

? Lundi 26 janvier 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°7 (2) – Corrigé



Remarque – Consignes générales :

- Sur un sujet qui paraît difficile, il faut garder confiance en vos capacités et vos connaissances, sans vous démobiliser quand vous avez le sentiment de ne pas y arriver.
- Au début du DS, parcourez l'ensemble du sujet, à la recherche de ce qui ressemble au cours, de ce qui paraît facile pour s'assurer de l'avoir traité à la fin du devoir.

Exercice n°1 TP (Durée ~ 10 min)

Suite à l'expérience de la chute de la bille de rayon R dans du miel, on obtient la série de valeurs suivantes pour la viscosité η , qui intervient dans la force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse.

```
1 eta = [4.35812022, 4.46859186, 4.9553637, 4.0787473, 4.84452288,
2       5.22699136, 5.31601425, 4.19039548, 4.54784836, 4.11190872]
3 >>> np.mean(eta)
4 4.609850412367232
5 >>> np.std(eta, ddof=1)
6 0.453027608208495
7 >>> np.std(eta, ddof=1)/np.sqrt(len(eta))
0.1432599084877237
```

R1. Quelle est l'unité de η ? On l'exprimera à l'aide uniquement des kg, m et s.

Solution:
$$[\eta] = \frac{[f]}{[6\pi Rv]} = \frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m.m.s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

R2. Quelle grandeur calcule `np.mean(eta)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta, ddof=1)` ? Quelle grandeur calcule `np.std(eta, ddof=1)/np.sqrt(len(eta))` ?

Solution: `np.mean(eta)` calcule la moyenne de la série de mesures.
`np.std(eta, ddof=1)` calcule l'écart-type de la série de mesures.
`np.std(eta, ddof=1)/np.sqrt(len(eta))` calcule l'incertitude-type sur la moyenne.

R3. Écrire le résultat de l'expérience en étant vigilant.e sur le nombre de chiffres significatifs.

Solution: $\eta = 4,61 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}; 0,14 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Exercice n°2 Gouttes de pluie (D'après CCINP MP 2023)

Partie I Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\vec{e}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

R1. Définir « référentiel galiléen ». Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau, en fonction uniquement des données ρ , D et $\vec{e}_z$.

Solution: Le principe d'inertie stimule l'existence d'une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, dans lesquels un système isolé ou pseudo-isolé persévère dans un mouvement rectiligne uniforme. Poids de la goutte d'eau :

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= \rho V \vec{g} \\ &= \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{g} \\ &= \rho \frac{4\pi}{3} \frac{D^3}{2^3} \vec{g} \\ &= \rho \frac{\pi D^3}{6} \vec{g} \end{aligned}$$

R2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \text{ avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Solution:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \rho_a C \pi D^2 v^2 \right] &= 1 \times M.L^{-3} \times 1 \times L^2 \times (L.T^{-1})^2 \\ &= M.L^{-3}.L^2.L^2.T^{-4} \\ &= M.L.T^{-2} \end{aligned}$$

L'expression est donc bien homogène.

R3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$v_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ , ρ_a , C et de g .

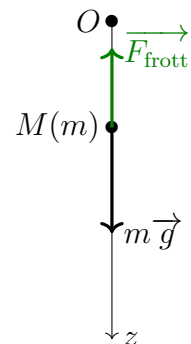
Solution:

Système : goutte d'eau

Référentiel : terrestre, considéré galiléen à l'échelle de la chute de la goutte d'eau

Bilan des forces :

- poids $\rho \frac{\pi}{6} D^3 \vec{g}$
- force de frottement fluide $\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z$



Principe fondamental de la dynamique à la goutte d'eau dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{F}_{\text{frott}} \\ m\frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \frac{\pi}{6} D^3 \vec{g} - C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \\ m\frac{dv}{dt} \vec{e}_z &= \rho \frac{\pi}{6} D^3 g \vec{e}_z - C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Une fois la vitesse limite atteinte : $0 = \rho \frac{\pi}{6} D^3 g - \rho_a C \pi D^2 v_{\text{lim}}^2$, soit $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho D}{6 \rho_a C}}$

Or le mouvement a lieu selon $+\vec{e}_z$, donc $\vec{v}_{\text{lim}} = v_{\text{lim}} \vec{e}_z$, soit $\vec{v}_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho g}{6 \rho_a C}} \sqrt{D} \vec{e}_z$, qui est bien de la

forme $\vec{v}_{\text{lim}} = K \sqrt{D} \vec{e}_z$, avec $K = \sqrt{\frac{\rho g}{6 \rho_a C}}$

	D (mm)	v_{lim} (m · s ⁻¹)
A.N. :	1	4,6
	3	7,9
	5	10,2

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en R3 en traits pointillés.

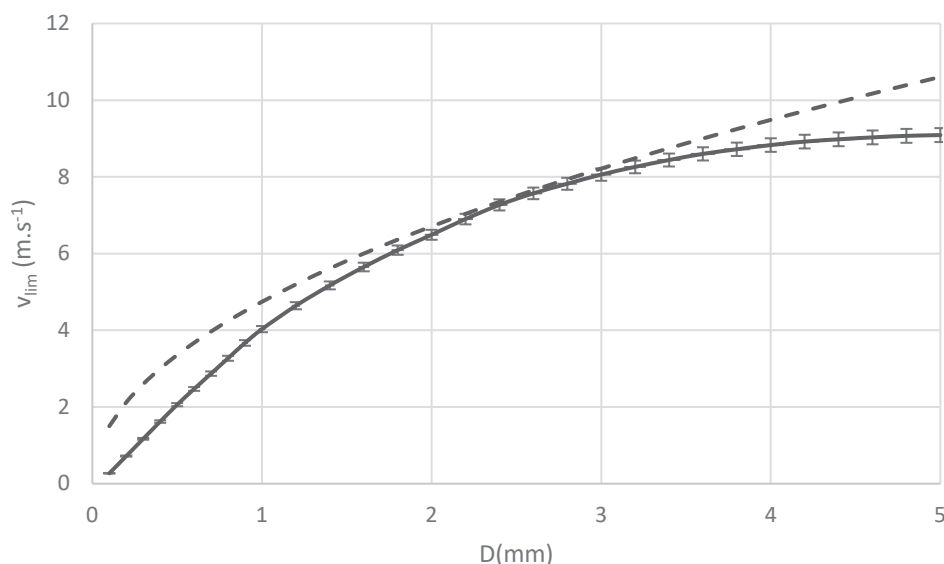


FIGURE 1 – Influence du diamètre sur la vitesse limite

R4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de R1 à R3 n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

Solution: Le modèle théorique semble expliquer les valeurs mesurées expérimentalement pour des gouttes de diamètre entre 2 et 3 mm.

Pour les petites gouttes, l'évolution de v_{lim} semble linéaire, ce qui peut laisser penser que le modèle des frottements linéaires serait plus adapté.

Pour les grosses gouttes, on peut imaginer qu'elle se déforme sous l'effet de leur poids et ne restent pas sphérique au cours de la chute. Il faudrait donc changer la valeur de C , et l'expression de $\vec{F}_{\text{frott}}$.

Partie II Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$, avec $K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$.

On s'intéresse à un disdromètre à impact. Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M , relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc platine $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_z$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 2).

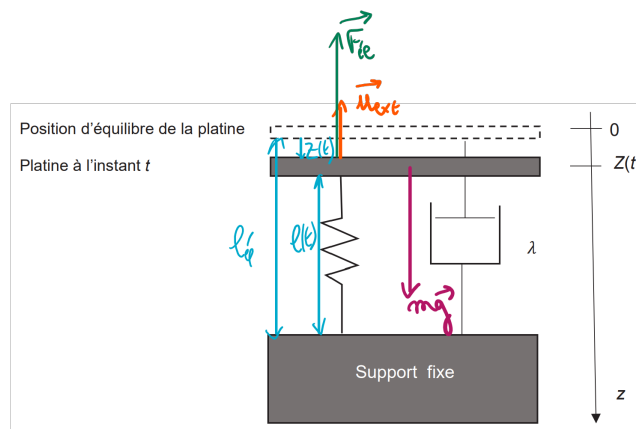


FIGURE 2 – Modélisation du disdromètre à impact à platine

R5. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte. Vérifier la cohérence physique en comparant ℓ_{eq} à ℓ_0 .

Solution: Système : Platine, de masse m

Référentiel : lié au support, supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids $M\vec{g}$
- force de rappel élastique $\vec{f}_{\text{el}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$, avec $\vec{u}_{\text{ext}} = -\vec{e}_z$ (Δ)
- force exercée par la goutte sur la platine $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_z$
- force de frottement $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$

À l'équilibre, sans impact de goutte :

$$\begin{aligned} M\vec{g} + \vec{f}_{\text{el}} &= \vec{0} \\ Mg\vec{e}_z + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_z &= \vec{0} \\ Mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) &= 0 \end{aligned}$$

Soit $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k} < \ell_0$, la platine comprime le ressort par rapport à la situation de repos.

R6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β (on vérifiera bien qu'ils sont tous les deux positifs !) en fonction de k , M et λ .

Solution: Principe fondamental de la dynamique à la platine :

$$\begin{aligned} M\vec{a} &= M\vec{g} + \vec{f}_{el} + \vec{F}(t) + \vec{f} \\ M \frac{d^2Z}{dt^2} \vec{e}_z &= Mg\vec{e}_z + k(\ell(t) - \ell_0)\vec{e}_z + F(t)\vec{e}_z - \lambda \frac{dZ}{dt} \vec{e}_z \\ M \frac{d^2Z}{dt^2} &= Mg + k(\ell_{eq} - Z(t) - \ell_0) + F(t) - \lambda \frac{dZ}{dt} \\ M \frac{d^2Z}{dt^2} + kZ(t) + \lambda \frac{dZ}{dt} &= \underbrace{Mg + k(\ell_{eq} - \ell_0)}_{=0} + F(t) \\ M \frac{d^2Z}{dt^2} + \lambda \frac{dZ}{dt} + kZ(t) &= F(t) \\ \frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M} \frac{dZ}{dt} + \frac{k}{M} Z(t) &= \frac{F(t)}{M} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} + \gamma \frac{dZ}{dt} + \beta Z(t) &= \frac{F(t)}{M} \end{aligned}$$

On identifie : $\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{M}}$ et $\boxed{\beta = \frac{k}{M}}$

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D) \frac{v_{lim}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

R7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{lim}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{lim}(D)}.$$

Calculer τ pour $D = 2,5$ mm.

Solution: τ est la durée de l'impact de la goutte, puisque c'est la durée pendant laquelle la force F exercée par la goutte sur la platine n'est pas nulle.

La goutte a un diamètre de D , et atteint la platine avec la vitesse v_{lim} , constante. Par conséquent elle met environ $\tau(D) \approx \frac{D}{v_{lim}(D)}$ pour parcourir sa propre distance entre le début de l'impact et la fin (quand elle s'est totalement étalée).

A.N. : $\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{lim}(D)} = \xi \frac{D}{K\sqrt{D}} = \frac{\xi\sqrt{D}}{K} = 2,17 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

R8. Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

Solution: Le régime transitoire le plus court est celui pour lequel le facteur de qualité vaut $1/2$, ou autrement dit pour lequel le discriminant du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène est nul.

$$\Delta = \gamma^2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma^2 = 4\beta}$$

On se place dans ce cas.

R9. Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \left(1 + \gamma \frac{t}{2} \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \right]$$

Solution: La racine double du polynôme caractéristique s'écrit $-\frac{\gamma}{2}$

1. Solution homogène : $Z_H(t) = (At + B)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$
2. Solution particulière, recherchée comme une constante car durant l'impact on suppose F constante égale à F_0 : $Z_P = \frac{F_0}{M\beta}$

3. Solution générale : $Z(t) = (At + B)e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{F_0}{M\beta}$

4. À t_0 , la platine est à l'équilibre, donc $Z(0) = 0$ et $\dot{Z}(0) = 0$, ainsi : $Z(0) = B + \frac{F_0}{M\beta} = 0$

$$\text{et } \dot{Z}(0) = -\frac{\gamma}{2}B + A = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Z(t) &= \left(-\frac{F_0}{M\beta} \frac{\gamma}{2}t - \frac{F_0}{M\beta} \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} + \frac{F_0}{M\beta} \\ &= \frac{F_0}{M\beta} \left(1 - \left(\frac{\gamma}{2}t + 1 \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \right) \\ &= \frac{F_0}{k} \left(1 - \left(\frac{\gamma}{2}t + 1 \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \right) \end{aligned}$$

R10. Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α .

Solution: Pour que $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$, il faut que le régime transitoire soit terminé, il faut donc que $\boxed{\frac{\gamma\tau}{2} > 5}$ (environ).

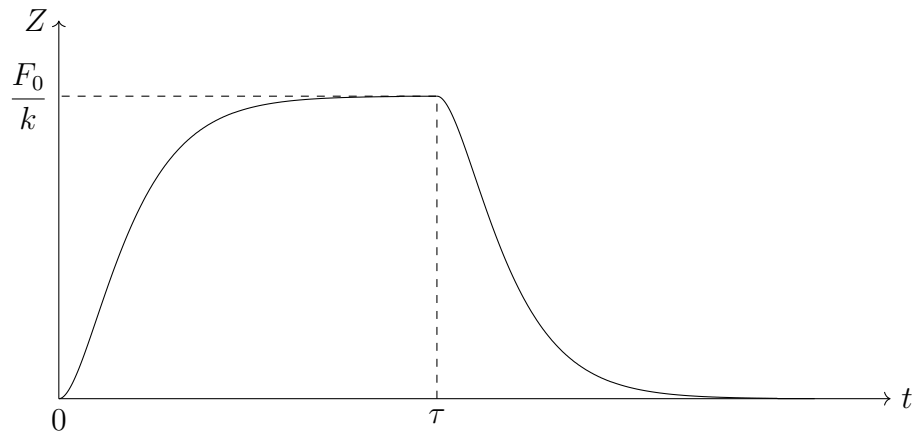
$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \frac{F_0}{k} \\ &= m(D) \frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)k} \\ &= \rho \frac{\pi}{6} D^3 \times \frac{K\sqrt{D}}{k \frac{\xi\sqrt{D}}{K}} \\ &= \rho \frac{\pi K^2}{6k\xi} D^3 \end{aligned}$$

qui est proportionnelle à D^3 , soit $\boxed{\alpha = 3}$

R11. Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

Solution: Jusqu'à τ , l'évolution de Z est celle établie précédemment, avec atteinte du régime permanent avant τ .

Au-delà de τ , la force F ne s'exerce plus et l'évolution de $Z(t) = \frac{F_0}{k}(1 + \gamma t/2)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$



R12. Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Solution: $Z(\tau) = \rho \frac{\pi K^2}{6k\xi} D^3$, qui est proportionnelle à D^3 , et la constante de proportionnalité est indépendante de la taille de la goutte, une fois les paramètres y intervenant connus, on peut avoir une relation entre D et Z , et la mesure de Z permet de remonter à la valeur de D .

Exercice n°3 Parc d'attraction (Durée ~ 1h45)

Partie I Étude d'un toboggan rectiligne (D'après EPITA 2023)

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 3. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

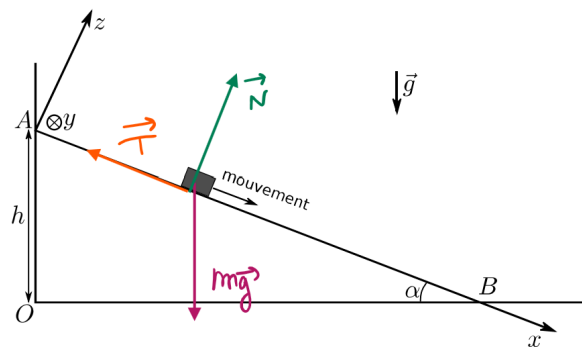


FIGURE 3 – Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

R1. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

Solution: Système : Passager, de masse m

Référentiel : terrestre galiléen à l'échelle du mouvement

Bilan des actions mécaniques :

- poids, force conservative
- réaction normale du support (frottements négligés), qui ne travaille pas

D'après le théorème de l'énergie mécanique entre A et B : $\Delta_{A \rightarrow B} \mathcal{E}_m = W(\vec{R}_N) = 0$

Ainsi $\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B)$, soit $0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$, donc $v_B = \sqrt{2gh}$

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92 \text{ km/h}$.

R2. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

Solution: La forme du toboggan ne modifie pas v_B , à h constant.

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 3 (droite), avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement. La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit : $\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x$, où $T > 0$ représente les frottements.

On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement.

On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

R3. À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

Solution: Poids : $m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

D'après le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$

Selon $\vec{e}_y$: $0 = -mg \cos(\alpha) + N$, donc $N = mg \cos(\alpha)$

Travail de la force $\vec{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{AB}(\vec{R}) &= \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{OM} \\ &= \int_A^B (N\vec{e}_z - T\vec{e}_x) \cdot dx\vec{u}_x \\ &= \int_{x_A}^{x_B} -T dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} -\mu mg \cos(\alpha) dx \\ &= -\mu mg \cos(\alpha)(x_B - x_A) \\ &= -\mu mg \cos(\alpha) AB \\ &= -\mu mg \cos(\alpha) \times \frac{h}{\sin(\alpha)} \\ &= -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_{AB}(\vec{R}) = -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)}$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique entre A et B :

$$\begin{aligned}\Delta_{AB}\mathcal{E}_m &= \mathcal{W}_{AB}(\overrightarrow{F^{NC}}) \\ \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) &= \mathcal{W}_{AB}(\overrightarrow{R}) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 - 0 - mgh &= -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)} \\ \frac{1}{2}v_B^2 &= gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\alpha)}\right)\end{aligned}$$

Soit
$$v_B = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\alpha)}\right)}$$

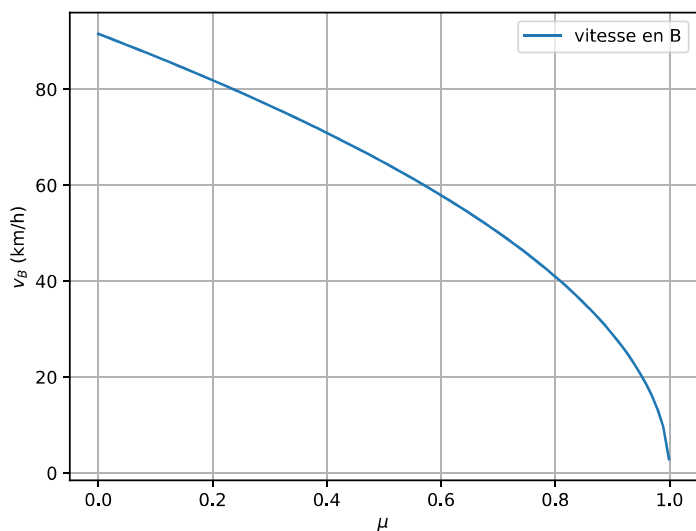


FIGURE 4 – Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

R4. La figure 4 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

Solution: La vitesse est maximale en B , donc $v_B = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, par lecture graphique, on lit $\mu = 0,22$

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

R5. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

Solution: On note C le point d'arrêt du passager, avec $L = BC$

D'après le théorème de l'énergie mécanique entre B et C :

$$\begin{aligned}\Delta_{BC}\mathcal{E}_m &= \mathcal{W}_{BC}(\overrightarrow{F^{NC}}) \\ \mathcal{E}_m(C) - \mathcal{E}_m(B) &= \mathcal{W}_{BC}(\overrightarrow{R}) \\ \text{avec } \mathcal{W}_{BC}(\overrightarrow{R}) &= \int_B^C (N\vec{e}_z - T\vec{e}_x) \cdot dx\vec{e}_x \\ &= \int_{x_B}^{x_C} -\mu mg dx \\ &= -\mu mgL \\ \text{Ainsi } \mathcal{E}_m(C) - \mathcal{E}_m(B) &= -\mu mgL \\ 0 + 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 &= -\mu mgL \\ \frac{1}{2}v_B^2 &= \mu gL\end{aligned}$$

soit $L = \frac{v_B^2}{2\mu g} = 12,5 \text{ m}$

Partie II Étude d'un virage (Durée ~ 40 min)

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

Partie II.1 Préliminaire : Étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste. On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 5. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 5, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

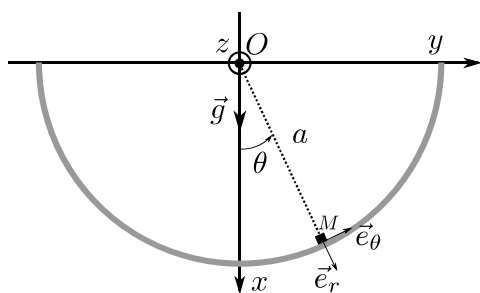


FIGURE 5 – Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

R6. En utilisant un théorème énergétique approprié, montrer que θ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin(\theta) = 0$$

Solution: Système : $M(m)$

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des actions mécaniques :

- poids $m\vec{g}$, conservative, d'énergie potentielle associée $\mathcal{E}_{pp} = -mgx = -mga \cos(\theta)$
- Réaction normale $\vec{N} = -N\vec{e}_r$, ne travaille pas

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{pp} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - mga \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 - mga \cos(\theta)\end{aligned}$$

D'après le théorème de la puissance mécanique :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= \mathcal{P}(\overrightarrow{F^{NC}}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 - mga \cos(\theta) \right) &= 0 \\ ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\dot{\theta} \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

D'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin(\theta) = 0$

R7. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.

Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Solution: Pour $\theta \ll 1$ rad : $\sin(\theta) \sim \theta$

On obtient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$ qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Solution générale : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Or $\theta(0) = A = \theta_0$, et $\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$

Ainsi $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

R8. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

Solution:

R9. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

Solution: Période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

Partie II.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté figure 6. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy , qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le référentiel lié au plan Oxy (figure 6, droite), en mouvement dans le référentiel terrestre.
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe n'est pas galiléen. L'étude peut être menée dans ce référentiel en ajoutant au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire qui s'écrit $\vec{F}_{ie} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$, appelée force d'inertie d'entraînement.
- On néglige tout frottement dans cette partie.

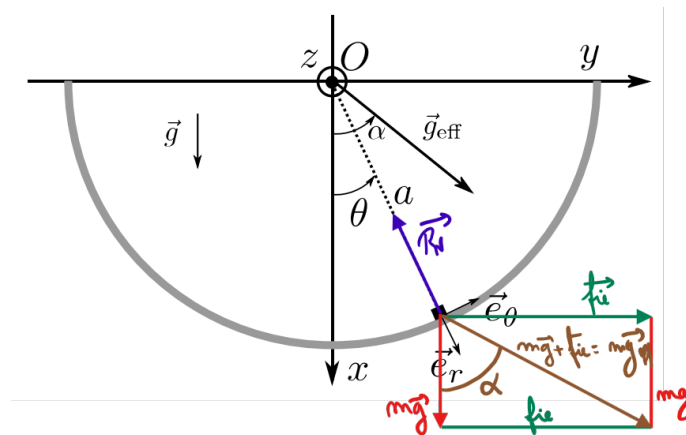


FIGURE 6 – Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

R10. Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m \vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .

Solution: En considérant le passager :

$$\begin{aligned}
 \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} &= m \vec{g} + \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y + \vec{N} \\
 &= m \left(\vec{g} + \frac{v_0^2}{R_0} \vec{e}_y \right) + \vec{N} \\
 \vec{g}_{\text{eff}} &= \vec{g} + \frac{v_0^2}{R_0} \vec{e}_y \\
 \vec{g}_{\text{eff}} &= g \vec{e}_x + \frac{v_0^2}{R_0} \vec{e}_y \\
 g_{\text{eff}} &= \sqrt{g^2 + \frac{v_0^4}{R_0^2}}
 \end{aligned}$$

R11. Donner également l'expression de l'angle α entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe Ox , en fonction de g , R_0 et v_0 .

Solution: Par somme vectorielle et trigonométrie :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{F_{ie}}{mg} \\ &= \frac{v_0^2}{R_0 g} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{v_0^2}{R_0 g}\right)\end{aligned}$$

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

R12. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$.

En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la **Partie II.1**, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.

Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

Solution: Il s'agit de la même situation qu'en 5, sauf que la pesanteur est inclinée. On peut faire tourner la figure pour ramener cette pesanteur verticale. Le mouvement se déroule alors entre des angles $-\alpha$ et $+\alpha$ de part et d'autre du vecteur $\vec{g}_{\text{eff}}$.

Ainsi θ varie entre 0 et 2α . Donc ici entre 0 et 102° . La gouttière doit donc monter au moins jusqu'à 102° .

Partie III Toboggan hélicoïdal (D'après Banque PT 2022)

On étudie le toboggan représenté sur la figure ci-dessous :

FIGURE 7 – Toboggan hélicoïdal

Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

- L'enfant de masse $m = 50 \text{ kg}$, est assimilé à un point matériel M .
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5 \text{ m}$.
- **On néglige tout frottement.**
- À chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h .

Le point M , initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi vertical descendant.

L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

Solution: Système : l'enfant $M(m)$

Référentiel : terrestre considéré galiléen

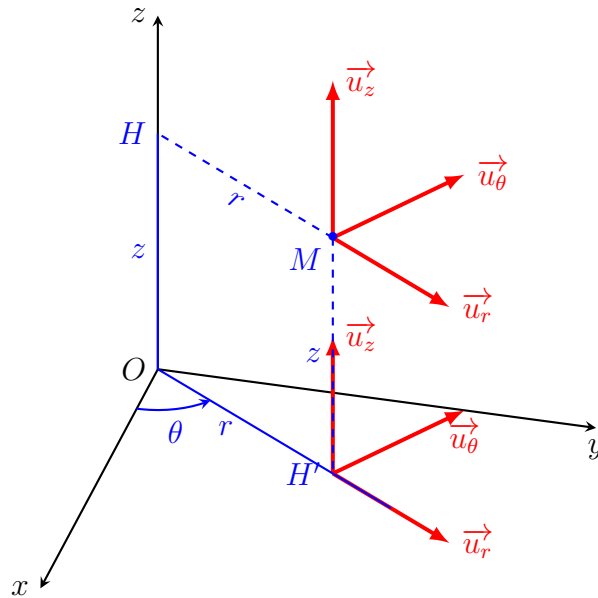
Bilan des actions mécaniques :

- poids, force conservative d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{pp} = -mgz$
- réaction normale du support, qui ne travaille pas (aucun frottement).

R13. Quelles sont les coordonnées cylindriques d'un point M ?

Faire un schéma définissant les coordonnées cylindriques, et indiquer dessus la base cylindrique.

Solution:



Les équations de la trajectoire sont données par les relations : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma \cdot \theta$ où γ est une constante positive.

R14. Exprimer h en fonction de γ .

Solution: En un tour, z augmente de h et θ augmente de 2π , donc $h = 2\pi \times \gamma$, donc $\gamma = \frac{h}{2\pi}$

R15. Déterminer la vitesse v_s de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de g et h .

Solution: D'après le théorème de l'énergie mécanique entre A et B :

$$\begin{aligned}\Delta_{A \rightarrow B} E_m &= W_{AB}(\overrightarrow{F_{NC}}) \\ \Delta_{A \rightarrow B} E_c + \Delta_{A \rightarrow B} E_{pp} &= 0 \\ \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 - m g (3h) - (-0) &= 0 \\ \frac{1}{2} m v_s^2 - 0 &= 3mgh - (-0) \\ v_s^2 &= 6gh\end{aligned}$$

Ainsi $v_s = \sqrt{6gh}$

R16. Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse du point M en fonction de R , z et de leurs dérivées temporelles $\dot{\theta}$, $\dot{z}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\text{Vecteur position : } \overrightarrow{OM} &= R \overrightarrow{u_r} + z \overrightarrow{u_z} \\ \text{Vecteur vitesse : } \overrightarrow{v(M)} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= R \dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta} + \dot{z} \overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

R17. Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}\alpha\dot{z}^2 - \beta z$, où α et β sont des constantes à expliciter en fonction des données.

Solution: Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \\ &= \frac{1}{2}m\left(R^2\left(\frac{\dot{z}}{\gamma}\right)^2 + \dot{z}^2\right) - mgz \\ &= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{R}{\gamma}\right)^2 + 1\right)\dot{z}^2 - mgz \\ &= \frac{1}{2}\alpha\dot{z}^2 - \beta z \end{aligned}$$

On identifie $\alpha = m\left(\left(\frac{R}{\gamma}\right)^2 + 1\right)$ et $\beta = mg$.

R18. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ et en déduire la durée T de la descente en fonction de α , β et h .

Solution: D'après le théorème de la puissance mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{NC}}) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\alpha\dot{z}^2 - \beta z\right) &= 0 \\ \alpha\ddot{z}\dot{z} - \beta\dot{z} &= 0 \\ \ddot{z} &= \frac{\beta}{\alpha} \\ \text{Par intégration : } \dot{z}(t) &= \frac{\beta}{\alpha}t + 0 \\ \text{Par intégration : } z(t) &= \frac{\beta}{2\alpha}t^2 + 0 \end{aligned}$$

La durée T de la descente est telle que :

$$\begin{aligned} z(T) &= 3h \\ \frac{\beta}{2\alpha}T^2 &= 3h \\ T^2 &= \frac{6\alpha h}{\beta} \end{aligned}$$

D'où $T = \sqrt{\frac{6\alpha h}{\beta}}$

R19. Si on prend en compte une force de frottement de norme constante F , exprimer l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de F , R et γ .

Solution: La force de frottement est tangente au mouvement, et de sens opposé, elle est donc colinéaire à $\vec{v}$ et de sens opposé.

$$\begin{aligned}
 \text{Puissance } \mathcal{P}(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 &= -Fv \\
 &= -F\sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \\
 &= -F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}\dot{z} \\
 &= -F\frac{\alpha}{m} \times \frac{\beta}{\alpha}t \\
 &= -F\frac{\beta}{m}t \\
 \text{Travail } W(\vec{F}) &= \int_0^T \mathcal{P}(\vec{F})dt \\
 W(\vec{F}) &= \int_0^T -F\frac{\beta}{m}tdt \\
 &= -F\frac{\beta}{m}\frac{T^2}{2} \\
 &= -F\frac{\beta}{2m} \times \frac{6\alpha h}{\beta} \\
 &= -F\frac{g}{2} \times \frac{6m\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right)h}{mg} \\
 &= -3F\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right)h \\
 &= -3F\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right) \times 2\pi\gamma \\
 &= -6F\pi\sqrt{R^2 + \gamma^2}
 \end{aligned}$$

L'énergie perdue est donc de $6F\pi\sqrt{R^2 + \gamma^2}$.

Exercice n°4 Interaction entre des atomes de Néon (*Durée ~ 45 min*)

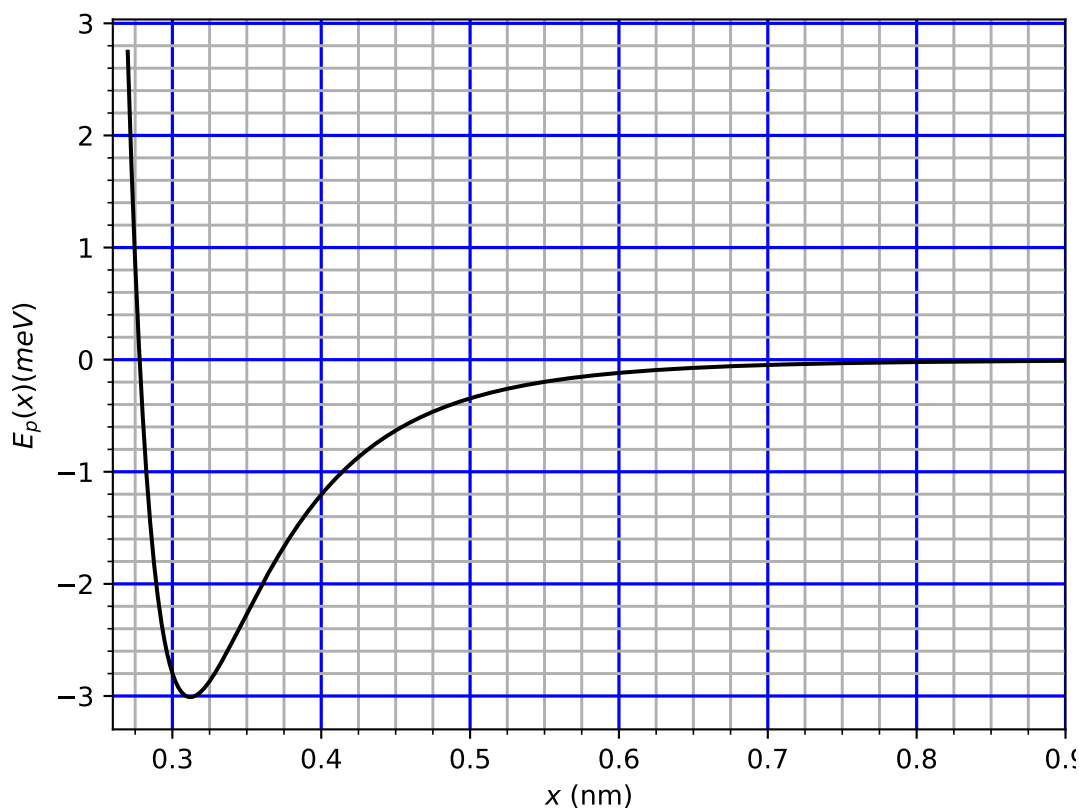
On considère un atome de Néon de masse m interagissant avec un autre atome de Néon supposé fixe dans un référentiel galiléen. Le problème est vu de façon unidimensionnelle selon x , l'atome fixe étant situé en l'origine O .

L'énergie potentielle correspondant à la force d'interaction $\vec{F}$ qui s'exerce entre les deux atomes est modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$\mathcal{E}_P(x) = 4\mathcal{E}_0 \left[\left(\frac{d}{x}\right)^{12} - \left(\frac{d}{x}\right)^6 \right]$$

où x désigne la distance intermoléculaire et σ est une distance caractéristique. L'énergie potentielle est prise nulle lorsque $x \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque les deux atomes sont infiniment éloignés.

On donne le graphe représentatif de $\mathcal{E}_p(x)$.



R1. Discuter les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $\mathcal{E}_p(x)$ selon si l'énergie mécanique de l'atome de néon est positive ou négative. *La réponse doit être justifiée. Le graphe du document réponse devra être complété et rendu avec votre copie.*

Solution: Système : atome de Néon de masse m

Référentiel : terrestre galiléen à l'échelle de l'expérience.

Bilan des forces : une seule, dérivant de $\mathcal{E}_p$, donc conservative.

L'énergie mécanique de l'atome de Néon se conserve.

Par définition : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \geq \mathcal{E}_p$, donc les seules positions accessibles à l'atome, sont celles pour lesquelles $\mathcal{E}_m$ est supérieure à $\mathcal{E}_p$.

Considérons deux cas de figure :

- Si $\mathcal{E}_m > 0$, alors les positions accessibles ne sont pas bornées, et l'atome de néon peut partir à l'infini.
- Si $\mathcal{E}_m < 0$, alors les positions accessibles sont bornées, et l'atome de néon reste à proximité de l'autre atome, et aura un mouvement d'oscillations périodiques.

R2. Établir l'expression de la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux, en fonction de d . Est-elle une position stable ? Que représente la quantité $\mathcal{E}_0$?

Solution: En une position d'équilibre, l'énergie potentielle présente un extrémum local, donc sa dérivée

s'annule.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} &= 4\mathcal{E}_0 \left[-12\frac{d^{12}}{x^{13}} + 6\frac{d^6}{x^7} \right] \\ x_0 \text{ telle que } \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_0) &= 0 \\ 4\mathcal{E}_0 \left[-12\frac{d^{12}}{x_0^{13}} + 6\frac{d^6}{x_0^7} \right] &= 0 \\ -2\frac{d^{12}}{x_0^{13}} + \frac{d^6}{x_0^7} &= 0 \\ x_0^6 &= 2d^6\end{aligned}$$

Soit $x_0 = 2^{1/6}d$

$\mathcal{E}_p$ est minimale en x_0 , donc l'équilibre est stable.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(x_0) &= 4\mathcal{E}_0 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\mathcal{E}_0\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_0$ est donc la profondeur du puits de potentiel.

R3. En exploitant le graphe et la question précédente, déterminer les valeurs de d et $\mathcal{E}_0$.

Solution: L'équilibre a lieu en $x_0 = 0,32 \text{ nm} = 2^{1/6}d$, soit $d = 2^{-1/6}x_0 \approx 0,9 \times 0,320,29 \text{ nm}$
 $\mathcal{E}_0 = -3 \text{ meV} = 4,8 \cdot 10^{-22} \text{ J}$

R4. Déterminer l'expression de la force d'interaction entre les deux atomes $\vec{F} = F_x(x)\vec{u}_x$.

Solution:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) \\ &= -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\vec{u}_x \\ &= -\frac{24}{d} \left(-2\left(\frac{d}{x}\right)^{13} + \left(\frac{d}{x}\right)^7 \right) \vec{u}_x\end{aligned}$$

R5. Montrer que, au voisinage de la position d'équilibre, $F_x(x)$ peut se mettre sous la forme $F(x_0 + \varepsilon) = -k\varepsilon$ avec k une constante et $\varepsilon \ll x_0$.

On mettra k sous la forme $k = \frac{\tilde{k}}{x_0^2}$ où $\tilde{k}$ sera exprimé en fonction de E_0 .

Solution:

$$\begin{aligned}
 F_x(x) &= -24\mathcal{E}_0 \left(-2\frac{d^{12}}{x^{13}} + \frac{d^6}{x^7} \right) \\
 F_x(x_0 + \varepsilon) &= F_x(x_0) + \frac{dF_x}{dx}(x = x_0) \times (x - x_0) \\
 &= 0 - 24\mathcal{E}_0 \left(-2 \times (-13) \frac{d^{12}}{x_0^{14}} - 7 \frac{d^6}{x_0^8} \right) \varepsilon \\
 &= -24 \left(26 \frac{d^{12}}{x_0^{14}} - 7 \frac{d^6}{x_0^8} \right) \varepsilon \\
 &= -\frac{24}{x_0^2} \mathcal{E}_0 \left(26 \frac{d^{12}}{x_0^{12}} - 7 \frac{d^6}{x_0^6} \right) \varepsilon \\
 &= -\frac{24}{x_0^2} \mathcal{E}_0 \left(\frac{26}{4} - \frac{7}{2} \right) \varepsilon \\
 &= -\frac{24}{x_0^2} \mathcal{E}_0 \left(\frac{13}{2} - \frac{7}{2} \right) \varepsilon \\
 &= -\frac{72}{x_0^2} \mathcal{E}_0 \varepsilon \\
 &= -k\varepsilon
 \end{aligned}$$

Par identification : $k = \frac{72}{x_0^2} \mathcal{E}_0$, avec $\tilde{k} = 36\mathcal{E}_0$

R6. Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable. Commenter.

Solution: D'après le principe fondamental dynamique :

$$\begin{aligned}
 m \vec{a} &= \vec{F} \\
 m\ddot{x} &= -k\varepsilon \\
 \ddot{x} + \frac{k}{m}\varepsilon &= 0 \\
 \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon &= 0
 \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

R7. Exprimer alors la période T_0 des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre, en fonction de m , d et $\mathcal{E}_0$.

Solution: Période propre :

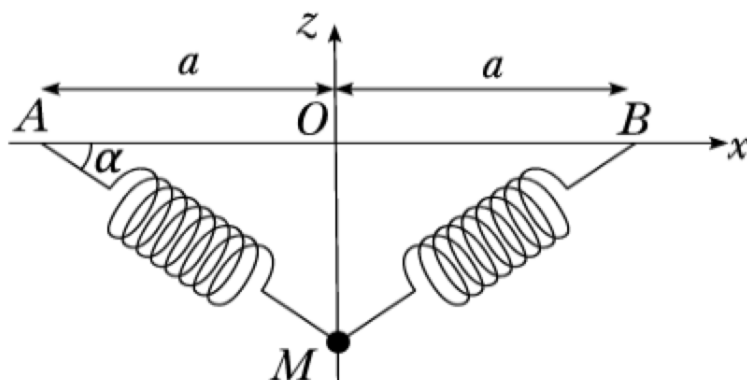
$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{mx_0^2}{72\mathcal{E}_0}} \\ &= \frac{\pi x_0}{3} \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}_0}} \\ &= \frac{\pi d 2^{1/6}}{3} \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}_0}} \\ &= \frac{\pi d}{3 \times 2^{-1/3}} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{E}_0}} \end{aligned}$$

Exercice n°5 Deux résolutions de problème pour vous occuper

Cet exercice ne doit être abordé que si TOUT LE RESTE du sujet a été fait.

Partie I Saut à ski à l'élastique

Une nouvelle discipline est apparue récemment : le saut à ski à l'élastique. On s'intéresse à un skieur attaché à deux élastiques réalisant un saut dans le vide. Les élastiques seront modélisés par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide négligeable dont les points d'attache A et B sont distants de $2a$ et le skieur sera modélisé par un point matériel de masse m .



Déterminer la (les) position(s) d'équilibre z_{eq} du skieur et étudier sa (leur) stabilité.

Partie II Looping

Une petite bille est posée à une hauteur h du sol sur une rampe de lancement inclinée qui débouche sur un looping (guide circulaire dans le plan vertical).

Déterminer la hauteur minimale à laquelle il faut placer la petite bille pour qu'elle puisse effectuer un tour complet de looping sans décoller du guide circulaire.