

? Lundi 15 décembre 2025 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°6 (2) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Sur un sujet qui paraît difficile, il faut garder confiance en vos capacités et vos connaissances, sans vous démobiliser quand vous avez le sentiment de ne pas y arriver.
- Au début du DS, parcourez l'ensemble du sujet, à la recherche de ce qui ressemble au cours, de ce qui paraît facile pour s'assurer de l'avoir traité à la fin du devoir.

Exercice n°1 TP (Durée ~ 10 min)

R1. **Donner** l'expression de la valeur absolue du déphasage $|\Delta\varphi_{2/1}|$ de u_2 par rapport à u_1 en fonction de la fréquence f des signaux et du retard temporel.

Solution:

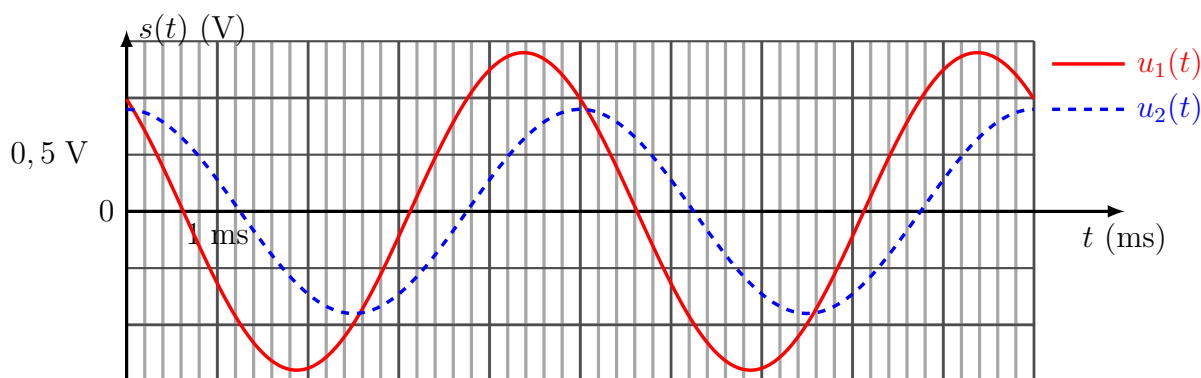


Remarque –

Le déphasage est un angle, le retard Δt est un temps : les deux ne peuvent pas être égaux !

$$|\Delta\varphi_{2/1}| = 2\pi f \Delta t$$

R2. **Déterminer** le déphasage de u_2 par rapport à u_1 .



Indication : Il faut deux lectures graphiques, déterminer le signe et un calcul.

Solution: u_2 est en retard sur u_1 , donc $\Delta_{2/1}\varphi < 0$.

Ainsi $\Delta\varphi_{2/1} = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = -2\pi \times \frac{0,6 \text{ ms}}{5 \text{ ms}}$, soit $\Delta\varphi_{2/1} = -0,24\pi \text{ rad}$

R3. Comment détermine-t-on précisément le passage en phase de deux tensions ?

Solution: Pour des signaux déphasés, en mode XY on observe une ellipse. Pour des signaux en phase, en mode XY on observe une droite croissante, ce qui permet de repérer très précisément la fréquence du passage en phase.

R4. On souhaite tracer un diagramme de Bode entre 10^2 Hz et 10^6 Hz. Expliquer comment vous répartissez les mesures en fréquence pour pouvoir le tracer.

Solution: Pour chaque décade, on mesure à 1, 2, 3 et 5.

Exercice n°2 Mécanique (Durée ~ 50 min)

I Cordonnées cartésiennes

R1. **Donner** les expressions du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes.

Solution:

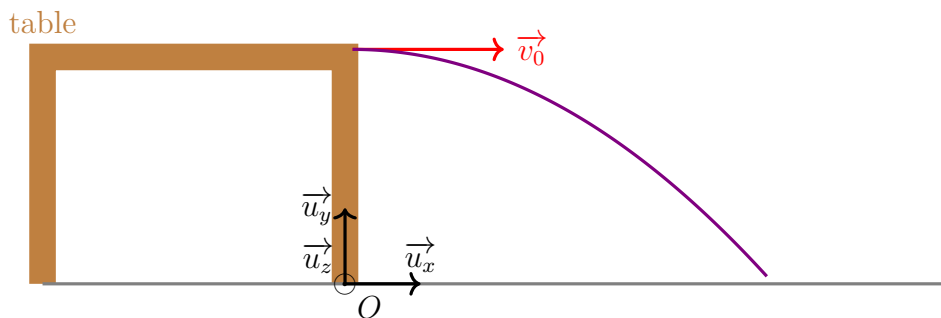
- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$
- Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$
- Vecteur accélération : $\overrightarrow{a(M/\mathcal{R})} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

Vous donnez une pichenette dans un stylo posé initialement sur une table. Il quitte la table à l'instant $t = 0$, avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, avec $v_0 > 0$. Il se trouve à $t = 0$, à un point H tel que $\overrightarrow{OH} = h\vec{u}_y$ (h est la hauteur de la table).

La suite du mouvement est de vecteur accélération constant $\vec{a} = a_y\vec{u}_y$, où $a_y = -g$ est une constante ($g > 0$).

R2. **Reproduire** le schéma, **ajouter** $\vec{u}_z$ pour former une base orthonormée directe. **Ajouter** $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$.

Solution:



R3. Par intégrations successives, **déterminer** le vecteur vitesse, puis les équations horaires de M .

Solution:

On intègre par rapport au temps : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} C_1 \\ a_y t + C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

Or $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$, donc $C_2 = 0 = C_3$ et $C_1 = v_0$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ a_y t \\ 0 \end{pmatrix}$

On intègre une deuxième fois : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 t + C_4 \\ a_y \frac{t^2}{2} + C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}$

Or à $t = 0$, $\overrightarrow{OM} = h\vec{u}_y$: $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ a_y \frac{t^2}{2} + h \\ 0 \end{pmatrix}$

On obtient les équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = a_y \frac{t^2}{2} + h \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$\forall t, z(t) = 0$, donc le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) .

R4. **Déterminer** l'équation de la trajectoire $y(x)$.

Solution: On isole t de $x(t)$: $t = \frac{x}{v_0}$

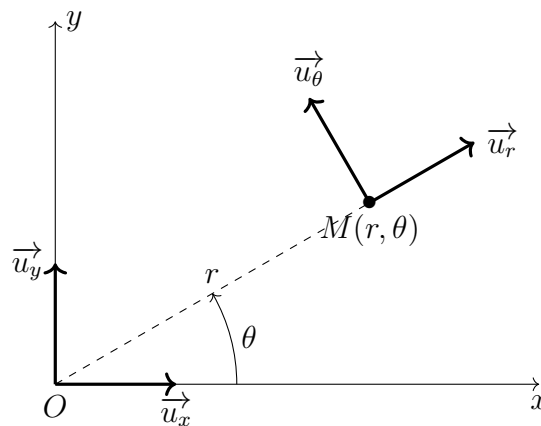
On injecte dans $y(t)$: $y(x) = h + a_y \frac{x^2}{2v_0^2}$, la trajectoire est parabolique

R5. La **représenter** sur le schéma précédent.

II Cordonnées polaires

- R6. (a) Quelles sont les deux coordonnées polaires d'un point M ?
 (b) **Représenter** sur un schéma dans le plan (Oxy) le système de coordonnées polaires :
 (c) placer le point M ,
 (d) définir clairement sur le schéma les deux coordonnées polaires de M ,
 (e) placer les deux vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ de la base polaire.

Solution: Les coordonnées polaires du point M : r , la distance entre O et M ; θ l'angle entre (Ox) et $\vec{OM}$.



R7. **Donner** le vecteur position en coordonnées polaires.

Solution: Vecteur position : $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

R8. **Donner** les expressions de $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$.

Solution: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

III Projections

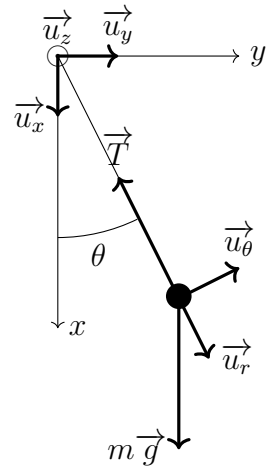
Les normes des vecteurs non unitaires seront notées g , T , R_T , R_N .

R9. Exprimer $m\vec{g}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Solution:

$$\vec{T} = -T\vec{u}_r$$

$$m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$$



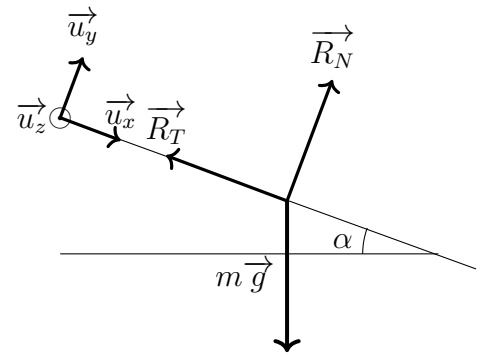
R10. Exprimer $m\vec{g}$, $\vec{R}_N$ et $\vec{R}_T$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Solution:

$$\vec{R}_T = -R_T\vec{u}_x$$

$$\vec{R}_N = +R_N\vec{u}_y$$

$$m\vec{g} = mg(\sin(\alpha)\vec{u}_x - \cos(\alpha)\vec{u}_y)$$



Exercice n°3 Sismographe (Durée ~ 1 heure)

On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée au boîtier de l'instrument, lui-même solidaire du sol.

Le pendule est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M .

La masse est également soumise à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\vec{v}$ (assimilée à l'action d'un piston solidaire du boîtier) : dans cette expression, β est une constante et $\vec{v} = \frac{d\vec{SM}}{dt}$ est la vitesse de la masse par rapport à S .

À l'instant initial l'altitude du point S coïncide avec celle d'un point O fixe dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ galiléen. On pourra utiliser le repère (O, x, y, z) associé à $\mathcal{R}_0$.

L'axe (x) est orienté à la verticale vers le bas.

On note X la distance SM et g l'intensité de la pesanteur.

Dans un premier temps on étudie le mouvement du point M en l'absence de perturbation (autrement dit S est immobile dans $\mathcal{R}_0$).

R1. Quelle est l'expression X_{eq} de X à l'équilibre ?

Solution:

Système : masse $M(m)$

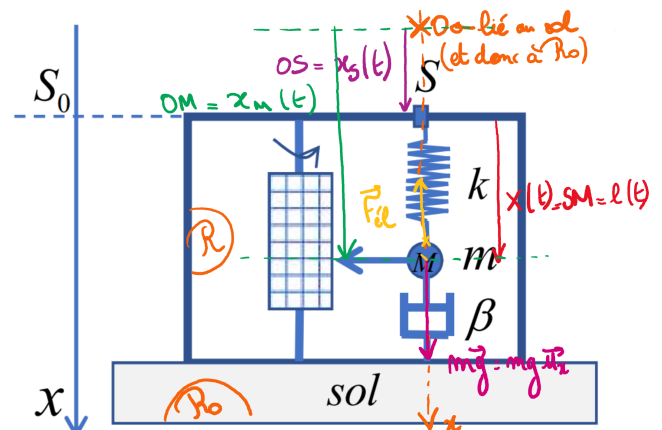
Référentiel : Référentiel $\mathcal{R}_0$ lié au sol, supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} = mg\vec{u}_x$
- force de rappel élastique : $\vec{f}_{\text{el}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$
- force de frottement fluide : $\vec{F} = -\beta\vec{v}$

À l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{f}_{\text{el}} + \vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$

Ainsi, $mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0$, soit $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$



Avec
$$X_{\text{éq}} = \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

R2. La masse est lâchée en dehors de sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle de son mouvement, à laquelle obéit la fonction $X(t)$. Elle fera intervenir les constantes β , k , m , g , ℓ_0 .

Solution:

Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}_{\text{el}} + \vec{F}$

Avec $\vec{a} = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{u}_x$, $\vec{v} = \frac{dX}{dt}\vec{u}_x$ et $\ell(t) = X(t)$

Soit, en projection selon $\vec{u}_x$: $m\frac{d^2X}{dt^2} = mg - k(X(t) - \ell_0) - \beta\frac{dX}{dt}$

Soit
$$\ddot{X} + \frac{\beta}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X(t) = g + \frac{k}{m}\ell_0$$

R3. On pose $Y = X - X_{\text{éq}}$.

Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire sous la forme

$$\ddot{Y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$$

où l'on précisera les expressions des constantes Q et ω_0 en fonction de β , k , m .

Solution:

Ainsi : $\ddot{X} + \frac{\beta}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}\left(X(t) - \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)\right)$

On pose $Y(t) = X(t) - \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$, avec $\ddot{Y} = \ddot{X}$ et $\dot{Y} = \dot{X}$

Ainsi
$$\ddot{Y} + \frac{\beta}{m}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y(t) = 0$$
, par identification avec $\ddot{Y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$

On en déduit
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{mk}}{\beta}$$

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante.

L'abscisse du point de suspension S dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ est $x_S = a \cos(\omega t)$, soit $\overrightarrow{OS} = a \cos(\omega t)\vec{u}_x$

On note x_M l'abscisse de la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, soit $\overrightarrow{OM} = x_M(t)\vec{u}_x$.

On a toujours $SM = X$, doit $\overrightarrow{SM} = X(t)\vec{u}_x$.

La force de frottement fluide s'écrit ici : $-\beta(\vec{v}_M - \vec{v}_S) = -\beta(\dot{x}_M - \dot{x}_S)\vec{u}_x$

R4. Quel est le lien entre x_M , x_S et X ? En déduire celui entre d'une part $\dot{x}_M$, $\dot{x}_S$ et $\dot{X}$, et d'autre entre $\ddot{x}_M$, $\ddot{x}_S$ et $\ddot{X}$?

Quel est le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Y}$?

Solution: Avec la relation de Chasles (ou le schéma) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SM} &= \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS} \\ X(t)\vec{u}_x &= x_M(t)\vec{u}_x - x_S(t)\vec{u}_x \\ X(t) &= x_M(t) - x_S(t) \end{aligned}$$

Soit
$$X(t) = x_M(t) - x_S(t); \quad \dot{X}(t) = \dot{x}_M(t) - \dot{x}_S(t) \text{ et } \ddot{X}(t) = \ddot{x}_M(t) - \ddot{x}_S(t).$$
 Et on a toujours
$$\ddot{Y} = \ddot{X}$$

R5. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$, et en déduire l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

L'équation différentielle pourra être admise pour la suite.

Solution: PFD à $M(m)$ dans $\mathcal{R}_0$, M étant repéré par $x_M(t) = OM(t)$.

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{f}_{\text{el}} + \vec{F} \\ m\frac{d^2x_M}{dt^2} &= mg - k(\ell(t) - \ell_0) - \beta(\dot{x}_M - \dot{x}_S) \\ m\ddot{X} + m\ddot{x}_S(t) &= mg + k\ell_0 - k\ell(t) - \beta\dot{X}(t) \\ m\ddot{X} + m\ddot{x}_S(t) &= mg + k\ell_0 - k(X(t) - \ell_0) - \beta\dot{X}(t) \\ m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX(t) + m\ddot{x}_S(t) &= mg + k\ell_0 \\ m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX(t) &= -m\ddot{x}_S(t) + mg + k\ell_0 \\ m\ddot{X} + \beta\dot{X} + k\left(X(t) - \left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)\right) &= -m\ddot{x}_S(t) \\ \ddot{Y} + \frac{\beta}{m}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y(t) &= -\ddot{x}_S(t) \end{aligned}$$

avec $\dot{x}_S(t) = -a\omega \sin(\omega t)$, donc $\ddot{x}_S(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t)$

Ainsi $\boxed{\ddot{Y} + \frac{\beta}{m}\dot{Y} + \frac{k}{m}Y(t) = a\omega^2 \cos(\omega t)}$

Au passage de l'onde sismique, l'équation différentielle précédente devient :

$$\ddot{Y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

En régime forcé, on recherche la solution sous la forme $Y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

On introduit la pulsation relative $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

R6. Établir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}$ de $\underline{Y}$, et montrer qu'elle se met sous la forme suivante :

$$\underline{A} = \frac{a}{\frac{1}{u^2} - 1 + \frac{j}{Qu}}$$

Solution:

En passant l'équation différentielle en notation complexe :

$$-\omega^2 \underline{Y} + 2\lambda j\omega \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = a\omega^2 e^{j\omega t}$$

$$\underline{Y}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega) = a\omega^2 e^{j\omega t}$$

$$\underline{A}e^{j\omega t} = \frac{a\omega^2 e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega}$$

$$\underline{A} = \frac{a\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega}$$

$$\underline{A} = \frac{a}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + \frac{j\omega_0}{Q\omega}}$$

$$\underline{A} = \frac{a}{\frac{1}{u^2} - 1 + \frac{j}{Qu}}$$

en posant $u = \frac{\omega}{\omega_0} \Leftrightarrow \omega = u\omega_0$.

R7. Montrer que l'amplitude A est maximale pour une certaine valeur $u_{\max}$ de u que l'on exprimera en fonction de Q .

On pourra introduire la variable $v = \frac{1}{u^2}$ et étudier la fonction $g(v)$ telle que $A = \frac{a}{\sqrt{g(v)}}$

Solution: L'amplitude vaut $A = |\underline{A}| = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}}$

Posons $v = \frac{1}{u^2}$. Le numérateur ne dépend pas de la pulsation, nous pouvons donc nous limiter à étudier la fonction $g(v) = (v - 1)^2 + \frac{v}{Q^2}$, dont les variations sont inverses de celles de $A(v)$.

De plus, $g(v)$ présente les variations inverses de $g(u)$ (puisque $1/u^2$ est une fonction décroissante), donc $g(v)$ présente les mêmes variations que $A(u)$. On peut également voir que $g'(v) = g'\left(\frac{1}{u^2}\right) = -\frac{2}{u^3}g'(u)$

$$g'(v) = 2(v - 1) + \frac{1}{Q^2}$$

Cherchons v qui annule g' : $v - 1 = \frac{-1}{2Q^2} \Leftrightarrow v = \frac{1}{u^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$, existe ssi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour la pulsation réduite $u_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$, l'amplitude A est maximale.

R8. Représenter l'allure de A dans les deux cas possibles.

Solution:

On mesure $u_{\max} = 1,192$, $k = 0,50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 200 \text{ g}$.

R9. En déduire la valeur du facteur de qualité Q et la valeur du coefficient de frottement β .

Solution: Q est directement lié $u_{\max}$:

$$\begin{aligned} u_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \\ 1 - \frac{1}{2Q^2} &= \frac{1}{u_{\max}^2} \\ \frac{1}{2Q^2} &= 1 - \frac{1}{u_{\max}^2} \\ 2Q^2 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{u_{\max}^2}} \end{aligned}$$

Soit $Q = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{1}{u_{\max}^2}\right)}} \approx 1,3$

D'après l'expression de Q fournie par l'énoncé et l'expression de λ établie :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0}{2\lambda} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{m}{\beta} \\ Q &= \frac{\sqrt{mk}}{\beta} \end{aligned}$$

Soit $\beta = \frac{\sqrt{mk}}{Q} = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

R10. Quelles sont les valeurs de l'amplitude des oscillations de la masse dans les deux cas limites : d'une part, pour $u \ll 1$ et $u \gg 1$ d'autre part ? Expliquer qualitativement le résultat obtenu dans chaque cas.

Solution:

— Lorsque $u \ll 1$, soit $\omega \ll \omega_0$, $g(u) \approx \frac{1}{u^2} \gg 1$, donc $A \approx au^2 \ll a$

Dans ce cas, les oscillations du boîtier sont suffisamment lentes pour que la masse m suive fidèlement ses mouvements : le ressort ne joue pratiquement aucun rôle, SM ne varie pas, le sismographe n'enregistre aucune oscillation.

— Lorsque $u \gg 1$, soit $\omega \gg \omega_0$, $g(u) \simeq 1$ et donc $A \simeq a$. Dans ce cas, les oscillations du boîtier sont rapides et la masse m se met à vibrer avec une amplitude égale à l'amplitude des vibrations du sol. Le sismographe enregistre alors très fidèlement les oscillations du sol.

Rq : $\underline{Y} \simeq -a$, donc M oscille en opposition de phase par rapport au sol (S).

On peut considérer une onde sismique réelle comme une superposition d'ondes sinusoïdales de pulsations comprises entre deux valeurs données $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$. On rappelle que le but d'un sismographe est d'enregistrer le plus fidèlement possible les mouvements verticaux du sol.

R11. Comment faut-il choisir ω_0 par rapport aux valeurs $\omega_{\min}$ et/ou $\omega_{\max}$ pour fabriquer un sismographe ?

Solution: Pour que le sismographe enregistre le plus fidèlement possible les mouvements verticaux du sol, il faut $A \approx a$, donc utiliser l'oscillateur dans la zone $u \gg 1$, soit $\omega \gg \omega_0$, il faut donc que toutes les pulsations des ondes sismiques soient très au-delà de ω_0 , soit : $\omega_0 \ll \omega_{\min} < \omega_{\max}$

Exercice n°4 Pick-up de guitare (Durée ~ 1 heure)

Cet exercice est consacré à l'étude de deux circuits électriques. Tout d'abord nous allons étudier le « pickup » d'une guitare, composant qui génère le signal électrique reproduisant les vibrations mécaniques d'une corde de guitare.

Dans un deuxième temps, on cherchera à concevoir un filtre pour éliminer un bruit parasite sur un capteur. Ces deux sous-parties sont indépendantes.

I Modèle électrocinétique du pickup de guitare

On peut modéliser le « pickup » branché sur un amplificateur de guitare par le circuit de la figure 1 dans lequel la source de tension sinusoïdale $e(t)$ génère un signal d'amplitude constante E quelle que soit la fréquence : $e(t) = E \cos(\omega t)$, soit en complexe $\underline{e}(t) = E e^{j\omega t}$.

La bobine L , le résistor R et le condensateur C caractérisent le « pickup » ; le condensateur C_c caractérise la capacité du câble reliant la guitare à l'amplificateur et le résistor R_a caractérise la résistance d'entrée de l'amplificateur.

On note $u_s(t)$ la tension aux bornes de la résistance R_a avec $u_s(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ (avec $\varphi_s \in [-\pi; \pi]$) et $\underline{u}_s = \underline{U}_m \exp(j\omega t)$ avec $\underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi_s)$

On s'intéresse à la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_s}{e}$.

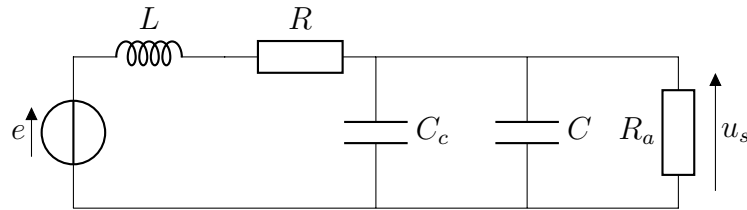
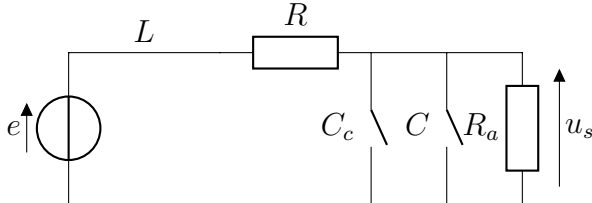


FIGURE 1 – Modèle électrocinétique du pickup.

R1. En utilisant les comportements asymptotiques des différents dipôles à haute et basse fréquence, déterminer la nature de ce filtre.

Solution:

À basse fréquence

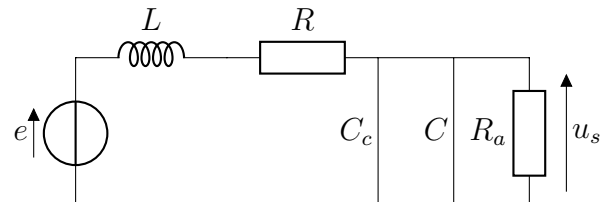


D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$u_s = \frac{R_a}{R_a + R}$$

C'est donc un filtre passe-bas.

À haute fréquence



$$u_s = 0$$

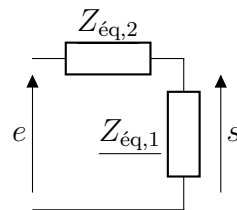
R2. Établir l'expression de la fonction de transfert du circuit de la figure 1 et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

avec $H_0 = \frac{R_a}{R_a + R}$, Q et ω_0 à déterminer.

Solution: On associe d'une part C_c , C et R_a en parallèle : $\underline{Y}_{\text{eq},1} = \frac{1}{R_a} + (C + C_c)j\omega$, et d'autre part R et L en série.

L'association série de R et L est équivalente à un dipôle d'impédance $\underline{Z}_{\text{eq},2} = R + Lj\omega$



D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \frac{Z_{\text{éq},1}}{Z_{\text{éq},1} + Z_{\text{éq},2}} \underline{e} \\ &= \frac{1}{1 + Z_{\text{éq},2} Y_{\text{éq},1}} \underline{e} \\ &= \frac{1}{1 + (R + Lj\omega) \left(\frac{1}{R_a} + (C + C_c)j\omega \right)} \underline{e} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R}{R_a} + R(C + C_c)j\omega + \frac{L}{R_a}j\omega - LC\omega^2} \underline{e} \\ &= \frac{\frac{R_a}{R + R_a}}{1 + \frac{R_a}{R + R_a} \left(R(C + C_c) + \frac{L}{R_a} \right) j\omega - \frac{R_a}{R + R_a} LC\omega^2} \underline{e} \\ &= \frac{\frac{R_a}{R + R_a}}{1 - \frac{R_a}{R + R_a} LC\omega^2 + \frac{R_a}{R + R_a} \left(R(C + C_c) + \frac{L}{R_a} \right) j\omega} \underline{e} \\ \underline{H} &= \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}\end{aligned}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R + R_a}{R_a L(C + C_c)}} \text{ et}$$

$$\text{et } \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{RR_a(C + C_c)}{R + R_a} + \frac{L}{R + R_a}, \text{ soit } \boxed{Q = \frac{R + R_a}{\omega_0(RR_a(C + C_c) + L)}}$$

R3. Déterminer les équations des asymptotes à basse et haute fréquence du gain en décibels G_{dB} .

Montrer que ces résultats sont compatibles avec le diagramme de Bode en gain fourni ci-dessous, à une condition sur le rapport R/R_a à donner.

Solution:

— À basse fréquence : $\underline{H} \underset{0}{\sim} H_0$

Ainsi $G_{dB,BF} = 20 \log(H_0)$: le diagramme présente une asymptote horizontale à $20 \log(H_0)$.

Sur le diagramme de Bode, à basse fréquence, l'asymptote est à 0 dB.

Cela est compatible à condition que $H_0 = 1$, ce qui est possible uniquement si $R_a \gg R$, soit

$$\boxed{\frac{R_a}{R} \gg 1}$$

— À haute fréquence : $\underline{H} \underset{\infty}{\sim} \frac{H_0}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Ainsi $G_{dB,BF} = 20 \log(H_0) - 40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$: le diagramme présente une asymptote oblique de pente -40 dB/dec.

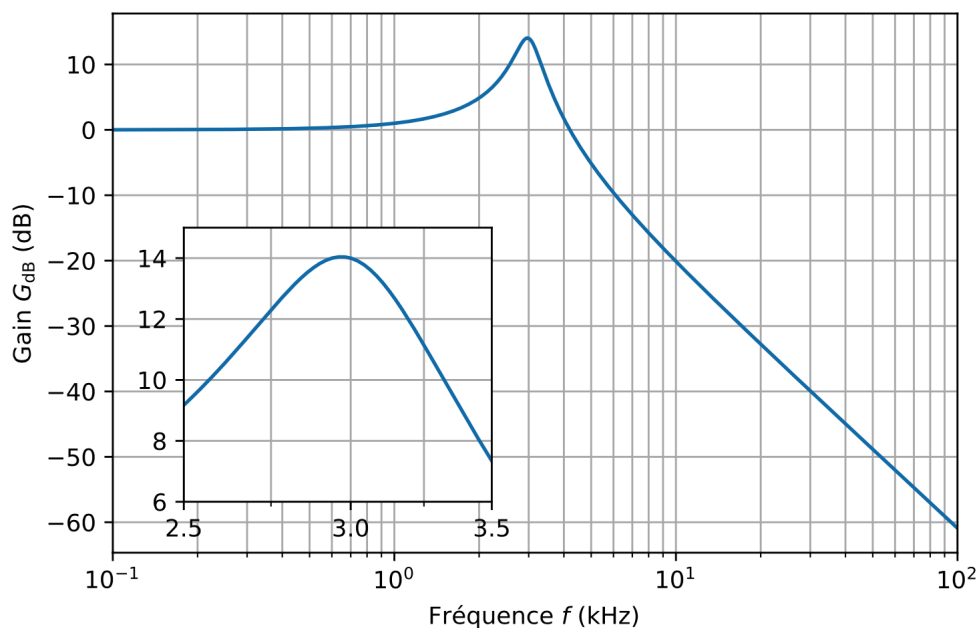


FIGURE 2 – Diagramme de Bode en gain d'un filtre. L'encart en bas à gauche de la figure principale est un agrandissement de la courbe autour de $f = 3$ kHz.

R4. Le diagramme de Bode en phase (non fourni) donne $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ pour $f = 2,96$ kHz. En déduire, en utilisant la figure 2, la valeur du facteur de qualité Q .

Solution: Il s'agit d'un filtre passe-bas qui présente une résonance aiguë, ce qui se produit pour Q élevé. Alors la résonance a lieu pour $\omega \approx \omega_0$

$$\text{En } \omega_0 : \underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{jQ} = -jQH_0$$

$$\text{Or } H_0 \approx 1, \text{ soit } \underline{H}(\omega_0) = -jQ$$

$$\text{Alors } G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(Q) = 14 \text{ dB, soit } Q = 10^{\frac{14}{20}} = 5 \gg 1 \text{ (confirme l'hypothèse de début).}$$

On envoie en entrée du filtre des figures 1 et 2 un signal $e(t)$ somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitude $E = 1$ V et de fréquences 300 Hz, 3 kHz, 8 kHz.

R5. Déterminer le signal de sortie (pour les phases, on se contentera d'une évaluation rapide).

Solution: signal d'entrée : $e(t) = E \cos(2\pi f_1 t) + E \cos(2\pi f_2 t) + E \cos(2\pi f_3 t)$, avec $f_1 = 300$ Hz, $f_2 = 3$ kHz, $f_3 = 8$ kHz

$$\text{Signal de sortie : } s(t) = S_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + S_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) + S_3 \cos(2\pi f_3 t + \varphi_3)$$

$$\bullet f_1 = 300 \text{ Hz} = 0,3 \text{ kHz} : S_1 = E \text{ et } \varphi_1 = \phi(\omega \ll \omega_0) = 0$$

$$\bullet f_2 = 3 \text{ kHz} : S_2 = 10^{\frac{14}{20}} E = 5E ; \phi_2 = \phi(\omega = \omega_0) = \frac{-\pi}{2}$$

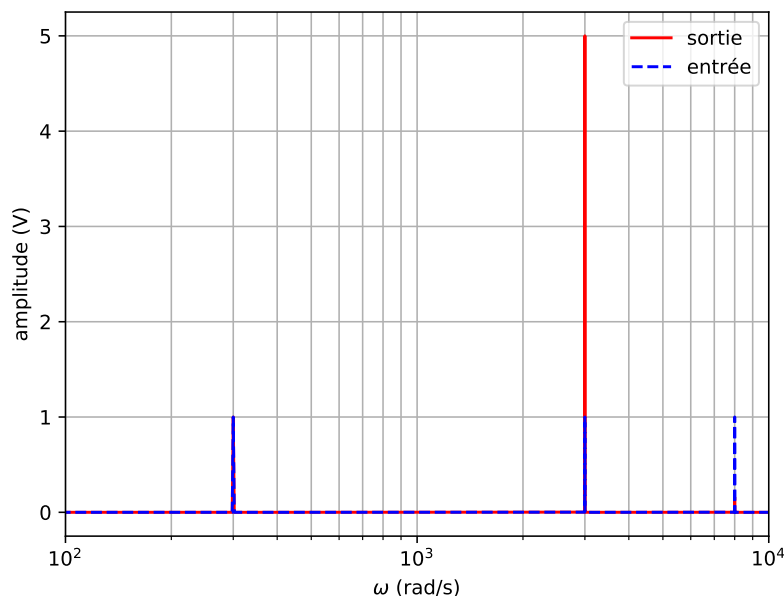
$$\bullet f_3 = 8 \text{ kHz} : S_3 = 10^{\frac{-16}{20}} E = 0,16E ; \phi_3 = \phi(\omega \gg \omega_0) = -\pi$$

$$s(t) = E \cos(2\pi f_1 t) + 5E \cos(2\pi f_2 t - \pi/2) + 0,16E \cos(2\pi f_3 t - \pi)$$

$$\text{Soit } \boxed{s(t) = E \cos(2\pi f_1 t) + 5E \sin(2\pi f_2 t) - 0,16E \cos(2\pi f_3 t)}$$

R6. Représenter les spectres des signaux d'entrée et de sortie sur le même graphe. Commenter.

Solution:



On considère un signal électrique périodique dont le spectre est donné sur la figure 3, caractéristique de la vibration d'une corde de guitare. Ce signal sera maintenant le signal en entrée du filtre, $e(t)$.

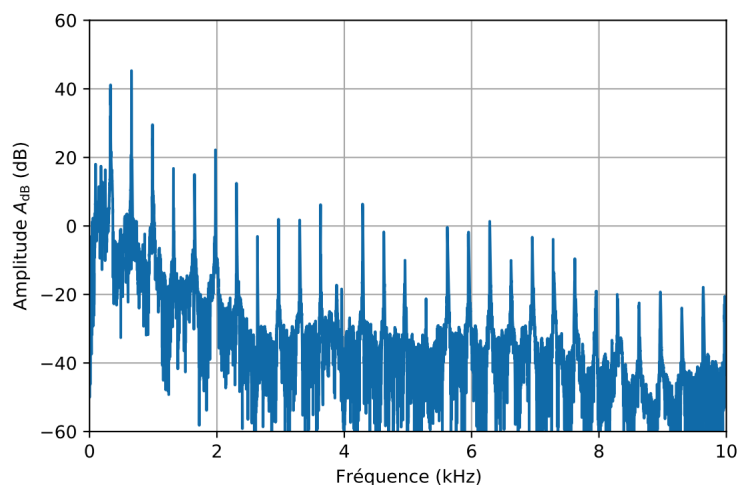


FIGURE 3 – Spectre du signal sonore d'une corde de guitare. L'abscisse représente la fréquence de ses composantes sinusoïdales et l'ordonnée donne l'amplitude A_{dB} de ces composantes en décibel, définie par $A_{dB} = 20 \log(U/U_{ref})$, avec U l'amplitude en volts et $U_{ref} = 10$ mV.

R7. Déterminer la fréquence f_e du fondamental.

Solution: D'après les harmoniques présents : $f_e = 333$ Hz

R8. Expliquer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre de la figure 1. On donnera en particulier les amplitudes (en dB) du fondamental et de chacune des harmoniques les plus proches de 3 kHz et de 8 kHz.

Solution:

Les harmoniques de fréquences inférieures à 1 kHz sont transmises sans modification de leurs amplitudes. Les harmoniques proches de 3 kHz sont amplifiées, celle à 3 kHz est d'amplitude augmentée de 14 dB par rapport au signal d'entrée. Autour de 8 kHz, les harmoniques sont atténuées de 20 dB, et davantage au-delà.

Ainsi

- $A_{s,dB}(333 \text{ Hz}) = 40 \text{ dB}$
- $A_{s,dB}(3 \text{ kHz}) = 0 + 14 \text{ dB} = 14 \text{ dB}$
- $A_{s,dB}(8 \text{ kHz}) = -20 - 16 \text{ dB} = 36 \text{ dB}$

II Élimination d'un bruit parasite

Un capteur délivre une tension subissant un parasitage du fait de l'alimentation du secteur à 50 Hz (fréquence EDF). On cherche à concevoir un filtre adapté permettant d'obtenir le signal souhaité « déparasité ».

On dispose d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C .

FIGURE 4 – Signal parasite à déparasiter

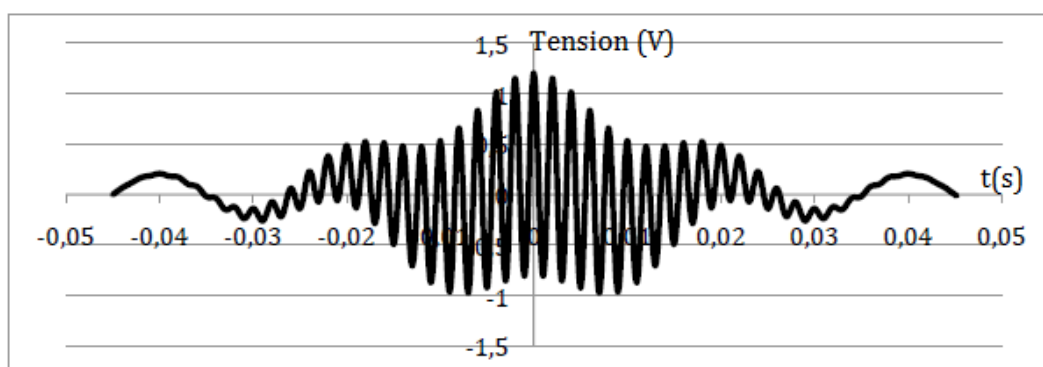
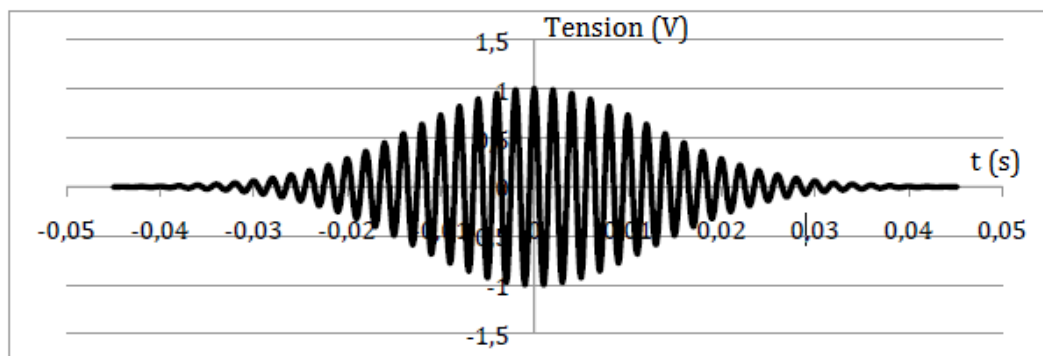


FIGURE 5 – Signal déparasité



R9. Proposer une structure de filtre simple et des valeurs pour les grandeurs caractéristiques R et C permettant la réalisation du filtrage.

Solution: Commencez par poser les notations et déterminer les valeurs numériques utiles et pouvant l'être.

ATTENTION ! 50 Hz n'est pas une fréquence basse ou haute, tout dépend des autres fréquences qui sont mises en jeu !

Le signal délivré par le capteur est un signal de fréquence « élevée » bruité par un signal de fréquence 50 Hz.

Évaluons la fréquence du signal, en déterminant sa période à partir des évolutions temporelles : $15T = 0,03 \text{ s}$, soit $f = \frac{1}{T} = \frac{15}{0,03} = 500 \text{ Hz}$.

Nous devons donc construire un filtre qui atténue le signal à 50 Hz sans trop atténuer le signal à 500 Hz. Il faut donc réaliser un filtre passe-haut. Ici, 50 Hz est une basse fréquence par rapport au signal utile,

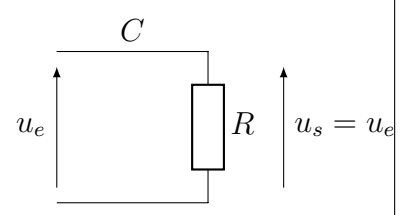
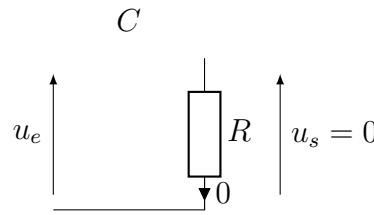
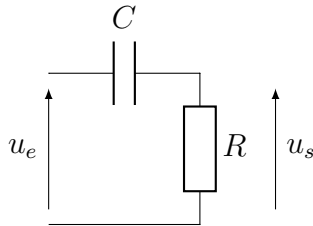
mais cela pourrait être l'inverse.

Avec un condensateur et une résistance, on les met en série, alimentés par le signal à filtrer, et récupérer le signal filtré aux bornes de la résistance. Vérifions qu'il s'agit bien d'un filtre passe-haut.

Circuit à réaliser

À basse fréquence

À haute fréquence



Déterminons plus précisément les caractéristiques du filtre à construire.

La fonction de transfert du filtre est $\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{Cj\omega}}$, de gain $G(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}}$

La pulsation de coupure est définie par $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2R^2 = R^2 + \frac{1}{C^2\omega_c^2}$, soit $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

Afin d'atténuer le bruit d'un facteur 10 on peut choisir une fréquence de coupure égale à 10 fois la fréquence du bruit. Prenons $f_c = 500$ Hz, ce qui produira une atténuation d'un facteur $\sqrt{2}$ du signal utile.

Choisissons une capacité $C = 100$ nF, ce qui impose une résistance $R = \frac{1}{2\pi f_c C} = 3,2$ k Ω (ce sont des valeurs possibles, mais il y en a une infinité d'autres ! **Proposez juste des valeurs de composants accessibles en TP**).

Pour améliorer le filtrage, il serait pertinent d'utiliser un filtre du deuxième ordre, permettant une atténuation d'un facteur supérieur du bruit sans atténuer le signal utile.

Exercice n°5 Mesure du champ magnétique (Durée ~ 1 heure)

R1. Définir le modèle de l'ALI idéal, et les deux types de régime de fonctionnement.

Solution: Dans le modèle de l'ALI idéal :

- Les courants de polarisation sont nuls.
- L'impédance de sortie est nulle.
- La réponse est instantanée.

L'ALI peut fonctionner selon deux types de régime :

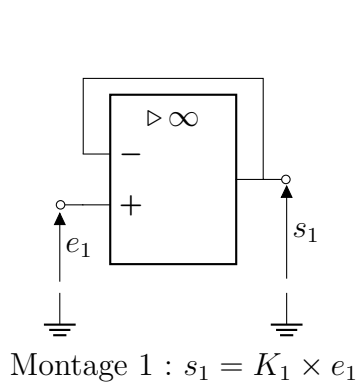
- régime linéaire : la relation entre la tension de sortie et ε est linéaire ;
- régime de saturation : la tension de sortie vaut $\pm V_{\text{sat}}$.

R2. Pour un ALI idéal en fonctionnement linéaire que vaut la tension différentielle ε d'entrée ?

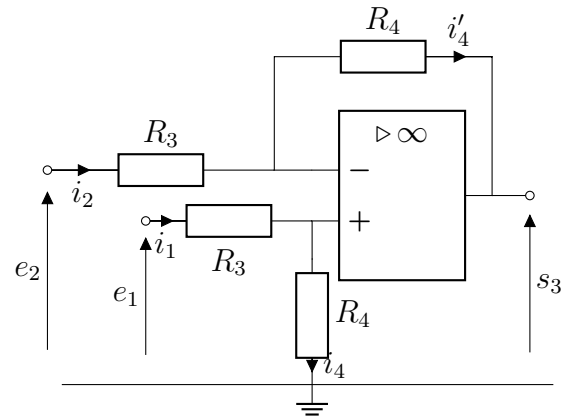
Solution: En fonctionnement linéaire, $\varepsilon = 0$.

Les ALI utilisés dans les montages suivants sont tous idéaux.

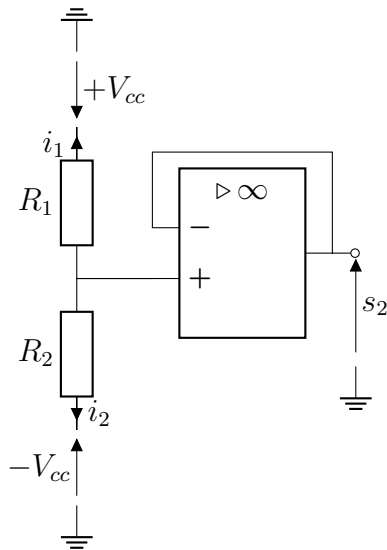
On note $\pm V_{cc}$ qui vaut ± 15 V, les tensions d'alimentations des ALI.



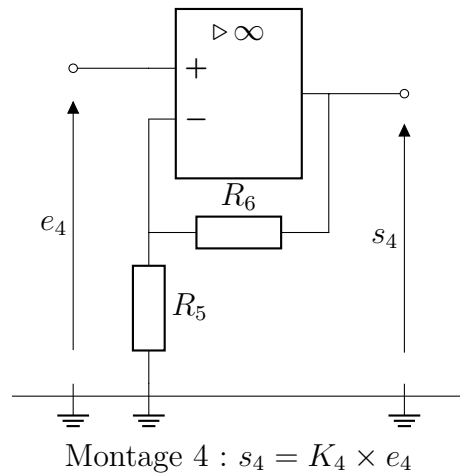
Montage 1 : $s_1 = K_1 \times e_1$



Montage 3 : $s_3 = K_3 \times (e_1 - e_2)$



Montage 2 : $s_2 = K_2 \times V_{cc}$



Montage 4 : $s_4 = K_4 \times e_4$

R3. Pourquoi peut-on considérer que les ALI fonctionnent tous en régime linéaire ?

Solution: Tous les montages présentent une rétroaction entre la sortie et l'entrée inverseuse, on peut donc considérer qu'ils fonctionnent en régime linéaire (tant que la valeur absolue de la tension de sortie ne dépasse pas V_{sat}).

R4. Établir, pour chacun des quatre montages ci-dessous, les expressions de K_1 , K_2 , K_3 et K_4 .

Les tensions de sortie s_1 , s_2 , s_3 et s_4 s'expriment en fonction des grandeurs d'entrée et éventuellement des valeurs des différentes résistances.

Solution:

— Montage 1 :

$$V^- = s_1 \text{ et } V^+ = e_1.$$

Or pour un ALI idéal en régime linéaire $V^- = V^+$

$$\text{donc } \boxed{s_1 = e_1} \text{ et on identifie } \boxed{K_1 = 1}$$

— Montage 2 :

$$i^+ = 0, \text{ la loi des nœuds à l'entrée non inverseuse s'écrit } i_1 + i_2 = 0$$

$$V^- = s_2$$

$$\text{Les lois d'Ohm s'écrivent : } V^+ - V_{cc} = R_1 i_1 \text{ et } V^+ - (-V_{cc}) = R_2 i_2$$

De plus, pour un ALI idéal en régime linéaire $V^- = V^+$

$$\text{Ainsi } \frac{s_2 - V_{cc}}{R_1} + \frac{s_2 + V_{cc}}{R_2} = 0$$

$$\text{Soit } s_2(R_1 + R_2) + V_{cc}(R_1 - R_2) = 0$$

Enfin : $s_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} V_{cc}$

On identifie $K_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$

— Lois des nœuds : $i_1 = i_4$ et $i'_4 = i_2$

Lois d'Ohm :

$$e_2 - V^- = R_3 i_2 \text{ et } V^- - s_3 = R_4 i_2, \text{ soit } \frac{e_2 - V^-}{R_3} = \frac{V^- - s_3}{R_4}, \text{ soit } V^-(R_3 + R_4) = R_4 e_2 + R_3 s_3,$$

$$\text{donc } V^- = \frac{R_4 e_2 + R_3 s_3}{R_3 + R_4}$$

$$e_1 - V^+ = R_3 i_1 \text{ et } V^+ = R_4 i_1, \text{ soit } \frac{e_1 - V^+}{R_3} = \frac{V^+}{R_4}, \text{ donc } V^+ = e_1 \times \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\text{Or } V^+ = V^- : \frac{R_4 e_2 + R_3 s_3}{R_3 + R_4} = e_1 \times \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\text{soit } R_4 e_2 + R_3 s_3 = R_4 e_1, \text{ donc } s_3 = \frac{R_4}{R_3} (e_1 - e_2)$$

On identifie $K_3 = \frac{R_4}{R_3}$

— Montage 4 Vous devez reconnaître l'amplificateur non inverseur du cours et donc pouvoir établir sa relation entrée-sortie facilement !

$$V^- = V^+ = e_4$$

$$\text{Avec un pont diviseur de tension : } e_4 = \frac{R_5}{R_5 + R_6} s_4$$

$$\text{Ainsi } s_4 = \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) e_4 \text{ et on identifie } K_4 = 1 + \frac{R_6}{R_5}$$

R5. Le montage 2 s'appelle décaleur (ou générateur de tension réglable), pourquoi ?

Solution: La tension s_2 est proportionnelle à la tension constante V_{cc} , la constante K_2 de proportionnalité dépend des résistances R_2 et R_1 . La tension s_2 est réglable en modifiant les valeurs de R_2 et R_1 .

R6. Proposer des noms pour chacun des montages 1, 3 et 4.

Solution: Le montage 1 est le montage suiveur puisque la tension de sortie est égale à la tension d'entrée.

On peut appeler le montage 3 le montage soustracteur, puisqu'on récupère en sortie la différence entre les deux tensions d'entrée, à un facteur près.

Le montage 4 est le montage amplificateur non inverseur. Amplificateur car $1 + \frac{R_6}{R_5}$ est supérieur à 1, donc $s_4 > e_4$, et non inverseur car la tension d'entrée est au niveau de l'entrée non inverseuse.

La mesure d'un champ magnétique B nécessite, comme capteur, une sonde à effet Hall qui fournit une tension faible, accessible à la mesure après amplification.

Le constructeur de la sonde indique une relation entre la f.e.m. de sortie U_c du capteur en fonction de la valeur du champ magnétique existant B de la forme :

$$U_c = 0,25V_{cc} + 20B$$

avec U_c et V_{cc} en volts et B en teslas.

Cette tension étant faible, une chaîne électronique à la sortie du capteur va amplifier et rendre une tension de sortie en bout de chaîne, proportionnelle à B de la forme : $U_s = K \times B$.

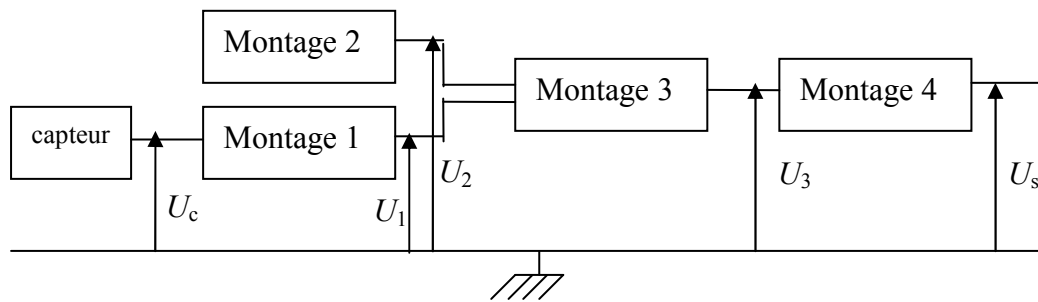


FIGURE 6 – Chaîne électronique à la sortie de la sonde

R7. Quelle est l'utilité du montage 1 ?

Solution: Le montage 1 suiveur a une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle. Ainsi ce qu'on place en sortie du capteur ne perturbe pas le fonctionnement du capteur, et donc notamment la tension U_c en sortie du capteur.

R8. Quelle est l'utilité du montage 2 (décaleur) ?

Solution: En sortie du montage 3, on récupère $U_2 - U_1$ (à un facteur près).
En sortie du capteur, il y a une tension continue qui vaut $0,25V_{cc}$ en plus de la tension utile proportionnelle au champ magnétique ($20B$).
Pour récupérer, en sortie de la chaîne électronique une tension proportionnelle au champ magnétique B , il faut supprimer la tension continue $0,25V_{cc}$: c'est le rôle du montage décaleur.
En choisissant R_1 et R_2 telles que $U_2 = 0,25V_{cc}$, alors on aura $U_3 = K_3 \times (U_1 - U_2) = K_3 \times 20B$.

On suppose que la chaîne ne modifie pas le comportement individuel de chacun des quatre montages étudiés individuellement.

R9. Déterminer l'expression de la tension de sortie U_s en fonction des résistances $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$, de V_{cc} et de B .

Solution:

$$\begin{aligned} U_s &= K_4 \times U_3 \\ U_s &= K_4 \times K_3 \times (U_1 - U_2) \\ U_s &= K_4 K_3 \times (U_c - K_2 V_{cc}) \\ U_s &= \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) \times \frac{R_4}{R_3} \times \left(0,25V_{cc} + 20B - \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} V_{cc}\right) \end{aligned}$$

R10. Application numérique.

Vérifier que U_s est bien de la forme $U_s = K \times B$ et en déduire la valeur de K pour les résistances : $R_1 = 3,0 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 5,0 \text{ k}\Omega$; $R_3 = R_4 = R_5 = 1,0 \text{ k}\Omega$; $R_6 = 4,0 \text{ k}\Omega$.

Solution: Avec les valeurs numériques fournies :

$$\begin{aligned} U_s &= \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) \times \frac{R_4}{R_3} \times \left(0,25V_{cc} + 20B - \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}V_{cc}\right) \\ U_s &= (1 + 4) \times 1 \times \left(0,25V_{cc} + 20B - \frac{2}{8}V_{cc}\right) \\ U_s &= 5 \times 20B \\ U_s &= 100B \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques fournies, on obtient bien $U_s = K \times B$, avec $K = 100 \text{ V} \cdot \text{T}^{-1}$

Il ne faut pas oublier l'UNITÉ!!