

? Lundi 26 janvier 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°7 (1) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Sur un sujet qui paraît difficile, il faut garder confiance en vos capacités et vos connaissances, sans vous démobiliser quand vous avez le sentiment de ne pas y arriver.
- Au début du DS, parcourez l'ensemble du sujet, à la recherche de ce qui ressemble au cours, de ce qui paraît facile pour s'assurer de l'avoir traité à la fin du devoir.

Exercice n°1 TP (Durée ~ 10 min)

Suite à l'expérience de la chute de la bille de rayon R dans du miel, on obtient la série de valeurs suivantes pour la viscosité η , qui intervient dans la force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse.

```
1 eta = [4.35812022, 4.46859186, 4.9553637, 4.0787473, 4.84452288,
2       5.22699136, 5.31601425, 4.19039548, 4.54784836, 4.11190872]
3 >>> np.mean(eta)
4 4.609850412367232
5 >>> np.std(eta, ddof=1)
6 0.453027608208495
7 >>> np.std(eta, ddof=1)/np.sqrt(len(eta))
0.1432599084877237
```

R1. Quelle est l'unité de η ? On l'exprimera à l'aide uniquement des kg, m et s.

Solution:
$$[\eta] = \frac{[f]}{[6\pi Rv]} = \frac{kg.m.s^{-2}}{m.m.s^{-1}} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

R2. Quelle grandeur calcule `np.mean(eta)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta, ddof=1)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta, ddof=1)/np.sqrt(len(eta))` ?

Solution: `np.mean(eta)` calcule la moyenne de la série de mesures.
`np.std(eta, ddof=1)` calcule l'écart-type de la série de mesures.
`np.std(eta, ddof=1)/np.sqrt(len(eta))` calcule l'incertitude-type sur la moyenne.

R3. Écrire le résultat de l'expérience en étant vigilant.e sur le nombre de chiffres significatifs.

Solution: $\eta = 4,61 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}; 0,14 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

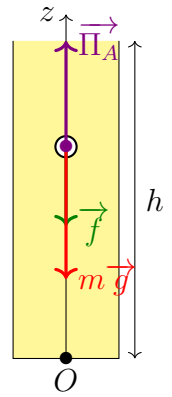
Exercice n°2 Bulles de champagne (Durée ~ 50 min)

Dans cet exercice, on cherche à calculer le temps que met une bulle qui se forme en bas d'une coupe de champagne^a pour arriver à la surface. Les bulles de champagne sont constituées de dioxyde de carbone CO_2 . Celui-ci, initialement dissout dans le champagne quand la bouteille est fermée, repasse à l'état gazeux quand on ouvre la bouteille (puisque la pression diminue alors brusquement).

La bulle étudiée est sphérique de diamètre constant $D = 1,0 \text{ mm}$.

Elle apparaît à $t = 0$ sans vitesse initiale en bas de la coupe à l'altitude $z = 0$ (axe (Oz) ascendant), puis remonte jusqu'à la surface.

La hauteur de la coupe est $h = 10 \text{ cm}$.



a. L'abus de l'alcool est dangereux pour la santé.

Au cours de son ascension, la bulle est freinée par une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, où le coefficient k est donné par la formule de Stokes : $k = 6\pi\eta r$, dans laquelle r est le rayon de la bulle et η la viscosité du champagne : $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

La masse volumique du champagne est quasiment égale à celle de l'eau, soit $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La bulle de champagne est constituée de CO_2 de masse volumique $\rho_{\text{CO}_2} = 1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ dans les conditions de l'expérience.

R1. **Rappeler** l'expression du volume d'une sphère de rayon r .

Solution: ♥ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

R2. **Exprimer** le poids et la poussée d'Archimède qui s'exercent sur la bulle de champagne.

Solution: Poids de la bulle de champagne : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{\text{CO}_2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{g} = \rho_{\text{CO}_2} \times \frac{1}{6}\pi D^3 g$
Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{eau}} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{g}$

R3. **Établir** l'équation vérifiée par la composante v_z du vecteur vitesse de la bulle.

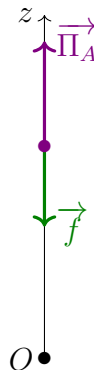
Solution:

Système : bulle

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces :

- poids : $\vec{P} = \rho_{\text{CO}_2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{g} = -\rho_{\text{CO}_2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{u}_z$
- poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{eau}} V \vec{g} = +\rho_{\text{eau}} \times \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{u}_z$
- force de frottement fluide : $\vec{f} = -6\pi r \eta \vec{v} = -6\pi r \eta v_z \vec{u}_z$



Principe fondamental de la dynamique appliqué à la bulle dans le référentiel terrestre : $m\vec{a} = \vec{\Pi}_A + \vec{f}$

En projection selon $\vec{u}_z$: $m \frac{dv_z}{dt} = -\rho_{\text{CO}_2} V g + \rho_{\text{eau}} V g - 6\pi r \eta v_z$

Soit $m \frac{dv_z}{dt} + 6\pi r \eta v_z = \rho_{\text{eau}} V g - \rho_{\text{CO}_2} V g$

R4. **Expliquer** qualitativement pourquoi la bulle de champagne va atteindre une vitesse limite au cours de son ascension.

Déterminer ensuite l'expression de v_{lim} en fonction des données de l'énoncé (r , η , ρ_{eau} , ρ_{CO_2} , g).

Faire l'application numérique.

Solution: La bulle est soumise à la poussée d'Archimède, dirigée vers le haut et à la force de frottement fluide dirigée vers le bas. Au cours de son ascension, sa vitesse augmente et la force de frottement fluide également. Arrive un moment où cette dernière va compenser la poussée d'Archimède. Le mouvement de la bulle sera alors rectiligne uniforme.

$$\begin{aligned} 0 + 6\pi r\eta v_{\text{lim}} &= (\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{CO}_2})Vg \\ 6\pi r\eta v_{\text{lim}} &= (\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{CO}_2}) \times \frac{4}{3}\pi r^3 g \end{aligned}$$

Il faut exprimer en fonction des données de l'énoncé, V et k ne sont pas des données

$$v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{CO}_2})r^2 g}{9\eta}$$

$$\text{A.N. : } v_{\text{lim}} = \frac{2 \times 10^3 \times (1/2 \cdot 10^{-3})^2 \times 10}{9 \times 10^{-3}} = \frac{2}{4 \times 9} \times 10 \approx 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

R5. **Montrer** que l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

et identifier τ (en fonction de r , η , et ρ_{CO_2}).

Solution:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_z}{dt} + 6\pi r\eta v_z &= \rho_{\text{eau}} V g \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi r\eta}{m} v_z &= \frac{\rho_{\text{eau}} V g}{m} \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi r\eta}{m} v_z &= \frac{6\pi r\eta v_{\text{lim}}}{m} \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} &= \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \end{aligned}$$

On identifie $\tau = \frac{m}{6\pi r\eta} = \frac{2\rho_{\text{CO}_2} r^2}{9\eta}$

R6. **Résoudre complètement** l'équation différentielle satisfaite par $v_z(t)$.

Solution: Résolvez l'équation écrite sous la forme fournie par l'énoncé.

Solution générale : $v_z(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{\text{lim}}$

Or à $t = 0$, $v_z(0) \approx 0$, donc $v_z(t) = v_{\text{lim}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

R7. Au bout de combien de temps la bulle a-t-elle atteint sa vitesse limite, à 1% près? Vous établirez une expression littérale puis vous ferez l'application numérique.

Solution: t est la VARIABLE de temps. Ici on cherche un instant particulier, il faut donc lui donner un nom particulier.

On cherche t_1 tel que

$$\begin{aligned}v_z(t_1) &= 0,99v_{\text{lim}} \\v_{\text{lim}}(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}) &= 0,99v_{\text{lim}} \\1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} &= 0,99 \\ \frac{t_1}{\tau} &= -\ln(0,01)\end{aligned}$$

Soit $t_1 = \ln(100)\tau \approx 5\tau$

$$\text{A.N. : } t_1 = 5 \times \frac{2\rho_{\text{CO}_2} r^2}{9\eta} = \frac{10}{9} \times \frac{1,8 \times 1/4 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

R8. Déterminer l'équation horaire du mouvement $z(t)$.

Solution: On primitive par rapport au temps **SANS OUBLIER LA CONSTANTE d'intégration** :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= v_{\text{lim}}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\z(t) &= v_{\text{lim}} \left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + K \\z(0) &= v_{\text{lim}}\tau + K = 0 \\z(t) &= v_{\text{lim}} \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\z(t) &= v_{\text{lim}}\tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right)\end{aligned}$$

R9. Compte tenu de la valeur trouvée à la question R7, justifier qu'on peut considérer que $z(t) \approx v_{\text{lim}}t$.

Calculer alors le temps T que met la bille pour arriver à la surface.

Solution: t_1 est très petit, donc on peut considérer qu'à l'instant où la bulle arrive à la surface, $t \gg \tau$, soit $e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0$: on peut considérer que le régime permanent est atteint presque tout de suite à l'échelle de la durée du mouvement de la bulle.

Ainsi $z(T) \approx v_{\text{lim}}T$, soit $T = \frac{h}{v_{\text{lim}}} = 0,2 \text{ s} \gg t_1$

Exercice n°3 Étude d'un toboggan rectiligne (D'après EPITA 2023)

Partie I Questions de cours autour de l'énergie

R1. Donner la définition du travail d'une force $\vec{f}$ quelconque entre A et B . Quelle est son unité ?

Solution: Travail d'une force $\vec{f}$ quelconque entre A et B : $W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{OM}$, en joule (J)

R2. Donner la définition d'une force conservative.

Solution: Une force est conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

R3. Donner l'expression du travail d'une force conservative entre A et B et la variation de l'énergie potentielle.

Solution: Pour une force conservative : $W_{AB}(\vec{f}) = -\Delta_{AB}\mathcal{E}_p = -(\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A))$

R4. **Énoncer le théorème** de l'énergie mécanique.

Solution: Entre deux points A et B , la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives $\Delta_{AB}\mathcal{E}_m = W_{AB}(\overrightarrow{F^{\text{non conservatives}}})$

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

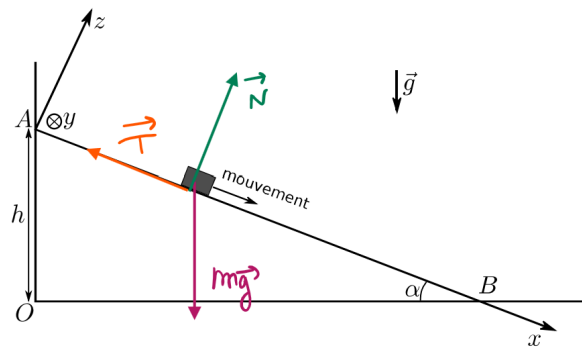


FIGURE 1 – Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Partie II Sans frottement

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

R5. **Effectuer un bilan des forces** précis, et préciser les forces qui sont conservatives ou non.

Solution: Système : $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces :

- le poids, force conservative, d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{pp} = +mgZ + K$
- réaction normale $\overrightarrow{N}$ du support, non conservative
- tous les frottements sont négligés

R6. **Exprimer** le travail de l'unique force non conservative entre A et B .

Solution: Travail de la réaction normale $\overrightarrow{N}$:

$$\begin{aligned} W_{AB}(\overrightarrow{N}) &= \int_A^B \overrightarrow{N} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= \int_A^B N \overrightarrow{e_z} \cdot dx \overrightarrow{u_x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{N}$ ne travaille pas.

R7. Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

Solution: D'après le théorème de l'énergie mécanique entre A et B : $\Delta_{A \rightarrow B} \mathcal{E}_m = W(\vec{R}_N) = 0$, donc l'énergie mécanique se conserve.

R8. En utilisant une approche énergétique, **exprimer** la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

Solution: D'après la question précédente : $\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B)$, soit $0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$, donc $v_B = \sqrt{2gh}$

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km/h.

R9. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

Solution: La forme du toboggan ne modifie pas v_B , à h constant.

Partie III Prise en compte des frottements

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit : $\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x$, où $T > 0$ représente les frottements solides.

On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement, et on note μ le coefficient de frottement dynamique.

R10. (a) **Projeter** le poids dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

(b) **Écrire** le principe fondamental de la dynamique.

(c) **Le projeter** dans la direction perpendiculaire au mouvement, et en déduire l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .

(d) **En déduire** l'expression de T en fonction de μ , m , g , et de l'angle α .

Solution: Poids : $m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

D'après le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$

Selon $\vec{e}_y$: $0 = -mg \cos(\alpha) + N$, donc $N = mg \cos(\alpha)$

D'après la loi de Coulomb en glissement : $T = \mu mg \cos(\alpha)$

R11. **Exprimer** le travail de la force $\vec{R}$ en fonction de μ , m , g et de la distance AB , puis en fonction de μ , m , g , h et de l'angle α .

Solution: Travail de la force $\vec{R}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{AB}(\vec{R}) &= \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{OM} \\ &= \int_A^B (N\vec{e}_z - T\vec{e}_x) \cdot dx\vec{u}_x \\ &= \int_{x_A}^{x_B} -T dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} -\mu mg \cos(\alpha) dx \\ &= -\mu mg \cos(\alpha)(x_B - x_A) \\ &= -\mu mg \cos(\alpha)AB \\ &= -\mu mg \cos(\alpha) \times \frac{h}{\sin(\alpha)} \\ &= -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_{AB}(\vec{R}) = -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)}$$

R12. À l'aide de ce qui précède et d'un théorème énergétique, **établir l'expression** de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

Solution: D'après le théorème de l'énergie mécanique entre A et B :

$$\begin{aligned}\Delta_{AB}\mathcal{E}_m &= \mathcal{W}_{AB}(\vec{F}^{NC}) \\ \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) &= \mathcal{W}_{AB}(\vec{R}) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 - 0 - mgh &= -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)} \\ \frac{1}{2}v_B^2 &= gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan(\alpha)}\right)\end{aligned}$$

Soit $v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan(\alpha)}\right)}$

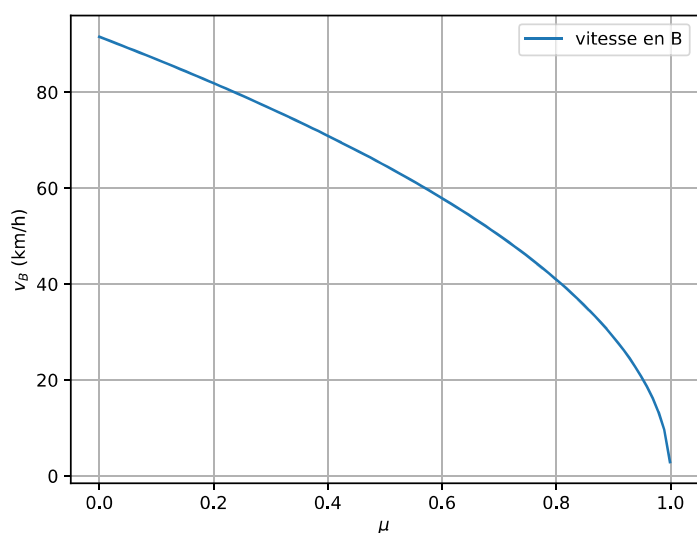


FIGURE 2 – Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

R13. La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. **En déduire** une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

Solution: La vitesse est maximale en B , donc $v_B = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, par lecture graphique, on lit $\mu = 0,22$

Partie IV Arrivée en bas de la piste

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste. Les frottements agissent toujours.

R14. À l'aide des d'un raisonnement énergétique, **déterminer la longueur L** de la piste en fonction de v_B , μ et g .

On attend une expression puis une valeur numérique.

Solution: On note C le point d'arrêt du passager, avec $L = BC$

D'après le théorème de l'énergie mécanique entre B et C :

$$\begin{aligned}\Delta_{BC}\mathcal{E}_m &= \mathcal{W}_{BC}(\overrightarrow{F^{NC}}) \\ \mathcal{E}_m(C) - \mathcal{E}_m(B) &= \mathcal{W}_{BC}(\overrightarrow{R}) \\ \text{avec } \mathcal{W}_{BC}(\overrightarrow{R}) &= \int_B^C (N\vec{e}_z - T\vec{e}_x) \cdot dx\vec{e}_x \\ &= \int_{x_B}^{x_C} -\mu mg dx \\ &= -\mu mgL \\ \text{Ainsi } \mathcal{E}_m(C) - \mathcal{E}_m(B) &= -\mu mgL \\ 0 + 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 &= -\mu mgL \\ \frac{1}{2}v_B^2 &= \mu gL\end{aligned}$$

soit $L = \frac{v_B^2}{2\mu g} = 100 \text{ m}$

Exercice n°4 Étude des oscillations dans une cuvette (Durée ~ 45 min)

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 3. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

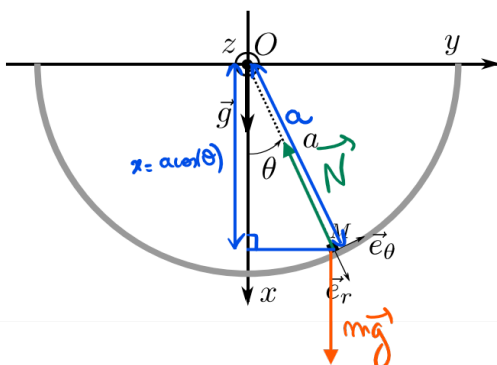


FIGURE 3 – Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

R1. **Effectuer** un bilan des forces, les **représenter** sur un schéma.

Solution: Système : $M(m)$

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g} = mg \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$ conservative, d'énergie potentielle associée $\mathcal{E}_{pp} = -mgx = -mga \cos(\theta)$
- Réaction normale $\vec{N} = -N\vec{e}_r$, ne travaille pas

On souhaite obtenir l'équation différentielle du mouvement de deux façons.

Partie I Première méthode : avec le principe fondamental de la dynamique

R2. Après avoir écrit le principe fondamental de la dynamique, **établir** l'équation différentielle du mouvement reliant θ et $\ddot{\theta}$.

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{N} \\ m \begin{pmatrix} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \end{pmatrix} &= mg \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit, selon $\vec{e}_r$: $a\ddot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$

Partie II Deuxième méthode : avec l'énergie

R3. **Exprimer** l'énergie mécanique de M en fonction de $m, g, a, \theta, \dot{\theta}$.

Solution: Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pp} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - mga \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 - mga \cos(\theta) \end{aligned}$$

R4. **Donner** la définition de la puissance d'une force. Quelle est **son unité** ?

Solution: Puissance d'une force : $\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$, en watt (W)

R5. **Énoncer** le théorème de la puissance mécanique.

Solution: Théorème de la puissance mécanique : $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{f^{\text{non conservatives}}})$

R6. En utilisant le théorème de la puissance mécanique, **montrer que** θ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin(\theta) = 0$$

Solution: D'après le théorème de la puissance mécanique :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= \mathcal{P}(\overrightarrow{F^{NC}}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (a\dot{\theta})^2 - mga \cos(\theta) \right) &= 0 \\ ma^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mga \dot{\theta} \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

D'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin(\theta) = 0$

Partie III Résolution

R7. **Proposer** une approximation qui permet de résoudre cette équation.

Sous cette hypothèse, **résoudre** l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Solution: Pour $\theta \ll 1$ rad : $\sin(\theta) \sim \theta$

On obtient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \theta = 0$ qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

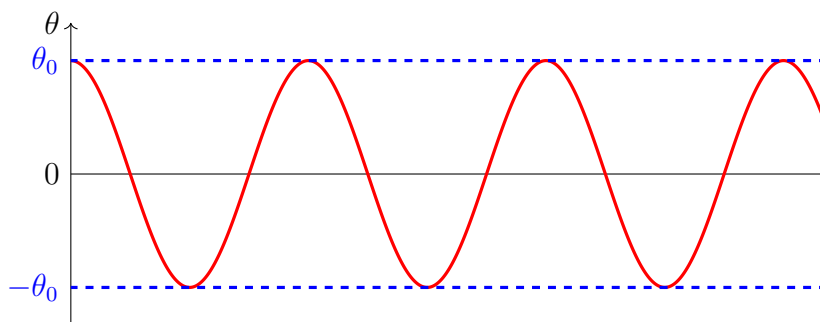
Solution générale : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Or $\theta(0) = A = \theta_0$, et $\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$

Ainsi $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

R8. **Tracer** l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

Solution:



R9. Toujours sous l'hypothèse précédente, **donner l'expression** de la période des oscillations en fonction de a et de g .

Solution: Période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$

Exercice n°5 Interaction entre des atomes de Néon (Durée ~ 30 min)

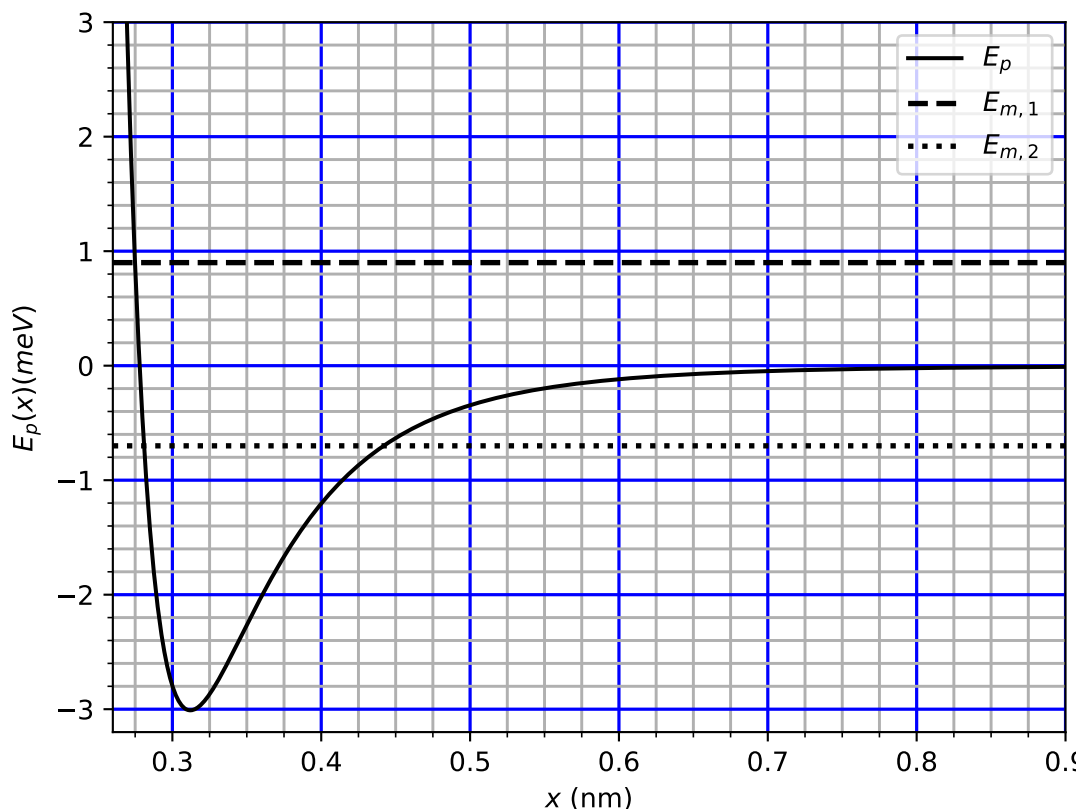
On considère un atome de Néon de masse m interagissant avec un autre atome de Néon supposé fixe dans un référentiel galiléen. Le problème est vu de façon unidimensionnelle selon x , l'atome fixe étant situé en l'origine O .

L'énergie potentielle correspondant à la force d'interaction $\vec{F}$ qui s'exerce entre les deux atomes est modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$\mathcal{E}_P(x) = 4\mathcal{E}_0 \left[\left(\frac{d}{x} \right)^{12} - \left(\frac{d}{x} \right)^6 \right]$$

où x désigne la distance intermoléculaire et σ est une distance caractéristique. L'énergie potentielle est prise nulle lorsque $x \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque les deux atomes sont infiniment éloignés.

On donne le graphe représentatif de $\mathcal{E}_P(x)$.



R1. Justifier que l'énergie mécanique de l'atome de néon se conserve.

Solution: Système : atome de Néon de masse m

Référentiel : terrestre galiléen à l'échelle de l'expérience.

Bilan des forces : une seule, dérivant de $\mathcal{E}_P$, donc conservative.

D'après le théorème de la puissance mécanique, l'atome de néon n'étant soumis à aucune force non conservative, son énergie mécanique se conserve.

R2. Différents mouvements possibles :

(a) À partir de la définition de l'énergie mécanique, donner l'inégalité qui relie $\mathcal{E}_m$ et $\mathcal{E}_P(x)$.

Solution: Par définition : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_P \geq \mathcal{E}_P$, donc les seules positions accessibles à l'atome, sont celles pour lesquelles $\mathcal{E}_m$ est supérieure à $\mathcal{E}_P$.

(b) Comment graphiquement (connaissant les courbes représentatives de $\mathcal{E}_m$ et $\mathcal{E}_P$) détermine-t-on les positions accessibles à l'atome de néon ?

Solution: Graphiquement, les positions accessibles sont celles pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle est en-dessous de la courbe d'énergie mécanique.

Dans les deux questions suivantes, les termes « borné », « non borné », « oscillations périodiques » doivent apparaître.

- (c) Déterminer les positions accessibles à l'atome de néon, si l'énergie mécanique vaut $\mathcal{E}_{m,1}$. Décrire son mouvement. Quelles sont les positions de vitesse nulle ?

Solution: Pour $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,1}$, les positions accessibles sont dans l'intervalle $[0,28; 0,44]$ nm, c'est un intervalle borné, donc la trajectoire est bornée. L'atome va osciller entre ces deux positions extrêmes.

L'atome a une vitesse nulle lorsque $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_{m,1}$, soit en $x = 0,28$ nm, et en $x = 0,44$ nm.

- (d) Déterminer les positions accessibles à l'atome de néon, si l'énergie mécanique vaut $\mathcal{E}_{m,2}$. Décrire son mouvement. Quelles sont les positions de vitesse nulle ?

Solution: Pour $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2}$, les positions accessibles sont pour $x > 0,275$ nm, c'est un intervalle non borné, donc la trajectoire n'est pas bornée. L'atome a une vitesse nulle lorsque $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_{m,2}$, soit en $x = 0,275$ nm.

Le graphe du document réponse devra être complété et rendu avec votre copie.

R3. Équilibre ?

- (a) Comment est l'énergie potentielle en une position d'équilibre ?

Solution: En une position d'équilibre, l'énergie potentielle est extrémale.

- (b) À partir de l'expression de $\mathcal{E}_p(x)$, montrer que la distance d'équilibre x_0 s'exprime selon $x_0 = 2^{1/6}d$.

Solution: En une position d'équilibre, l'énergie potentielle présente un extrémum local, donc sa dérivée s'annule.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} &= 4\mathcal{E}_0 \left[-12\frac{d^{12}}{x^{13}} + 6\frac{d^6}{x^7} \right] \\ x_0 \text{ telle que } \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) &= 0 \\ 4\mathcal{E}_0 \left[-12\frac{d^{12}}{x_0^{13}} + 6\frac{d^6}{x_0^7} \right] &= 0 \\ -2\frac{d^{12}}{x_0^{13}} + \frac{d^6}{x_0^7} &= 0 \\ x_0^6 &= 2d^6\end{aligned}$$

Soit $x_0 = 2^{1/6}d$

- (c) Exprimer $\mathcal{E}_p(x_0)$ en fonction de $\mathcal{E}_0$ uniquement.

Solution:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(x_0) &= 4\mathcal{E}_0 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\mathcal{E}_0\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_0$ est donc la profondeur du puits de potentiel.

R4. Stabilité ?

- (a) Comment est l'énergie potentielle en une position d'équilibre stable ? instable ?

Solution: En une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle est minimale. Elle est maximale en une position d'équilibre instable.

(b) D'après le graphe, x_0 est-elle une position d'équilibre stable ou instable ?

Solution: $\mathcal{E}_p$ est minimale en x_0 , donc l'équilibre est stable.

R5. En exploitant le graphe et les questions précédentes, déterminer les valeurs de d et $\mathcal{E}_0$.

Solution: L'équilibre a lieu en $x_0 = 0,32 \text{ nm} = 2^{1/6}d$, soit $d = 2^{-1/6}x_0 \approx 0,9 \times 0,320,29 \text{ nm}$
 $\mathcal{E}_0 = 3 \text{ meV} = 4,8 \cdot 10^{-22} \text{ J}$

Exercice n°6 Toboggan hélicoïdal (D'après Banque PT 2022)

On étudie le toboggan représenté sur la figure ci-dessous :

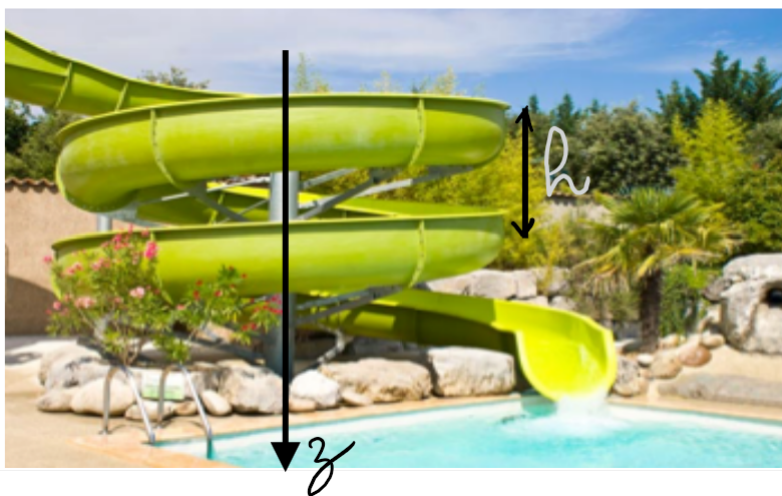


FIGURE 4 – Toboggan hélicoïdal

Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

- L'enfant de masse $m = 50 \text{ kg}$, est assimilé à un point matériel M .
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5 \text{ m}$.
- À chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h .

Le point M , initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant.

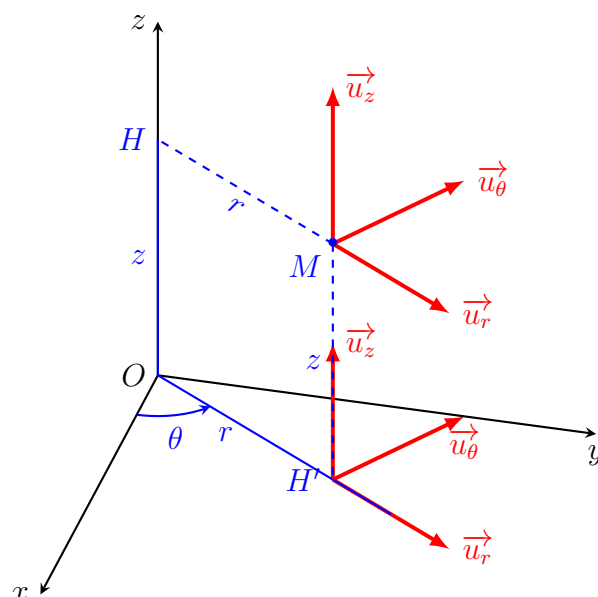
L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

On étudie le mouvement de l'enfant uniquement d'un **point de vue cinématique**.

R1. Quelles sont les coordonnées cylindriques d'un point M ?

Faire un schéma définissant les coordonnées cylindriques, et indiquer dessus la base cylindrique.

Solution: Les coordonnées cylindriques d'un point M sont r , θ et z .



Les équations horaires de l'enfant sont :
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = H - v_0 t \end{cases} \quad \text{où } H, R, \omega, v_0 \text{ sont des constantes positives.}$$

R2. **Exprimer** le vecteur position de l'enfant $\overrightarrow{OE}$.

Solution: Système : enfant $E(m)$

Référentiel : $\mathcal{R}$ lié au toboggan, considéré galiléen

$$\overrightarrow{OE} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = R\vec{u}_r + (H - v_0 t)\vec{u}_z$$

R3. **Exprimer** le vecteur vitesse de l'enfant en coordonnées cylindriques, en fonction des constantes du problème et des vecteurs de la base cylindrique.

Solution: Vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v(E)} &= \frac{d\overrightarrow{OE}}{dt} \\ &= R\dot{\theta}\vec{u}_\theta - v_0\vec{u}_z \\ &= R\omega\vec{u}_\theta - v_0\vec{u}_z \end{aligned}$$

R4. **Exprimer** la norme du vecteur vitesse et conclure sur la nature du mouvement.

Solution: Norme du vecteur vitesse : $v_E = \sqrt{(R\omega)^2 + v_0^2}$, elle est constante au cours du mouvement, le mouvement de l'enfant est donc uniforme.

R5. **Exprimer** le vecteur accélération de l'enfant en coordonnées cylindriques, en fonction des constantes du problème et des vecteurs de la base cylindrique.

Solution: Vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a(E)} &= \frac{d\overrightarrow{v(E)}}{dt} \\ &= R\omega(-\dot{\theta})\vec{u}_r - 0 \\ &= -R\omega^2\vec{u}_r \end{aligned}$$

R6. Sachant que l'enfant fait exactement trois tours au cours de la descente, à quel instant arrive-t-il en bas ? Avec quelle vitesse (=on exprimera sa norme en fonction de h , v_0 et ω) ?

Solution: À $t = 0$, $\theta = 0$. Au bout de trois tours, $\theta = 6\pi$, donc il arrive en bas à l'instant $t_B = \frac{6\pi}{\omega}$,

avec une vitesse : $v_B = H - v_0 \frac{6\pi}{\omega} = 3h - v_0 \frac{6\pi}{\omega}$