

? Lundi 15 décembre 2025 – Durée : 4 heures

Devoir Surveillé n°6 (1) – Corrigé

Exercice n°1 TP (Durée ~ 10 min)

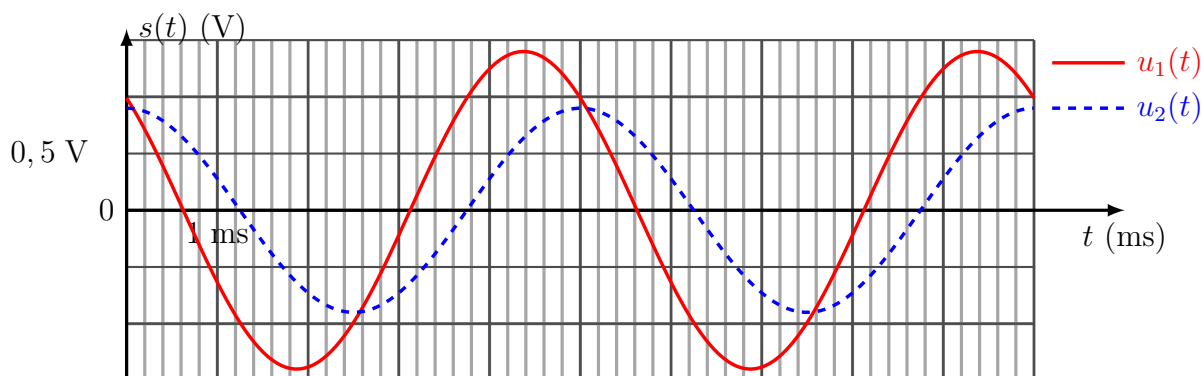
R1. **Donner** l'expression de la valeur absolue du déphasage $|\Delta\varphi_{2/1}|$ de u_2 par rapport à u_1 en fonction de la fréquence f des signaux et du retard temporel.

Solution: Déphasage : $|\Delta\varphi_{2/1}| = 2\pi f \Delta t$

⚠ Remarque –

Le déphasage est un angle, le retard Δt est un temps : les deux ne peuvent pas être égaux !

R2. **Déterminer** le déphasage de u_2 par rapport à u_1 .



Indication : Il faut deux lectures graphiques, déterminer le signe et un calcul.

Solution: u_2 est en retard sur u_1 , donc $\Delta_{2/1}\varphi < 0$.

Ainsi $\Delta\varphi_{2/1} = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = -2\pi \times \frac{0,6 \text{ ms}}{5 \text{ ms}}$, soit $\Delta\varphi_{2/1} = -0,24\pi \text{ rad}$

R3. Comment détermine-t-on précisément le passage en phase de deux tensions ?

Solution: Pour des signaux déphasés, en mode XY on observe une ellipse. Pour des signaux en phase, en mode XY on observe une droite croissante, ce qui permet de repérer très précisément la fréquence du passage en phase.

R4. On souhaite tracer un diagramme de Bode entre 10^2 Hz et 10^6 Hz . Expliquer comment vous répartissez les mesures en fréquence pour pouvoir le tracer.

Solution: Pour chaque décade, on mesure à 1, 2, 3 et 5.

Exercice n°2 Mécanique (Durée ~ 50 min)

I Cordonnées cartésiennes

R1. **Donner** les expressions du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.

Solution:

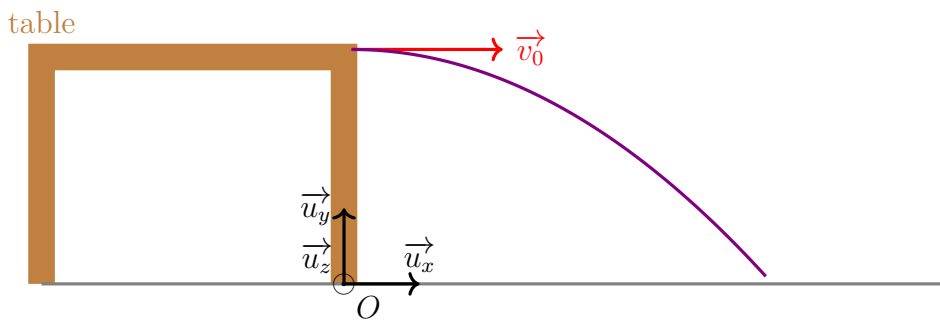
- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$
- Vecteur vitesse : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$
- Vecteur accélération : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

Vous donnez une pichenette dans un stylo posé initialement sur une table. Il quitte la table à l'instant $t = 0$, avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, avec $v_0 > 0$. Il se trouve à $t = 0$, à un point H tel que $\overrightarrow{OH} = h\vec{u}_y$ (h est la hauteur de la table).

La suite du mouvement est de vecteur accélération constant $\vec{a} = a_y\vec{u}_y$, où $a_y = -g$ est une constante ($g > 0$).

R2. **Reproduire** le schéma, **ajouter** $\vec{u}_z$ pour former une base orthonormée directe. **Ajouter** $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$.

Solution:



R3. Par intégrations successives, **déterminer** le vecteur vitesse, puis les équations horaires de M .

Solution:

On intègre par rapport au temps : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} C_1 \\ a_y t + C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

Or $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$, donc $C_2 = 0 = C_3$ et $C_1 = v_0$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ a_y t \\ 0 \end{pmatrix}$

On intègre une deuxième fois : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 t + C_4 \\ a_y \frac{t^2}{2} + C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}$

Or à $t = 0$, $\overrightarrow{OM} = h\vec{u}_y$: $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ a_y \frac{t^2}{2} + h \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient les équations horaires : $\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = a_y \frac{t^2}{2} + h \\ z(t) = 0 \end{cases}$

$\forall t$, $z(t) = 0$, donc le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) .

R4. **Déterminer** l'équation de la trajectoire $y(x)$.

Solution: On isole t de $x(t)$: $t = \frac{x}{v_0}$

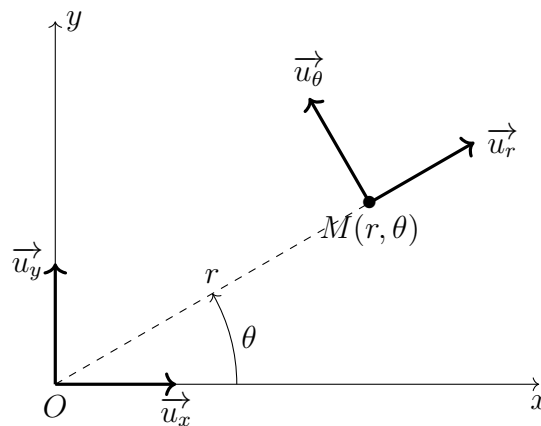
On injecte dans $y(t)$: $y(x) = h + a_y \frac{x^2}{2v_0^2}$, la trajectoire est parabolique

R5. La **représenter** sur le schéma précédent.

II Cordonnées polaires

- R6. (a) Quelles sont les deux coordonnées polaires d'un point M ?
 (b) **Représenter** sur un schéma dans le plan (Oxy) le système de coordonnées polaires :
 (c) placer le point M ,
 (d) définir clairement sur le schéma les deux coordonnées polaires de M ,
 (e) placer les deux vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ de la base polaire.

Solution: Les coordonnées polaires du point M : r , la distance entre O et M ; θ l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OM}$.



R7. **Donner** le vecteur position en coordonnées polaires.

Solution: Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

R8. **Donner** les expressions de $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$.

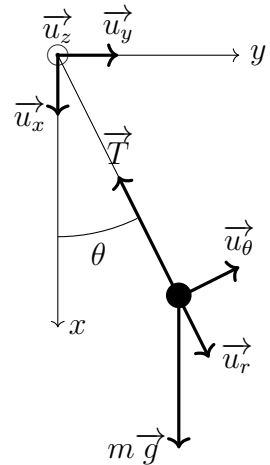
Solution: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

III Projections

Les normes des vecteurs non unitaires seront notées g , T , R_T , R_N .

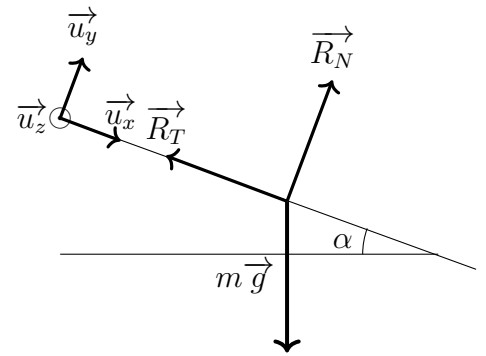
R9. **Exprimer** $m\vec{g}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Solution: $\vec{T} = -T\vec{u}_r$
 $m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_r + \cos(\pi/2 + \theta)\vec{u}_\theta)$
 $m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$



R10. **Exprimer** $m\vec{g}$, $\vec{R}_N$ et $\vec{R}_T$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Solution:
 $\vec{R}_T = -R_T\vec{u}_x$
 $\vec{R}_N = +R_N\vec{u}_y$
 $m\vec{g} = mg(\cos(\pi/2 - \alpha)\vec{u}_x + \cos(\pi - \alpha)\vec{u}_y)$
 $m\vec{g} = mg(\sin(\alpha)\vec{u}_x - \cos(\alpha)\vec{u}_y)$



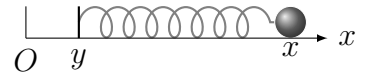
Exercice n°3 Étude parasismique d'un gratte-ciel (~ 45 min)

On modélise le sommet du gratte-ciel par un point matériel de masse $m \approx 4000$ tonnes, repéré par son abscisse x sur un axe horizontal, et la force de cisaillement par une force de rappel élastique $\vec{F}_{el}$ associée à un ressort de raideur $k = 8 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et **de longueur à vide nulle**.

Pour modéliser le tremblement de terre, on considère que le point d'attache du ressort n'est pas fixe et se déplace sinusoïdalement sur l'axe horizontal. Sa position est repérée par l'abscisse $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$, avec $y_0 = 1 \text{ cm}$.

Le poids, bien que non négligeable, est compensé par la réaction du sol et les deux forces n'interviennent pas dans la direction horizontale.

R1. **Exprimer** la longueur $\ell(t)$ du ressort en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. **En déduire l'expression** de la force de rappel élastique $\vec{F}_{el}$.



Solution: $\ell(t) = x(t) - y(t)$

Force de rappel élastique : $\vec{f}_{el} = -k\ell(t)\vec{u}_x = -k(x(t) - y(t))\vec{u}_x$ (longueur à vide nulle).

Prise en compte de la dissipation d'énergie par les poutres

Une quantité énorme d'énergie est dissipée par les interactions métalliques lors de la flexion d'une poutre. Pour modéliser cette dissipation d'énergie, on ajoute une force de frottement qui s'oppose à la vitesse $\vec{F} = -\lambda \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$, avec $\lambda = 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

R2. **Établir** l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$ et la mettre sous forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 y(t)$$

On identifiera les expressions de ω_0 et Q en fonction de λ , m et k .

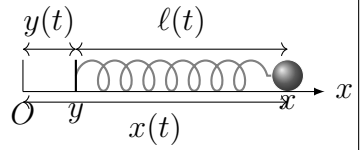
Solution:

Système étudié : masse m

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

- poids et réaction normale qui se compensent ;
- force de rappel élastique $\vec{f}_{el} = -k\ell(t)\vec{u}_x = -k(x(t) - y(t))\vec{u}_x$
- force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda\dot{x}\vec{u}_x$



On applique le PFD à la masse m dans le référentiel terrestre galiléen : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{el} + \vec{F}$
En projection selon $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = -k(x(t) - y(t)) - \lambda\dot{x}$, avec $\ell(t) = x(t) - y(t)$,

$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx(t) = ky(t)$, soit $\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}y(t)$, où on peut identifier la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et le facteur de qualité } Q \text{ tel que } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \text{ soit } Q = \frac{m}{\lambda} \times \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ soit } Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$$

Pour trouver la solution particulière de cette équation, on se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω . On introduit la grandeur complexe $y(t) = y_0 e^{j\omega t}$ et on cherche une solution complexe de la forme $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{x}_0 e^{j\omega t}$ pour laquelle on introduit l'amplitude complexe $\underline{x}_0 = x_0 e^{j\varphi}$.

R3. **Montrer** que l'amplitude complexe des oscillations s'exprime

$$\underline{x}_0(\omega) = \frac{y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Solution: En passant l'équation précédente en notation complexe : $-\omega^2 \underline{x}_0 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x}_0 + \omega_0^2 \underline{x}_0 = \omega_0^2 y_0$,

Soit $\underline{x}_0(\omega) = \frac{\omega_0^2 y_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$, en divisant par ω_0^2 au numérateur et au dénominateur, on trouve bien :

$$\underline{x}_0(\omega) = \frac{y_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

R4. **Montrer** que l'amplitude admet un maximum lorsque $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Établir l'expression de la pulsation ω_r à laquelle cette résonance intervient.

Solution:

Amplitude : $x_0 = \frac{y_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$

Posons $z = \frac{\omega}{\omega_0}$, et cherchons quand $x_0(z)$ est maximale, c'est-à-dire quand $g(z) = (1 - z^2)^2 + \frac{z^2}{Q^2}$ est minimale.

Dérivons : $g'(z) = -4z(1 - z^2) + 2\frac{z}{Q^2}$

g' s'annule quand : $2z(1 - z^2) = \frac{z}{Q^2} \Leftrightarrow z = 0$ ou $1 - z^2 = \frac{1}{2Q^2}$, qui n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Compte-tenu des limites de x_0 déterminée précédemment, $z = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ correspond nécessairement à un maximum de x_0 .

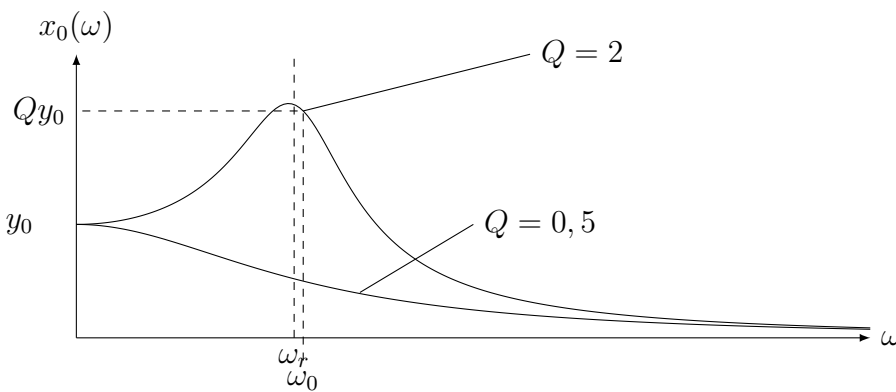
L'amplitude admet bien un maximum lorsque $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$

R5. **Tracer** l'allure de $x_0(\omega)$ lorsque $Q = 2$ et $Q = 0,5$.

Solution: $Q = 0,5 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc il n'y a pas de résonance. Et $Q = 2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc il y a une résonance.

Remarque –

Un graphique sans axe N'A AUCUN SENS ! De plus, il faut y ajouter la valeur de x_0 pour $\omega = 0$, et la pulsation de résonance.



On se place dans le cas où la résonance existe et on suppose que l'amplitude la pulsation de résonance ω_r est peu différente de la pulsation ω_0 .

R6. **Établir** l'expression de l'amplitude $x_0(\omega_0)$ en fonction de y_0 et Q .

Solution: $\boxed{x_0(\omega_0) = Qy_0}$, avec $\omega_0 \approx \omega_r$ (vrai dès que Q devient supérieur à 3-4).

R7. Quelle valeur maximale du facteur de qualité permet de s'assurer que l'amplitude des vibrations du sommet ne dépasse pas 10 cm (pour une amplitude du tremblement de terre de 1 cm) ? **En déduire** la valeur minimale coefficient de frottement λ .

Quelle valeur minimale de λ permet d'annuler la résonance ?

Solution: On souhaite que $\forall \omega, \frac{x_0(\omega)}{y_0} < 10$. Pour cela il faut que $x_0(\omega_0) < 10y_0$, soit $Q < 10$.

Or $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

La condition impose donc, $\boxed{\lambda > \frac{\sqrt{km}}{10} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$

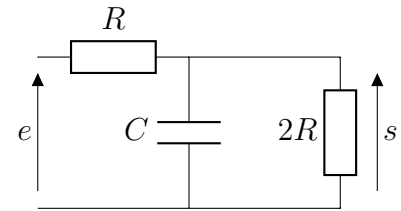
La résonance peut être annulée dès que $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit pour $\boxed{\lambda > \sqrt{2km} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$

Exercice n°4 Filtrage en entrée d'un haut-parleur woofer (Durée ~ 1h50)

L'objectif de cet exercice est d'étudier le filtrage ajouté en entrée d'un haut-parleur woofer chargé de transmettre fidèlement les sons graves compris entre 20 Hz et 300 Hz.

I Un premier filtre

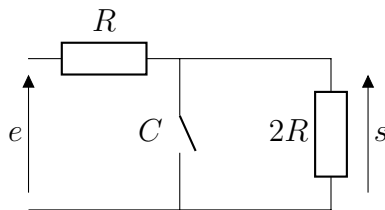
On étudie le circuit ci-contre, où $e(t) = E_m \cos(\omega t)$



R1. En utilisant uniquement les comportements asymptotiques des dipôles, **déterminer** la nature du filtre.

Solution:

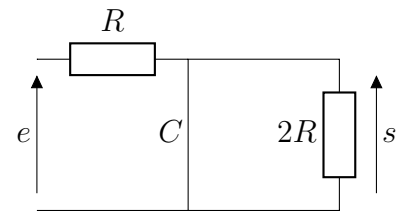
À basse fréquence



Les deux résistances sont en série, donc d'après la relation du pont diviseur de tension :

$$s = \frac{2R}{R + 2R}e, \text{ soit } \boxed{s = \frac{2e}{3}}$$

À haute fréquence



$s = 0$



Remarque –

NON s n'est pas égale à e ici ! Les deux tensions ne sont pas la différence de potentiel entre les deux mêmes bornes. Il y a R entre les deux.

C'est un filtre passe-bas.

On donne l'expression de la fonction de transfert du filtre ci-dessus :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{2}{3}}{1 + j\frac{2RC}{3}\omega}$$

R2. **Exprimer** le gain G .

Solution: Gain : $G = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{2/3}{\sqrt{1 + \frac{4(RC\omega)^2}{9}}}$

R3. **Déterminer** la valeur du gain maximal.

Solution: C'est un filtre passe-bas, donc le gain est maximal à basse fréquence : $G_{\max} = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = \frac{2}{3}$

R4. **Définir** la pulsation de coupure ω_c d'un filtre.

Solution:



Remarque –

! Définition à connaître !

La pulsation de coupure ω_c , est la pulsation telle que $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

R5. **Établir** l'expression de ω_c en fonction de R et C .

Solution:



Remarque –

! Attention, ω_c ne vaut pas toujours $\frac{1}{RC}$!

D'après la définition :

$$\begin{aligned} G(\omega_c) &= \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \\ \frac{2/3}{\sqrt{1 + \left(\frac{2RC\omega_c}{3}\right)^2}} &= \frac{2/3}{\sqrt{2}} \\ 1 + \left(\frac{2RC\omega_c}{3}\right)^2 &= 2 \\ \left(\frac{2RC\omega_c}{3}\right)^2 &= 1 \\ \frac{2RC\omega_c}{3} &= 1 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{\omega_c = \frac{3}{2RC}}$

R6. On choisit $\omega_c = 2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, vérifie que cette valeur est adaptée au rôle du haut-parleur.

Solution: On veut conserver les sons de fréquence inférieure à 300 Hz, soit de pulsation inférieure à $2\pi \times 300 = 1,86 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ce qui avec une coupure à $2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ fonctionne parfaitement.

R7. **Exprimer** $\underline{H}$ en fonction de ω et ω_c .

Solution: $\boxed{\underline{H} = \frac{2/3}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}}$



Remarque –

! Avoir en tête la forme de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre n'est pas inutile :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

R8. **Établir** les équivalents de la fonction de transfert à basse et haute fréquences.

En déduire les équations des asymptotes aux diagrammes de Bode en gain et en phase.

Solution:

⚠ Remarque – Rédaction

⌋ Traiter tout le cas à BF, puis tout le cas à HF. N'alternez pas les deux cas.

- à basse fréquence $\omega \ll \omega_c$: $\underline{H_{BF}} \sim \frac{2}{3}$

Donc $G_{dB,BF} = 20 \log(2/3) = 20 \log(2/3) = -3,5 \text{ dB}$: le diagramme de Bode en gain présente une asymptote horizontale à $-3,5 \text{ dB}$

Et $\phi_{BF} = 0$, car $\underline{H_{BF}} \in \mathbb{R}^+$.

- à haute fréquence $\omega \gg \omega_c$: $\underline{H_{HF}} \sim \frac{2/3}{j \frac{\omega}{\omega_c}}$

Donc $G_{dB,HF} = 20 \log(2/3) - 20 \log(\omega/\omega_c)$: le diagramme de Bode en gain présente une asymptote oblique de pente -20 dB/dec

⚠ Remarque –

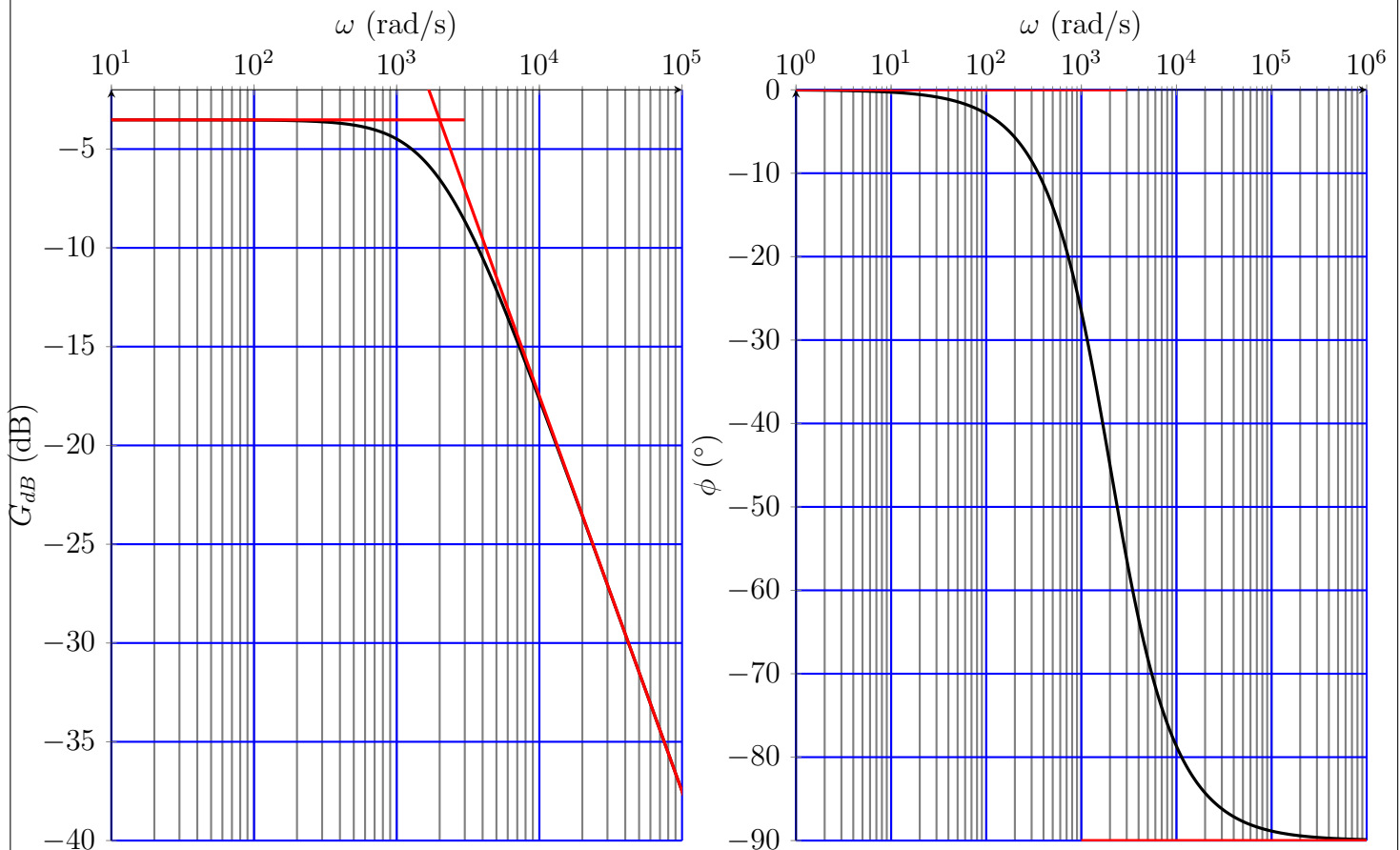
⌋ N'oubliez pas le numérateur ! Il ne disparaît pas dans la recherche de l'équivalent.

Et $\phi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$, car $\underline{H_{BF}} \in j\mathbb{R}^-$.

R9. **Représenter sur le document réponse** les diagrammes de Bode asymptotiques.

R10. **En déduire** le diagramme réel.

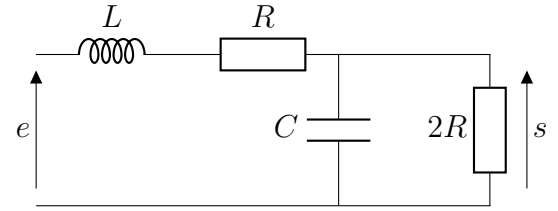
Solution:



II Amélioration

Afin de filtrer plus efficacement les signaux hautes fréquences, on ajoute une bobine en série avec la résistance.

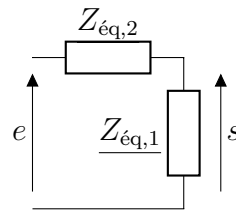
Pour les calculs, on considèrera que $RC = \frac{L}{R}$



R11. **Effectuer** les associations de dipôles permettant d'obtenir un circuit sous la forme « pont diviseur de tension », c'est-à-dire avec uniquement deux dipôles en série, d'impédances que l'on précisera.

Solution: L'association parallèle de C et $2R$ est équivalente à un dipôle d'admittance $\underline{Y_{\text{eq},1}} = \frac{1}{2R} + Cj\omega$

L'association série de R et L est équivalente à un dipôle d'impédance $\underline{Z_{\text{eq},2}} = R + Lj\omega$



R12. **Établir** la fonction de transfert du filtre et l'écrire sous la forme : $\underline{H} = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}RCj\omega - LC\omega^2}$

Solution:

D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \frac{\underline{Z_{\text{eq},1}}}{\underline{Z_{\text{eq},1}} + \underline{Z_{\text{eq},2}}} \underline{e} \\ &= \frac{1}{1 + \underline{Z_{\text{eq},2}} \underline{Y_{\text{eq},1}}}} \underline{e} \\ &= \frac{1}{1 + (R + Lj\omega) \left(\frac{1}{2R} + Cj\omega \right)} \underline{e} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + RCj\omega + \frac{L}{2R}j\omega - LC\omega^2} \underline{e} \\ \underline{H} &= \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}RCj\omega - LC\omega^2}\end{aligned}$$

R13. Puis l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{2/3}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Identifier les expressions de ω_0 et Q .

Solution:

D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}RCj\omega - LC\omega^2}e$$

$$\underline{H} = \frac{2/3}{1 + RCj\omega - \frac{2}{3}LC\omega^2}$$

$$\underline{H} = \frac{2/3}{1 - \frac{2}{3}LC\omega^2 + RCj\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{2/3}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

On identifie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2LC}}$

et $\frac{1}{\omega_0 Q} = RC$, soit $Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2L}{3C}}$

R14. **Déterminer**, par le calcul, l'équation de l'asymptote à haute fréquence pour le gain en décibel.

Solution: À haute fréquence, $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

Soit $\underline{H} \underset{\infty}{\sim} \frac{2/3}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Ainsi $G_{dB,HF} = 20 \log(2/3) - 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, soit $G_{dB,HF} = 20 \log(2/3) - 40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$: le diagramme de Bode présente une asymptote oblique de pente -40 dB/dec à haute fréquence.

R15. Pourquoi est-il « plus efficace » que le filtre étudié précédemment ?

Solution: À chaque décade au-delà de ω_0 , le filtre divise par 100 l'amplitude du signal d'entrée, alors qu'avec le filtre du premier ordre précédent, il ne s'agissait que d'une division par 10 : les hautes fréquences sont beaucoup mieux filtrées avec un filtre du deuxième ordre.

III Filtrage du son

On modélise le son que l'on souhaite émettre avec le haut parleur par :

$$e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$$

avec $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$.

R16. **Identifier sur le spectre** ci-dessus les pulsations ω_1 , ω_2 et ω_3 , ainsi que les trois amplitudes E_1 , E_2 et E_3 des trois composantes sinusoïdales.

Solution: $\omega_1 = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $E_1 = 1 \text{ V}$

$\omega_2 = 2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $E_2 = 2 \text{ V}$

$\omega_3 = 80000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $E_3 = 3 \text{ V}$

On cherche la tension de sortie sous la forme :

$$s(t) = S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + S_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + S_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

R17. En exploitant les diagrammes de Bode, déterminer successivement les amplitudes et les phases des trois signaux sinusoïdaux composant le signal sinusoïdal de sortie.

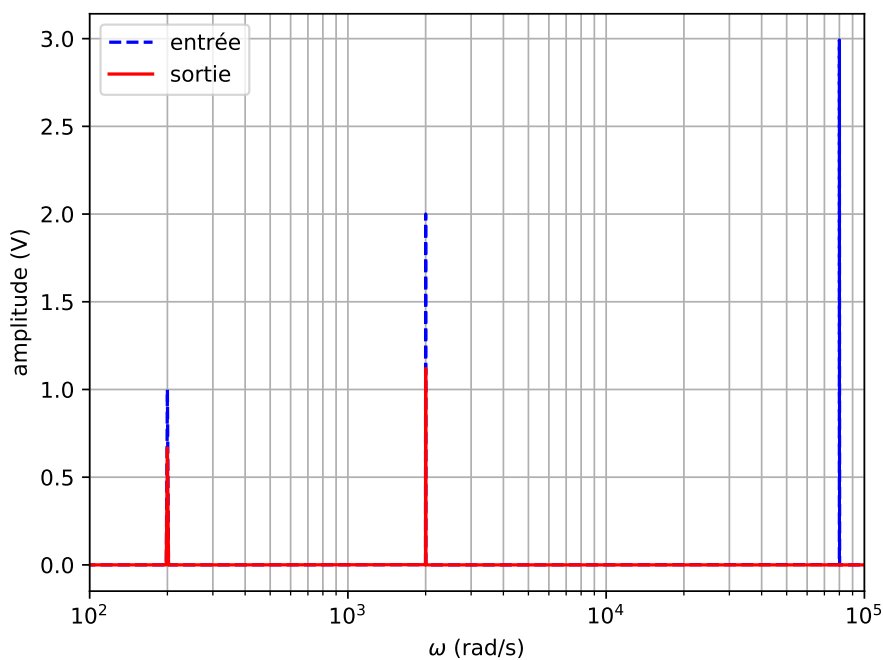
Solution:

⚠ Remarque – Question à retravailler

- $S_1 = E_1 |H(\omega_1)| = \frac{2}{3} E_1$, car $\omega_1 \ll \omega_c$
 $\varphi_1 = 0 + \phi(\omega_1) = -10^\circ$
- $S_2 = E_2 |H(\omega_2)| = E_2 \times 10^{G_{dB}(\omega_2)/20} = E_2 \times 10^{-5/20} \approx 0,56 E_2$
 $\varphi_2 = 0 + \phi(\omega_2) \approx -\frac{\pi}{2}$
- $S_3 = E_3 |H(\omega_3)| = E_3 \times 10^{G_{dB}(\omega_3)/20} = E_3 \times 10^{-3} \approx \frac{E_3}{1000}$
 $\varphi_3 = 0 + \phi(\omega_3) \approx -\pi$

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{2}{3} E_1 \cos(\omega_1 t - 10^\circ) + 0,56 E_2 \cos(\omega_2 t - \pi/2) + \frac{E_3}{1000} \cos(\omega_3 t - \pi) \\ &= \frac{2}{3} E_1 \cos(\omega_1 t - 10^\circ) + 0,56 E_2 \sin(\omega_2 t) - \frac{E_3}{1000} \cos(\omega_3 t) \end{aligned}$$

R18. Représenter sur le spectre du document réponse le spectre du signal de sortie.



Solution:

Exercice n°5 Montages à ALI (Durée ~ 40 min)

Tous les ALI de cet exercice seront supposés idéaux en fonctionnement linéaire.

R1. Donner le modèle de l'ALI idéal.

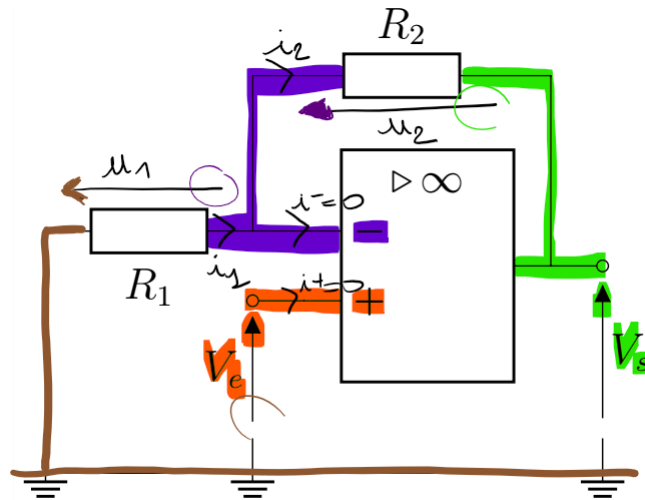
Solution:

- Les courants de polarisation en entrée i^+ et i^- sont nuls. L'impédance d'entrée de l'ALI est infinie.
- L'impédance de sortie de l'ALI est nulle : la tension V_s et l'intensité de sortie i_s sont indépendantes.
- Le gain statique μ_0 est infini.

R2. Que peut-on écrire pour un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire ?

Solution: $V^+ = V^-$

On étudie le montage suivant.



R3. Établir la relation de V_s en fonction de V_e . Comment s'appelle un tel montage ?

Solution:

Remarque –

C'est exactement le cas du cours : VOUS DEVEZ DONC TRAITER CETTE QUESTION PARFAITEMENT !

Coloriez votre montage comme nous l'avons fait dans le cours, cela vous aidera à identifier ce qui va ou non à la masse, les points reliés par des fils et donc au même potentiel...

ATTENTION : V_e est la tension entre la terre et la borne +, ce n'est pas un fil, par conséquent, V_e ne vaut pas 0, V^+ ne vaut pas 0.

Pour un ALI idéal : $i^- = 0 = i^+$.

Pour un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire : $V^+ = V^-$

$V^+ = V_e$

Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i^-$, soit $\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2}$, soit $\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_s}{R_2}$

Soit $\frac{V_s}{R_2} = V^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

Or $V^- = V^+ = V_e$

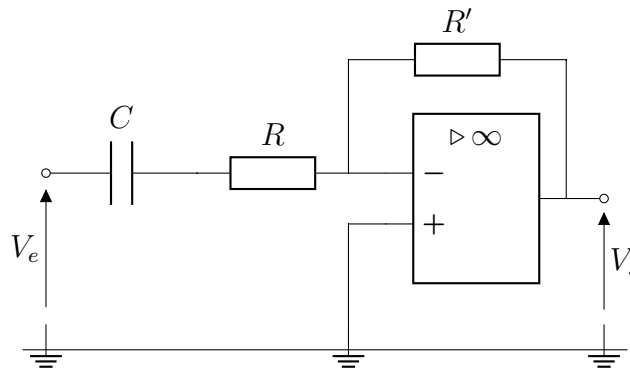
Ainsi : $V_s = V_e \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) i$

$1 + \frac{R_2}{R_1} > 0$ et $1 + \frac{R_2}{R_1} > 1$: c'est un amplificateur non inverseur.

R4. **Établir** l'expression de l'impédance d'entrée de ce montage. Commenter.

Solution: $Z_e = \frac{V_e}{i_e}$, or $i_e = i^+ = 0$, donc $Z_e = \infty$: ce montage peut être mis derrière n'importe quel montage sans que cela ne pose problème.

On étudie le filtre actif suivant.



R5. Après avoir associé les deux dipôles pouvant l'être, **montrer que** la fonction de transfert s'écrit sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{-\frac{R'}{R}}{1 + \frac{\omega_c}{j\omega}}$$

Exprimer ω_c .

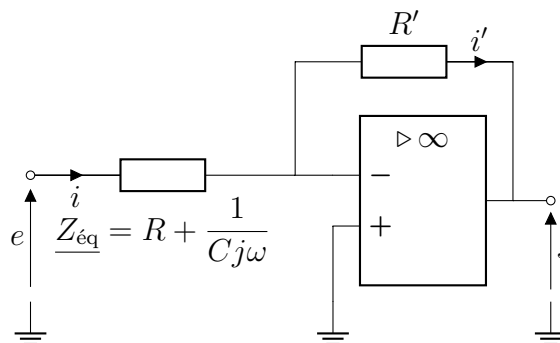
Solution:

Pour un ALI idéal : $i^- = 0 = i^+$.

Pour un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire : $V^+ = V^-$

Or $V^+ = 0$, donc $V^- = 0$.

On commence par associer R et C en série :



$$\begin{aligned}\underline{i} &= \underline{i}' + i^- \\ \frac{\underline{e} - V^-}{\underline{Z}_{\text{éq}}} &= \frac{V^- - \underline{s}}{R'} \\ \frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= -\frac{R'}{\underline{Z}_{\text{éq}}} \\ \underline{H} &= -\frac{R'}{R + \frac{1}{Cj\omega}} \\ &= -\frac{\frac{R'}{R}}{1 - j\frac{1}{RC\omega}}\end{aligned}$$

Qui est bien de la forme demandée en identifiant $\omega_c = \frac{1}{RC}$

R6. Comment se comporte ce filtre à basse fréquence ? À quoi peut servir ce montage ?

Solution: À basse fréquence, $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$, soit :

$$\begin{aligned}\underline{H} &\underset{0}{\sim} \frac{-\frac{R'}{R}}{\frac{\omega_c}{j\omega}} \\ &\sim -\frac{R' j\omega}{R \omega_c} \\ \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} &\sim -\frac{R' j\omega}{R \omega_c} \\ \underline{V}_s &\sim -\frac{R'}{R\omega_c}(j\omega \underline{V}_e) \\ \underline{V}_s &\sim -\frac{R'}{R\omega_c} \frac{d\underline{V}_e}{dt}\end{aligned}$$

Ce montage permet d'effectuer un dérivateur à basse fréquence, qui permet également d'amplifier les hautes fréquences si $R' > R$.