écart entre la valeur finale et le maximum.

Sur le graphe, on peut lire la pseudo-période : $T = 8.10^{-6} \text{ s}$

et le décrément logarithmique : $\delta = \ln \frac{3,5 - 2}{2,75 - 2} = \ln \frac{1,5}{0,75} = \ln(2)$

D'après l'expression du décrément, on en déduit l'expression de Q : $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} \approx 4,5$

Pour $Q = 4,5$, on peut raisonnablement écrire $\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \times 20,25}} \approx 1$, donc $\Omega \approx \omega_0$

Ainsi $\omega_0 \approx \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8.10^{-6} \text{ s}} \approx 0,75.10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Exercice n°3 Airbag (D'après Centrale-Supélec TSI 2022)

On se propose dans cette partie d'analyser le principe de détection d'un choc, conduisant au gonflage d'un airbag, à l'aide d'un matériau piézoélectrique.

I Principe d'un accéléromètre

On considère une masse m susceptible de se déplacer par rapport à une voiture ; lors d'une phase de freinage, le référentiel lié à la voiture est non galiléen. L'ensemble est modélisé en figure 1.

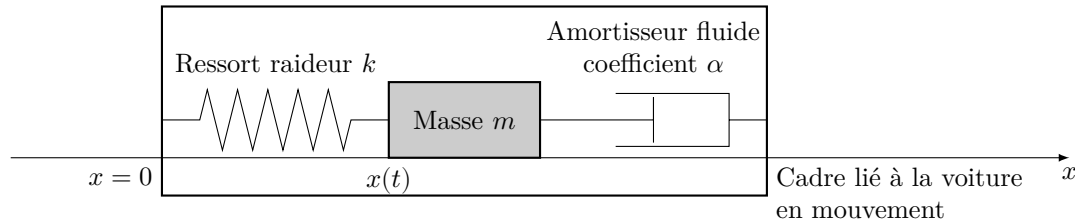


FIGURE 1

La masse m se déplace horizontalement et sans frottement solide sur un support lié à la voiture. Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide L_0 . L'amortisseur exerce une force de frottement fluide sur la masse, son expression étant $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$ où $\vec{V}$ représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture.

Le vecteur unitaire de l'axe des x , orienté dans le sens des x positifs, est noté $\vec{u}_x$. Le référentiel lié à la voiture est en mouvement par rapport au référentiel terrestre.

Pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel lié à la voiture, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entraînement, d'expression $\vec{f}_{ie} = m a_e \vec{u}_x$.

R1. **Effectuer** le bilan des différentes forces s'exerçant sur la masse m .

Solution: Système : masse $M(m)$

Référentiel : celui de la voiture

Bilan des forces :

- poids $m \vec{g}$
- réaction du support $\vec{R}_N$
- force de rappel $\vec{f}_{el} = -k(\ell(t) - L_0) \vec{u}_x = -k(x(t) - L_0) \vec{u}_x$
- force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$
- force d'inertie : $\vec{f}_{ie} = m a_e \vec{u}_x$

R2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, **montrer que** l'équation différentielle du mouvement en $X(t) = x(t) - L_0$ peut être mise sous la forme

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = a_e$$

en exprimant Q et ω_0 en fonction de m , k et α .

Comment s'appellent ces grandeurs ? Quelles sont leurs unités ?

Solution: On applique le PFD :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{\text{él}} + \vec{f} + \vec{f}_{ie}$$

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{R}_N - k(x(t) - L_0) \vec{u}_x + -\alpha \vec{V} + m a_e \vec{u}_x$$

$$\text{Selon } \vec{u}_x, m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 + 0 - k(x(t) - L_0) - \alpha \frac{dx}{dt} + m a_e$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + k(x(t) - L_0) = m a_e$$

$$\text{Avec } X(t) = x(t) - L_0$$

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + \alpha \frac{dX}{dt} + kX(t) = m a_e$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dX}{dt} + \frac{k}{m} X(t) = a$$

On identifie avec la forme fournie en introduisant la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en rad/s) et le facteur

de qualité Q sans unité tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Résolution

On suppose que la phase de freinage commence à $t = 0$ et on note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, le ressort a une longueur égale à L_0 et la masse est sans mouvement dans le référentiel lié à la voiture.

On s'intéresse au cas où le facteur de qualité Q est égal à $\frac{1}{2}$.

R3. Que vaut $X(t)$ pour $t < 0$?

Solution: Pour $t < 0$, la voiture ne freine pas, et la longueur du ressort vaut L_0 , donc $X(t < 0) = 0$

Comme pour tout $t < 0$, $X(t) = 0$, alors la dérivée est nulle : $\frac{dX}{dt} = 0$: la masse ne bouge pas dans le référentiel de la voiture.

R4. **Résoudre complètement** l'équation différentielle établie à la question R2.

Solution:

1. Résolution de l'équation homogène

$$\text{Polynôme caractéristique : } r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{Discriminant : } \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0, \text{ avec } Q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Racine double : } r = -\omega_0$$

$$\text{Solution homogène : } X_H(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

2. Solution particulière : $X_p = \frac{a}{\omega_0^2}$

3. Solution générale : $X(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + \frac{a}{\omega_0^2}$

4. Conditions initiales : $X(0) = 0 = B + \frac{a}{\omega_0^2}$

Dans le référentiel de la voiture, avant le début du freinage, la masse ne bouge pas, donc $\dot{X}(0) = 0$

$$\text{Or } \dot{X} = e^{-\omega_0 t} \left(-\omega_0 (At + B) + A \right)$$

$$\text{à } t = 0 : \dot{X}(0) = 0 = -B\omega_0 + A$$

Ainsi :
$$X(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right)$$



Remarque –

Exprimer les solutions à l'aide de ω_0 dans l'exponentielle (et non r), et de même dans la solution particulière.

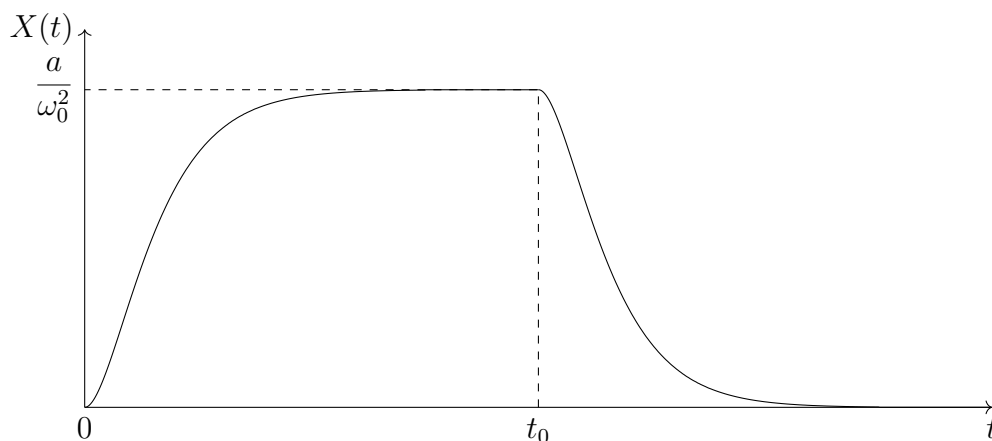
R5. Quelle est la valeur atteinte par X quand $t \rightarrow \infty$?

Solution:
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = \frac{a}{\omega_0^2}$$

R6. **Représenter l'allure** des variations de $X(t)$ pour tout t , en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0 .

On précisera en particulier l'expression de $X(t)$ à $t = t_0$ ainsi que sa valeur si t tend vers l'infini mais le calcul au-delà de t_0 n'est en aucun cas demandé.

Solution:



$X(t_0) = \frac{a}{\omega_0^2}$ puisque le régime permanent a eu le temps de s'établir.

Une fois que la voiture a fini de freiner, la masse occupe sa position d'équilibre et $X(0) = 0$.



Remarque –

Il fallait aussi tracer au-delà de t_0 .

II Microgénérateur piézoélectrique

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

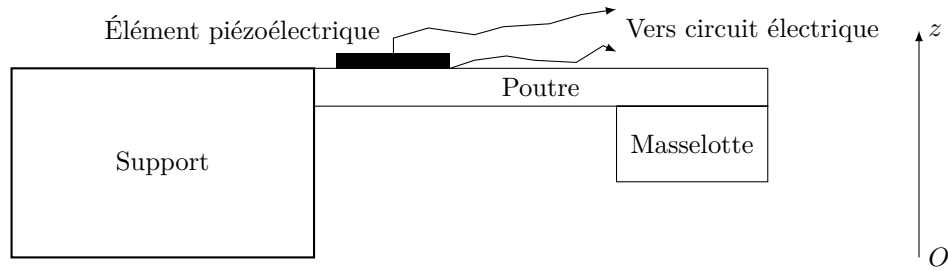


FIGURE 2

On appelle $\vec{F}_E$ la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\vec{F}_E = F_E \vec{u}_x = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$. On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_E}{M}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et $Q = \frac{\sqrt{kM}}{\alpha}$.

On pose $z(t) = \Re(Z_m e^{j\omega t})$.

R7. **Établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z}_m$ en fonction de F_0 , M , ω_0 , Q et ω .

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{z}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{z}}{dt} + \omega_0^2 \underline{z} &= \frac{F_E}{M} \\ -\omega^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{z} + \omega_0^2 \underline{z} &= \frac{F_E}{M} \\ \underline{z} &= \frac{F_E/M}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \\ \underline{Z}_m e^{j\omega t} &= \frac{F_0 e^{j\omega t}/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \end{aligned}$$

Soit $\underline{Z}_m = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$

On introduit pour la suite la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

R8. **Exprimer** l'amplitude Z_m du mouvement de la masse M .

Solution:

Amplitude complexe : $\underline{Z}_m = \frac{F_0/M}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{F_0}{M\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$

Amplitude :
$$Z_m = |Z_m| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

R9. **Montrer** qu'il se produit une résonance en une pulsation ω_r que l'on exprimera en fonction de ω_0 et Q , à une condition sur Q que l'on exprimera.

Solution:

On introduit la fonction $g : x \mapsto (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

Dérivée : $\frac{dg}{dx} = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}$

$\frac{dg}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 1-x^2 = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

$x \in \mathbb{R}$, donc $x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ n'existe que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

L'amplitude admet un maximum lorsque $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\omega_r = \omega_0 x_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Dans toute la suite, on se place à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

R10. **Déterminer** à cette pulsation l'expression de l'amplitude complexe en fonction de M , k , α et F_0 .

Solution:

En déduire l'amplitude et la phase à l'origine des temps.

Solution:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_m(\omega_0) &= \frac{F_0/k}{\frac{j}{Q}} \\ &= -j \frac{F_0}{k} \times \frac{\sqrt{Mk}}{\alpha} \\ &= -j \frac{F_0}{\alpha} \sqrt{\frac{M}{k}} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_m(\omega_0) = -j \frac{F_0}{\alpha} \sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{F_0}{j\alpha\omega_0}$$

Amplitude : $Z_m(\omega_0) = \frac{F_0}{\alpha\omega_0}$ et $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$ car $\underline{Z}_m(\omega_0)$ est un imaginaire pur de partie imaginaire négative.

R11. **En déduire** l'expression réelle de $z(t)$, puis l'expression de la vitesse $v_z(t)$ en fonction de F_0 , α et ω_0 .

Solution:

$$\begin{aligned} z(t) &= Z_m(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \\ &= \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$z(t) = \frac{F_0}{\alpha \omega_0} \sin(\omega_0 t) \text{ puis } v_z(t) = \frac{F_0}{\alpha} \cos(\omega_0 t)$$