

? Lundi 1^{er} décembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°5 (1-0) – Corrigé

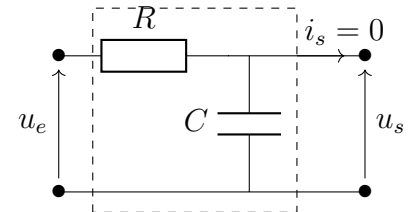


Remarque – Consignes générales :

- Faites des SCHÉMAS!!!!
- Chaque calcul doit être introduit par une phrase/des mots : « D'après la loi ... », « D'après l'énoncé », « D'après la définition », « D'après la question ... »
- Exprimer la grandeur demandée en LITTÉRAL, avant de passer aux valeurs numériques.
- ENCADRER : grandeur = expression littérale

Exercice n°1 Questions de cours sur les filtres (Durée ~ 30 min)

On étudie le filtre ci-contre constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C , alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$.



R1. **Définir** la fonction de transfert du filtre ci-dessus.

Solution: La fonction de transfert est définie par : $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$

R2. **Établir** l'expression de la fonction de transfert du filtre ci-dessus.

Solution: Relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{u_s} &= \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \underline{u_e} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{Cj\omega} + R} \underline{u_e} \\ \underline{u_s} &= \frac{1}{1 + RCj\omega} \underline{u_e} \\ \underline{H} &= \frac{1}{1 + RCj\omega} \end{aligned}$$

On admet qu'elle s'écrit $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ où ω_c est la pulsation de coupure.

R3. **Définir** le gain en décibels.

Solution: Le gain en décibels est défini par $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$

R4. On étudie le comportement à basse fréquence.

(a) **Établir** l'équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence.

Solution: À basse fréquence : $\omega \ll \omega_c$
 $\underline{H}_{BF} \sim 1 \in \mathbb{R}^+$

(b) **En déduire** l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en gain.

Solution: $G_{dB,BF} \approx 0$ dB : le diagramme de Bode en gain présente une asymptote horizontale à 0 dB

(c) **En déduire** l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en phase.

Solution: $\phi_{BF} = 0$: le diagramme de Bode en phase présente une asymptote horizontale à 0 rad

R5. On étudie le comportement à haute fréquence.

(a) **Établir** l'équivalent de la fonction de transfert à haute fréquence.

Solution: À haute fréquence : $\omega \gg \omega_c$
 $\underline{H}_{HF} \sim \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \in j\mathbb{R}^-$

(b) **En déduire** l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en gain.

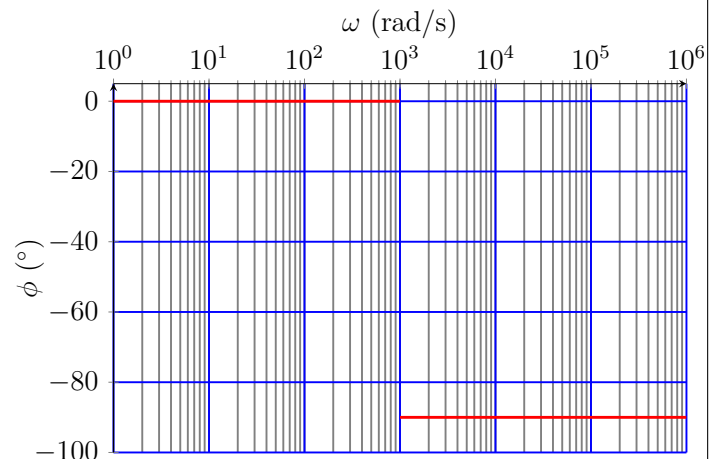
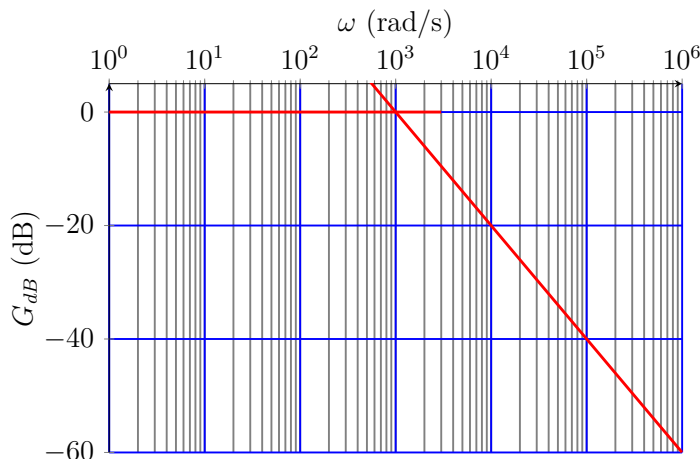
Solution: $G_{dB,HF} \approx -20 \log(RC\omega) = 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega)$: le diagramme de Bode en gain présente une asymptote oblique de pente -20 dB/dec

(c) **En déduire** l'équation de l'asymptote au diagramme de Bode en phase.

Solution: $\phi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$: le diagramme de Bode en phase présente une asymptote horizontale à $-\frac{\pi}{2}$ rad.

R6. **Représenter** le diagramme de Bode asymptotique sur le document réponse. On pourra prendre $\omega_c = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solution:



Exercice n°2 Haut-parleur (Durée ~ 50 min)

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m , se déplaçant horizontalement le long d'un axe $(O, \vec{u}_x)$. Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et à un amortisseur fluide de constante α dont l'action est modélisée par la force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

Elle est par ailleurs soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur qui s'exprime selon $\vec{F}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$, où K est une constante et $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

On travaille dans le référentiel du laboratoire $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

Données : $m = 10 \text{ g}$; $k = 15.10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $K = 200 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$; $I_m = 1,0 \text{ A}$.

R1. **Montrer que** la force de rappel élastique s'exprime selon $\vec{f}_{\text{él}} = -kx(t)\vec{u}_x$. La réponse devra être très proprement justifiée pour obtenir les points.

Solution:



Remarque – Rigueur et honnêteté !

Force de rappel élastique :

$\vec{f}_{\text{él}} = -k(\ell(t) - \ell_0)(-\vec{u}_x)$, avec « $-\vec{u}_x$ » car le vecteur unitaire dirigé du point d'attache vers la masse m est opposé à $\vec{u}_x$.

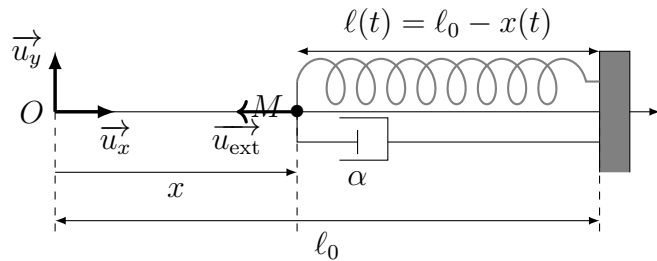
De plus, $\ell(t) = \ell_0 - x(t)$, donc $\boxed{\vec{f}_{\text{él}} = -kx(t)\vec{u}_x}$

R2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par x , la position de la masse m .

Solution:

Système : équipage mobile assimilé à une masse m

Référentiel : du laboratoire considéré galiléen à l'échelle de l'expérience



Remarque –

Ne pas oublier le poids et la réaction du support !

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g}$
- force de rappel élastique
- réaction du support $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_z$
- force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$
- force $\vec{F} = KI_m \cos(\omega t)\vec{u}_x$

On applique le PFD à m : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{\text{él}} + \vec{f} + \vec{F}$

avec $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$

En projection selon $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = -kx(t) - \alpha\dot{x} + KI_m \cos(\omega t)$

soit $\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{K}{m}I_m \cos(\omega t)}$

R3. **Montrer** qu'elle s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{K}{m} i(t)$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q .

Solution: Sous forme canonique $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{K}{m} I_m \cos(\omega t)$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}$

R4. **Justifier** que la réponse en régime forcée s'écrit sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Solution: La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ avec $x_p(t)$ recherchée sous la forme du second membre, donc sous la forme d'une fonction sinusoïdale $x_p(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. La solution homogène $x_h(t)$ correspond au régime transitoire et tend vers 0 au bout de quelques temps caractéristiques.

Une fois le régime transitoire terminé, le régime forcé est atteint et l'évolution est décrite par

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On utilise la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

R5. **Établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ de la réponse $\underline{x}$. On pourra introduire $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.

Solution: $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$, où $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe

Passons l'équation différentielle à l'aide de la notation complexe

$$-\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = \frac{K I_m}{m} e^{j\omega t}, \text{ soit } \underline{X}_m = \frac{\frac{K I_m}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

$$\text{Soit } \underline{X}_m = \frac{\frac{K I_m}{m \omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

$$\text{Soit } \underline{X}_m = \frac{\frac{K I_m}{k}}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}}$$

R6. **Montrer** que l'amplitude se met sous la forme :

$$X_m = \frac{B}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

où B est une constante en fonction de K , I_m et m .

Solution: L'amplitude est le module : $X_m = |\underline{X}_m| = \frac{\frac{K I_m}{k}}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$

On introduit la fonction $g : u \mapsto (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$

- R7. (a) Après avoir calculé la dérivée de g par rapport à u , déterminer les valeurs de u qui annulent la dérivée de g .
- (b) **En déduire** qu'il se produit une résonance pour une pulsation ω_r dont on établira l'expression en fonction de ω_0 et Q , et **à condition que** que $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution: Résonance? C'est le phénomène pour lequel pour une pulsation donnée l'amplitude passe par un maximum. Il faut donc déterminer la pulsation pour laquelle X_m est maximale.

Le numérateur ne dépend pas de ω , donc on peut étudier uniquement le numérateur. On étudie donc g , à la recherche d'un minimum.

Dérivons $g(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$:

$$g'(u) = -4u(1 - u^2) + \frac{2u}{Q^2}$$

$$g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } 1 - u^2 = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}, \text{ soit } \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \text{ qui existe lorsque}$$

$$Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'existe pas de résonance, l'amplitude ne présente pas de maximum.

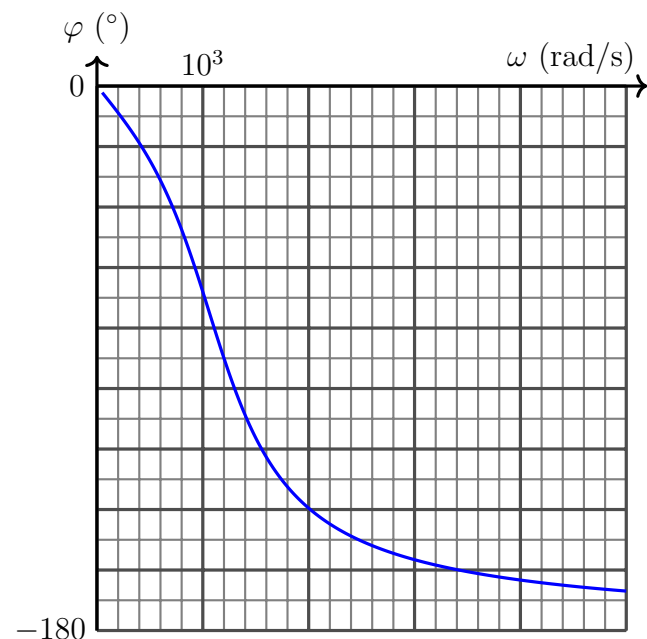
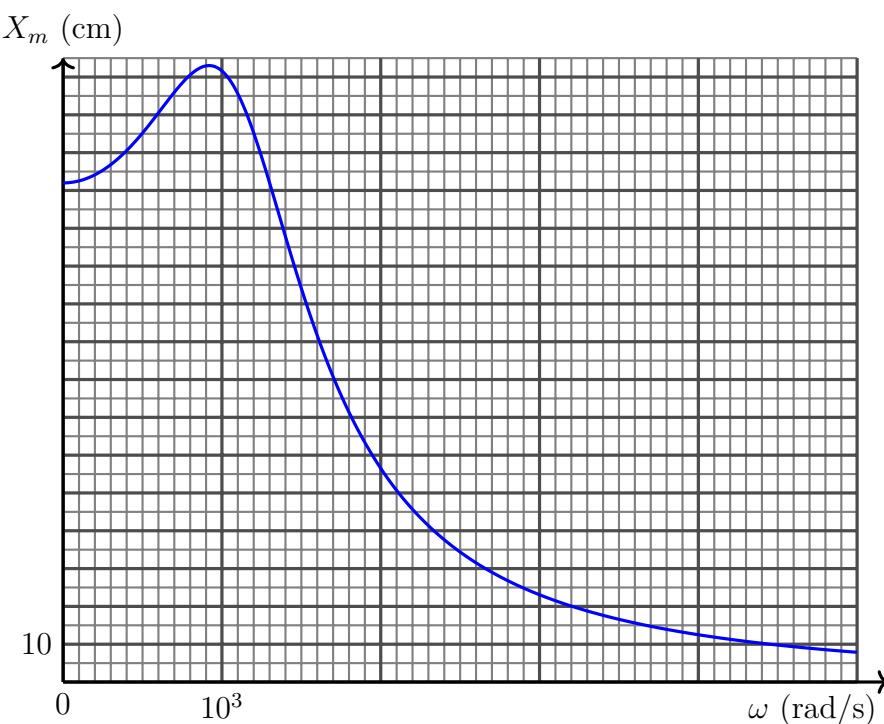
Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il se produit une résonance pour la pulsation de l'excitation égale $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

- R8. **Exprimer** X_m à la pulsation propre ω_0 . Que vaut la phase $\varphi(\omega_0)$?

Solution:

$$X_m(\omega_0) = \frac{K I_m}{j/Q}, \text{ donc } \boxed{\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$$

On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.



- R9. **Déterminer graphiquement** ω_r et ω_0 .
En déduire la valeur du facteur de qualité.

Solution: En ω_0 : $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$, on lit $\omega_0 = 1200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

On lit la pulsation de résonance $\omega_r = 900 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Or $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, donc $1 - \frac{1}{2Q^2} = \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2Q^2} = 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}$

Ainsi
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)}}$$

A.N. : $\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4} = 0,75$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(1 - 0,75^2)}} = \frac{1}{\sqrt{0,88}} \approx 1,1$$

Exercice n°3 Un circuit RLC (Durée ~ 30 min)

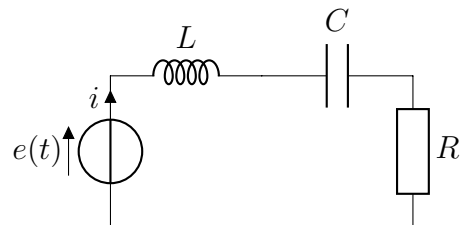
On considère le circuit représenté ci-contre.

Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale :

$e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

On étudie le circuit en régime sinusoïdal forcé, et on veut

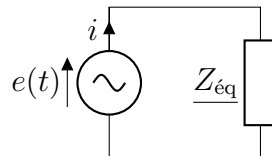
étudier $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$



R1. **Établir** l'expression de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ du circuit.

Reproduire le circuit avec le générateur et $\underline{Z}_{\text{eq}}$.

Solution: Les trois dipôles sont en série, donc
$$\underline{Z}_{\text{eq}} = R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}$$



R2. **Établir** l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}_m$ de l'intensité $\underline{i}$ en fonction de E_m , R , L , C et ω .

Solution: D'après la loi des mailles et d'Ohm : $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{\text{eq}}}$, soit $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}}$

Ainsi :
$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}}$$

On admet qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\underline{I}_m = \frac{E_m/R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Solution: cf cours

R3. **Exprimer** l'amplitude I_m .

Solution: L'amplitude de u est :
$$I_m = |I_m| = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

R4. **Montrer** qu'il se produit une résonance pour une pulsation que l'on exprimera en fonction de ω_0 indépendamment de la valeur de Q .

Solution: Le numérateur ne dépend pas de ω , I_m est maximale quand le dénominateur est minimal.

Ce qui se produit quand $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ est minimal, soit nul, ce qui se produit pour $\boxed{\omega = \omega_0}$

La résonance se produit pour $\omega = \omega_0$ indépendamment de la valeur de Q .

 **Remarque –**

On peut aussi étudier la fonction $g : \omega \mapsto \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ Dérivée : $\frac{dg}{d\omega} = 2 \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right) \times \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

Elle s'annule pour $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0$, soit $\omega = \omega_0$.

R5. Après avoir **rappelé la définition** de la bande passante à -3 dB, **donner** l'expression de sa largeur, notée $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q .

Solution: La bande passante à -3 dB est l'intervalle de pulsation dans laquelle $U_m(\omega) > \frac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.

Sa largeur s'écrit $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$

R6. **Déterminer** ω_0 et Q à l'aide des graphes ci-dessous. **Justifier** la réponse.

Solution: On lit la pulsation de résonance $\omega_0 = 5.10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

À la résonance : $I_{m,\max} = 5,6 \text{ mA}$

Aux pulsations de coupure $\omega_c : I_m(\omega_c) = \frac{5,6}{\sqrt{2}} = \frac{5,6}{1,4} = 4 \text{ mA}$

On lit $\omega_{c1} = 3,9.10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_{c2} = 6,4.10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Ainsi : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{5.10^3}{2,5.10^3} = 2$

