

? Lundi 1^{er} décembre 2025 – Durée : 2 heures
Devoir Surveillé n°5 (2) – Corrigé

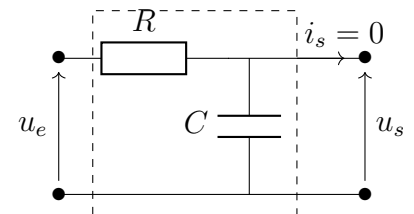


Remarque – Consignes générales :

- Sur un sujet qui paraît difficile, il faut garder confiance en vos capacités et vos connaissances, sans vous démobiler quand vous avez le sentiment de ne pas y arriver.
- Au début du DS, parcourez l'ensemble du sujet, à la recherche de ce qui ressemble au cours, de ce qui paraît facile pour s'assurer de l'avoir traité à la fin du devoir.

Exercice n°1 Questions de cours sur les filtres (Durée ~ 30 min)

On étudie le filtre ci-contre constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C , alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$.



R1. Définir la fonction de transfert du filtre ci-dessus.

Solution: La fonction de transfert est définie par : $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$

R2. Établir l'expression de la fonction de transfert du filtre ci-dessus.

Solution: Relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{u_s} &= \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \underline{u_e} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{Cj\omega} + R} \underline{u_e} \\ \underline{u_s} &= \frac{1}{1 + RCj\omega} \underline{u_e} \\ \underline{H} &= \frac{1}{1 + RCj\omega} \end{aligned}$$

On admet qu'elle s'écrit $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ où ω_c est la pulsation de coupure.

R3. Définir le gain en décibels.

Solution: Le gain en décibels est défini par $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$

R4. Déterminer les équations des asymptotes aux diagrammes de Bode en gain et en phase à basse fréquence.

Solution: À basse fréquence : $\omega \ll \omega_c$

$$H_{BF} \underset{0}{\sim} 1 \in \mathbb{R}^+$$

$G_{dB,BF} \approx 0$ dB : le diagramme de Bode en gain présente une asymptote horizontale à 0 dB

$\phi_{BF} = 0$: le diagramme de Bode en phase présente une asymptote horizontale à 0 rad

R5. **Déterminer** les équations des asymptotes aux diagrammes de Bode en gain et en phase à haute fréquence.

Solution: À haute fréquence : $\omega \gg \omega_c$

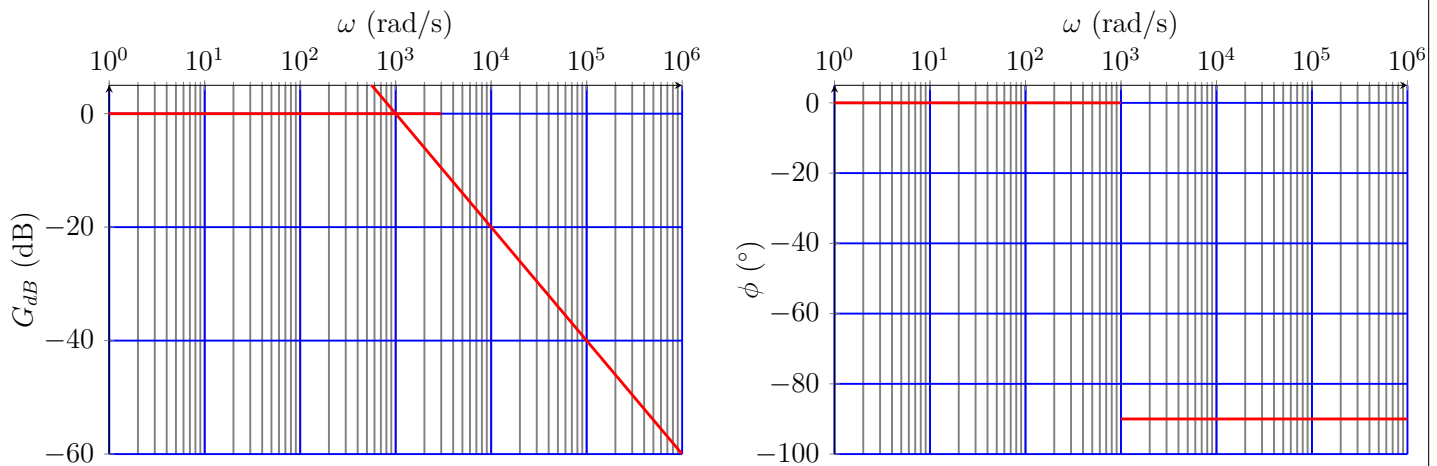
$$H_{HF} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_c}} \in j\mathbb{R}^-$$

$G_{dB,HF} \approx -20 \log(\frac{\omega}{\omega_c}) = 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega)$: le diagramme de Bode en gain présente une asymptote oblique de pente -20 dB/dec

$\phi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$: le diagramme de Bode en phase présente une asymptote horizontale à $-\frac{\pi}{2}$ rad.

R6. **Représenter** le diagramme de Bode asymptotique. On pourra prendre $\omega_c = 10^3$ rad · s⁻¹.

Solution:



Exercice n°2 Passerelle Millénium Bridge (D'après Concours Mines-Pont)

R1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

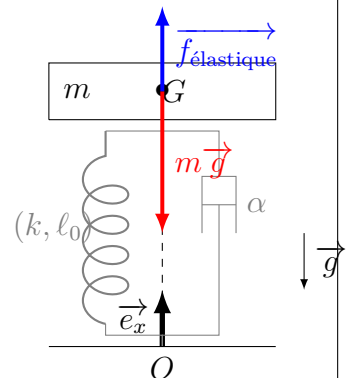
dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g , ω_0 et ℓ_0 . On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ .

Solution:

- Système : masse m
- Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience
- Bilan des forces :
 - Poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_x$
 - Force de rappel élastique $\vec{f}_{\text{élastique}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_x$
 - Force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$

Les forces doivent être représentées sur le schéma, ce qui évitera les problèmes de signe lors des projections.

On applique le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}_{\text{élastique}} + \vec{F}_f$, avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$
On projette selon l'axe Ox : $m\ddot{x} = -mg - k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha\dot{x}$, avec $\ell(t) = x(t)$, ainsi :



$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx(t) = -mg + k\ell_0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x(t) = -g + \frac{k}{m}\ell_0$, que l'on peut réécrire sous la forme proposée en factorisant par $\frac{k}{m}$: $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{m}{k}g - \ell_0\right) = 0$.

On peut alors poser $X(t) = x(t) - \left(-\frac{m}{k}g + \ell_0\right) = x(t) - \tilde{x}$, avec $\tilde{x} = \ell_0 - \frac{m}{k}g$

Équation différentielle que l'on peut identifier avec $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = 0$, en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre et $2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}$, d'où $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$, facteur d'amortissement.

- R2. Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$.
Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ , X_0 , V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement.

Solution:

$\xi = 0$: Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique $\ddot{X} + \omega_0^2X(t) = 0$, dont la solution générale s'écrit

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$X(0) = X_0 = A$ et $\dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0$. Ainsi $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$: l'oscillateur oscille à la pulsation-propre sans ne jamais s'arrêter : cela revient à considérer qu'il n'y a pas de frottements.

$0 < \xi < 1$:

1. Résolution de l'équation différentielle (qui est déjà homogène) :

Étape 1 Équation caractéristique : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

Étape 2 Discriminant : $\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$ si $0 < \xi < 1$

Étape 3 Racines de l'équation caractéristique complexes conjuguées : $r = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

Étape 4 Solution : $X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right)$, avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

2. Recherche des deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales :

$$X(0) = X_0 = A$$

$$\dot{X}(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(-\xi\omega_0 \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right) - \omega A \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \right)$$

$$\text{D'où } \dot{X}(0) = -\xi\omega_0 A + B\omega = V_0 \Leftrightarrow B = \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega}$$

Ainsi $X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$, il s'agit ici d'un régime pseudo-périodique :

l'oscillateur va osciller avant d'atteindre la position d'équilibre $X(\infty) = 0 \Leftrightarrow x(\infty) = \tilde{x}$.

- R3. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \vec{e}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Solution: L'ajout de cette force donne pour équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha - \beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Le terme $\frac{\alpha - \beta}{m}$ devant $\dot{x}$ est plus faible qu'en l'absence du vent, par conséquent ξ sera plus faible et la durée du régime transitoire avant atteinte du régime permanent sera plus longue : le pont va osciller plus longtemps.

Si β devient supérieur à α , alors $\xi < 0$ et l'exponentielle diverge : l'amplitude de X va augmenter au cours du temps, ce qui peut aller à la rupture.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$.

Le vecteur $\vec{F}_0$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0,4\vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\vec{e}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y(t) = X(t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

R4. (a) Que devient l'équation de l'oscillateur en $Y(t)$ sous le forçage piéton ?

(b) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement $\underline{Y}$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{F_1}{m}$. On exprimera $\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}$ en fonction de ξ , ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Solution:

 **Remarque –**

Il faut ajouter la force $\vec{F}$ au bilan des forces précédent, pour prendre en compte l'action des piétons.

Il faut ajouter la force $\vec{F}$ au bilan des forces précédent, le PFD devient alors : $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{f}_{\text{élastique}} + \vec{F}_f + \vec{F}$, avec $\vec{F} = -(F_0 + F_1 \cos(\omega t)) \vec{e}_x$

En projection selon $\vec{e}_x$: $m\ddot{x} = -mg - k(x(t) - \ell_0) - \alpha\dot{x} - F_0 - F_1 \cos(2\pi ft)$

En réintroduisant les mêmes grandeurs X et $\tilde{x}$ que précédemment : $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{-F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$,

que l'on peut écrire : $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 \left(X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right) = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$

En introduisant $Y(t) = X(t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, on obtient $\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$

En utilisant la notation complexe, on obtient (**attention à bien passer aussi le membre de droite en complexe, il ne peut plus rester du cos**) :

$$-\omega^2 \underline{Y} + 2\xi\omega_0 i\omega \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = -\frac{F_1}{m} e^{i\omega t}$$

En posant $\underline{E} = \frac{F_1}{m} = \frac{F_1 e^{i\omega t}}{m}$, on obtient $\underline{Y} = \frac{-\underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega}$

Ainsi en introduisant $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \frac{-1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$

R5. (a) Sous quelle condition portant sur ξ un phénomène de résonance peut-il se produire ?

(b) Pour quelle pulsation ω_r , obtient-on alors ce phénomène ?

(c) Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\xi \ll 1$.

Solution:

Exprimons l'amplitude de H : $H = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$

 Remarque –

On attendait ici les calculs complets ! L'expression de la pulsation de résonance n'est pas à connaître, et la contrainte sur ξ pour avoir résonance non plus (d'autant plus que ξ n'apparaît nulle part dans le cours ...)

ATTENTION, la pulsation de résonance N'A AUCUN RAPPORT avec la pseudo-pulsation :

- la pseudo-pulsation est caractéristique du REGIME TRANSITOIRE (solution de l'équation homogène : cf question 1)
- la pulsation de résonance est la pulsation de l'excitation sinusoïdale s'exerçant sur le pont qui rend l'amplitude de la réponse maximale, elle se détermine en REGIME SINUSOÏDALE FORCE

Cherchons $\omega_r = \Omega_r \omega_0$ qui rend H (et donc l'amplitude de $Y(t)$) maximale, en cherchant Ω_r qui annule la dérivée de la fonction $g(\Omega) = (1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \Omega^2$: $\frac{dg}{d\Omega} = -4\Omega(1 - \Omega^2) + 8\xi^2 \Omega$
 $-4\Omega_r(1 - \Omega_r^2) + 8\xi^2 \Omega_r = 0 \Leftrightarrow \Omega_r = 0$ ou $2\xi^2 = 1 - \Omega_r^2 \Leftrightarrow \Omega_r^2 = 1 - 2\xi^2$
 Cette solution existe à condition que $1 - 2\xi^2 > 0$

Compte tenu des limites à basse et haute fréquence, cette annulation de la dérivée correspond à un minimum de g et donc un maximum de H .

La résonance se produit en $\omega_r = \omega_0 \Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$, si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dans la limite $\xi \ll 1$, $\omega_r \approx \omega_0$, donc $H(\omega_r) \approx H(\omega_0) = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{0 + 4\xi^2}}$, d'où $H(\omega_r) \approx \frac{1}{2\xi\omega_0^2}$

R6. En se plaçant dans l'hypothèse $\xi \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 1, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

On fera attention avec le fait qu'en ordonnée, est reporté, en dB, $\omega_0^2 |H|$, c'est-à-dire $20 \log(\omega_0^2 |H|)$.

Solution: Dans la limite $\xi \ll 1$, sur la courbe 1, la résonance se produit pour $\omega_0 \approx \omega_r = 13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, le gain, en décibel à la résonance, vaut alors $20 \log(\omega_0^2 H(\omega_0)) = 20 \log\left(\frac{1}{2\xi}\right) = 9$, d'où $-\log(2\xi) = \frac{9}{20}$,

d'où $\xi = \frac{10^{-9/20}}{2} \approx 0,18$

Vous avez utilisé le fait que $\omega_r \approx \omega_0$ pour déterminer la valeur de H , en utilisant sa valeur en ω_0 . Vous ne pouvez pas réutiliser l'expression de ω_r en fonction de ω_0 qui distingue ces deux valeurs.

R7. Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Solution: Il est important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique, car comme on l'a vu précédemment, à la résonance l'amplitude de la réponse de l'oscillateur peut devenir très grande dès lors que ξ (le coefficient d'amortissement) devient faible, puisque $Y_m \propto H \propto \frac{1}{\xi}$, ce qui peut alors conduire à la rupture du système.

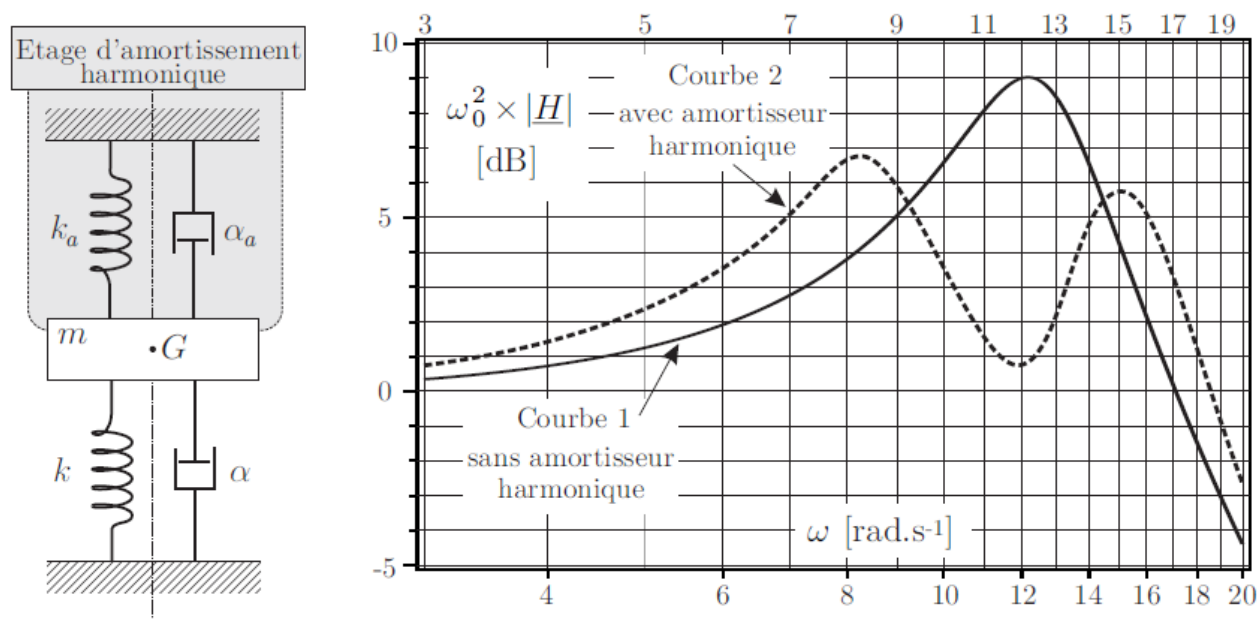


FIGURE 1 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition du signal correspondant à cette sollicitation. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$.

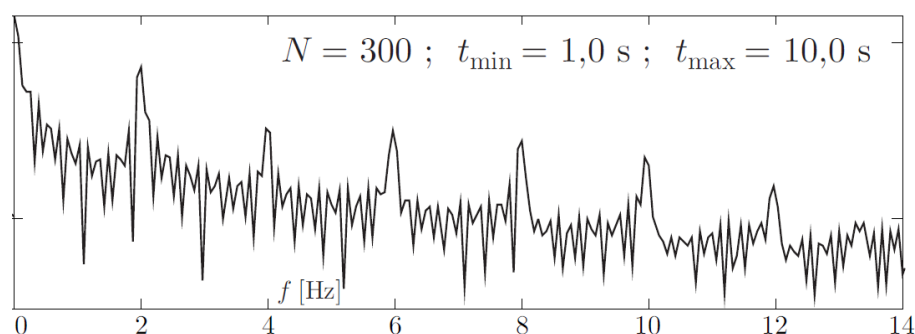


FIGURE 2 – Spectre des signaux correspondants à la marche du piéton

R8. Interpréter le spectre obtenu.

Déterminer la fréquence du forçage. En déduire la fréquence caractéristique de la marche étudiée.

Solution:



Remarque –

Revoir la notion de spectre!!! La fréquence d'un signal périodique est la fréquence du fondamental, c'est-à-dire la fréquence du 1^{er} pic. On ne définit pas de période d'un spectre, et l'écart entre deux pics n'est pas a priori la fréquence du signal.

Le spectre obtenu contient plusieurs pics de fréquences multiples de la fréquence du pic fondamental qui se situe à 2 Hz. La fréquence de forçage est donc égale à $f = 2 \text{ Hz}$. Le piéton pose donc un pied toutes les demi-secondes (deux fois par seconde), il marche donc à une fréquence de 1 Hz.

R9. À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

Solution:



Remarque –

On attendait une réponse quantitative qui s'appuie sur les graphes.

De la courbe 1 de la figure 3 nous avons montré qu'une résonance avait lieu pour $\omega_r = 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 2\pi f_r$, ce qui fait donc une fréquence de résonance de $f_r = \frac{12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi} = 1,9 \text{ Hz}$, qui est donc proche de la fréquence caractéristique du forçage exercé par un piéton qui marche. Par conséquent le problème du Millenium Bridge est que sa fréquence de résonance se situait au niveau du forçage « classique » d'un piéton qui marche, problématique pour une passerelle pour piétons ...

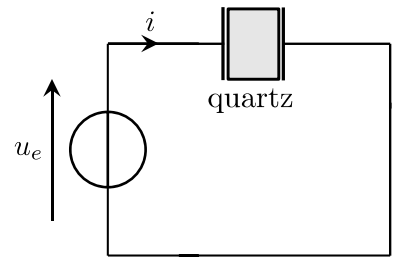
La courbe 2 obtenu en présence d'un amortisseur harmonique montre une anti-résonance à 12 rad/s , c'est-à-dire pour des fréquences de l'ordre de 2 Hz , et deux résonances pour des pulsations de 8 rad/s et 15 rad/s qui représentent donc des fréquences de $0,3 \text{ Hz}$ (1 pas toutes les 3 secondes ...) et de $2,5 \text{ Hz}$ (entre 2 et 3 pas par secondes). Ces deux résonances ne se situent pas au niveau de la fréquence « classique » de la marche d'un piéton et poseront donc moins de problème.

Exercice n°3 Horloge à quartz (D'après EPITA 2020)

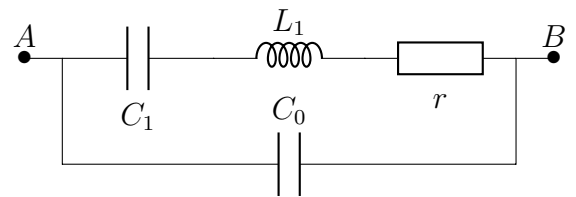
I Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-contre.

On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance $R = 47 \text{ k}\Omega$: si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = Ri_0$.



L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0 \exp\{j(\omega t + \varphi)\}$. Électriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r , L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r , L_1 , C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique.



On étudie les résonances en intensité dans le quartz.

Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

R1. Montrer que l'impédance $\underline{Z}_q$ équivalente au dipôle A-B vérifie $\frac{1}{\underline{Z}_q} = jC_{\text{eq}} \omega \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2}$, avec $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ et ω_2 et C_{eq} dont on donnera les expressions en fonction de C_0 , C_1 et L_1 .

Solution: On considère $r = 0$. Par association série : $\underline{Z}_1 = \frac{1}{C_1 j \omega} + L_1 j \omega$

Puis par association parallèle

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\underline{Z}_q(\omega)} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + C_0 j\omega \\
 \frac{1}{\underline{Z}_q(\omega)} &= \frac{1}{\frac{1}{C_1 j\omega} + L_1 j\omega} + C_0 j\omega \\
 &= \frac{C_1 j\omega}{1 - L_1 C_1 \omega^2} + C_0 j\omega \\
 &= \frac{C_1 j\omega + C_0 j\omega(1 - L_1 C_1 \omega^2)}{1 - L_1 C_1 \omega^2} \\
 &= \frac{j\omega(C_0 + C_1 - C_0 L_1 C_1 \omega^2)}{1 - L_1 C_1 \omega^2} \\
 &= (C_0 + C_1) j\omega \frac{1 - \frac{C_0 L_1 C_1}{C_0 + C_1} \omega^2}{1 - L_1 C_1 \omega^2} \\
 &= jC_{\text{eq}} \omega \frac{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}
 \end{aligned}$$

On identifie : $\omega_2 = \sqrt{\frac{C_0 + C_1}{C_0 L_1 C_1}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}$ et $C_{\text{eq}} = C_0 + C_1$

R2. **En déduire** l'expression de la fréquence f_r de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

Solution: Exprimons l'intensité du courant qui circule dans le quartz :

$$\begin{aligned}
 \underline{i} &= \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_q} \\
 &= \underline{u}_e \times jC_{\text{eq}} \omega \frac{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}} \\
 i_0 = |\underline{i}| &= U_{em} \times C_{\text{eq}} \omega \times \left| \frac{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}} \right|
 \end{aligned}$$

L'amplitude i_0 présente un maximum pour $\omega = \omega_1$: il y a résonance en ω_1 , soit pour la fréquence de résonance $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$

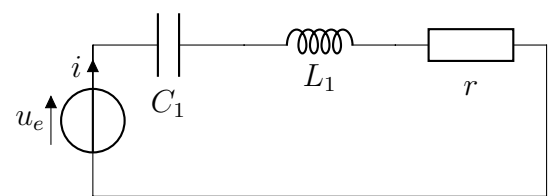
R3. **Tracer l'allure** de i_0 en fonction de ω . Faire apparaître les pulsations particulières, et nommer les phénomènes se produisant. Commenter.

Solution:

D'après les expressions $\omega_2 > \omega_1$. Il se produit une résonance en ω_1 , et une anti-résonance en ω_2 .

L'amplitude de la résonance apparaît infinie, ce qui est une conséquence de l'hypothèse $r = 0$. Si $r \neq 0$, Z_q ne s'annulera pas en ω_2 , et ne sera pas infinie en ω_1 .

Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1, C_1, r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0 . On obtient alors le circuit ci-contre.



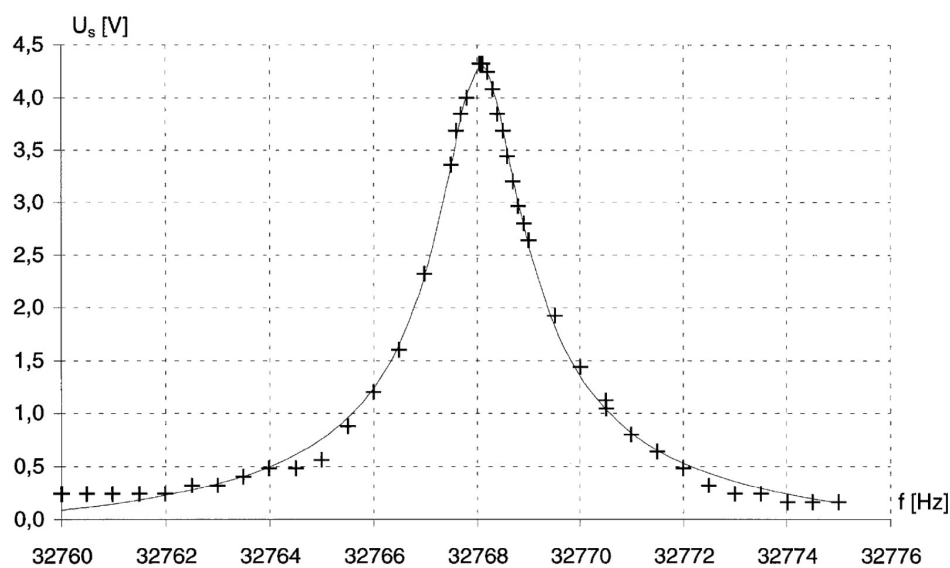
R4. Montrer que $\underline{i} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}$ où on exprimera Q .

Solution: D'après le circuit :

$$\begin{aligned}\underline{i} &= \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_1} \\ &= \frac{\underline{u}_e}{r + L_1 j\omega + \frac{1}{C_1 j\omega}} \\ &= \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \frac{j}{r}\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)} \\ &= \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \frac{j}{r}\left(L_1\frac{\omega}{\omega_1} \times \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} - \frac{\omega_1}{C_1\omega} \times \sqrt{L_1 C_1}\right)} \\ &= \frac{\underline{u}_e/r}{1 + j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}\end{aligned}$$

On identifie $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$

La courbe ci-dessous donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = R \times i_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0,20$ V.



source : Deiber et al., Bull. U. Phys. 799, 1997

R5. En exploitant le graphe, déterminer la valeur de r et du facteur de qualité Q . La réponse devra être justifiée précisément.

La résonance est-elle aiguë ?

Solution: On exprime l'amplitude de i : $i_0 = \frac{U_e/r}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}}$

Cette amplitude est maximale si le dénominateur est minimal, ce qui se produit pour $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$

En $f = f_r = f_1 = 32768$ Hz, $U_s = Ri_0 = 4,25$ V et $i_0 = i_0(\omega_1) = \frac{u_0}{r}$

$$\text{Ainsi } r = \frac{u_e}{i_0} = \frac{u_0}{U_s} R = \frac{0,2}{4,25} \times 47 \text{ k}\Omega \approx 47 \text{ k}\Omega \times 0,05, \text{ soit } \boxed{r = 2350 \Omega}$$

$$\text{Largeur de la bande passante? } \Delta f = \frac{f_r}{Q}, \text{ soit } Q = \frac{f_r}{\Delta f}$$

$$\text{Aux fréquences de coupure : } U_s(f_c) = \frac{U_{s,\max}}{\sqrt{2}} = \frac{4,25}{\sqrt{2}} = \frac{4,25}{1,4} \approx 3 \text{ V}$$

$$\text{Avec } \Delta f = 32768,7 - 32767,2 \text{ Hz} = 1,5 \text{ Hz}$$

$$\text{Ainsi } Q = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{32768}{1,5} = \frac{32768}{3} \times 2 = 10922,7 \times 2 = 21845,4$$

On retiendra les valeurs approchées $r = 2 \text{ k}\Omega$, $Q = 20000$ et $\omega_1 = 2.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

R6. **Déterminer** la valeur de L_1 . **Commenter**.

$$\textbf{Solution:} \text{ D'après les expressions : } Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \text{ et } \omega_1 = \frac{1}{L_1 C_1}$$

$$\text{Ainsi } \frac{Q}{\omega_1} = \frac{L_1}{r}, \text{ soit } \boxed{L_1 = \frac{rQ}{\omega_1}}$$

$$\text{A.N. : } L_1 = \frac{2.10^3 \times 2.10^4}{2.10^5} = 200 \text{ H}$$

C'est très élevé! bien supérieure aux valeurs disponibles en salle de TP.

II Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

R7. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge?

$$\textbf{Solution:} \text{ Le facteur de qualité est très élevé, donc le régime transitoire sera pseudo-périodique, et de constante de temps caractéristique } \tau = \frac{2Q}{\omega_1} = \frac{2 \times 2.10^4}{2.10^5} = 0,2 \text{ s}$$

Le régime transitoire durera environ 1 seconde.

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit « oscillateur », qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32768 Hz.

R8. On peut remarquer que $32768 = 2^{15}$. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre?

Solution: