

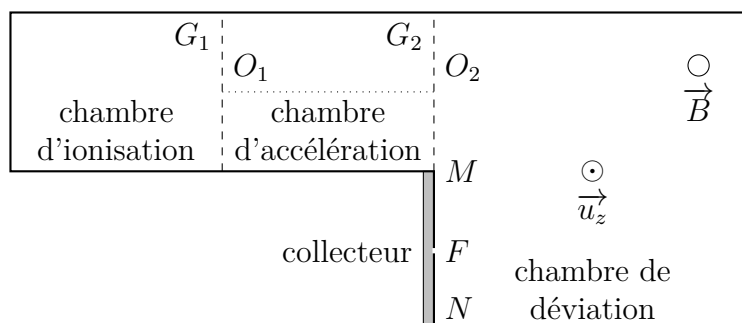
? Lundi 9 mars 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°8 (1) – Corrigé

Exercice n°1 Séparation des isotopes par spectrométrie de masse (D'après Centrale-Supélec TSI 2012)

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en ^{235}U de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application souhaitée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique.

Un spectrographe de masse se compose de quatre parties :

- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$ et $^{238}_{92}\text{U}$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions U^+ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse des ions est quasi nulle.
- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 .
- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de direction perpendiculaire au plan de la figure.
- Un collecteur d'ions est disposé entre M et N . Une fente centrée sur O_2 de largeur L dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur F est placée entre M et N et a pour largeur L' dans le plan de la figure.



Les chambres sont sous vide, ce qui permet de considérer que les particules n'interagissent pas entre elles. On négligera le poids des ions devant la force électromagnétique et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vitesses des ions sont contenues dans le plan de la figure.

Partie I Préliminaires

R1. Donner l'expression de la force de Lorentz. Préciser les noms et unités des différentes grandeurs.

Solution: Une particule chargée de charge électrique q soumise à un champ électrique $\vec{E}$ et à un champ magnétique $\vec{B}$ subit une action mécanique, modélisée par la force de Lorentz :

$$\vec{f}_L = q \left(\vec{E} + \vec{v} (M/\mathcal{R}) \wedge \vec{B} \right)$$

avec

- la charge q en Coulomb (C) ;
- le champ électrique E en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- le champ magnétique B en tesla (T)

R2. Exprimer et calculer la masse d'un atome $^{235}_{92}\text{U}$ et d'un atome $^{238}_{92}\text{U}$.

Solution:

$$m_{235} = \frac{M_{235}}{N_A} = 3,902 \times 10^{-22} \text{ g} = 3,902 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

$$m_{238} = \frac{M_{238}}{N_A} = 3,9529 \times 10^{-22} \text{ g} = 3,9529 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

R3. Justifier que le poids des atomes d'uranium est bien négligeable devant la force de Lorentz électrique et magnétique (on proposera des valeurs raisonnables des champs électrique, magnétique et de la vitesse de la particule chargée).

Solution:



Remarque –

On raisonne en ORDRE DE GRANDEUR.

Masses en KILOGRAMME!!!!

Étudier chaque force séparément.

Poids : $mg = 10^{-24} \text{ N}$

Force de Lorentz électrique : $f_E = eE$, avec $E \approx 1 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$, soit $f_E \approx 10^{-16} \text{ N}$

Soit $f_E \gg mg$

Force de Lorentz magnétique : $f_B = qvB$, avec $B \approx 1 \text{ T}$ et $v \approx 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $f_B \approx 10^{-13} \text{ N}$

Soit $f_B \gg mg$

Le poids est donc négligeable devant la force électrique et la force magnétique

Partie II Accélération des ions

R4. **Établir** l'expression de l'augmentation de l'énergie cinétique des ions U^+ entre O_1 et O_2 . On l'exprimera en fonction de la différence de potentiel $V_{G1} - V_{G2}$.

Quel doit être le signe de la différence de potentiel $V_{G1} - V_{G2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ?

Solution:



Remarque –

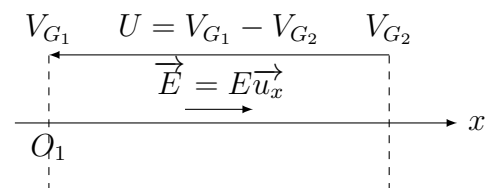
La définition du SYSTÈME, du RÉFÉRENTIEL et du BILAN DES FORCES est un pré-requis à TOUTE QUESTION DE MÉCANIQUE AVANT l'application du premier théorème.

Système : noyau d'uranium de masse m_{235} (resp. m_{238})

Référentiel : lié au laboratoire, supposé galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces : force électrique $\vec{f}_E = q\vec{E}$, conservative.

Théorème de l'énergie mécanique entre G_1 et G_2 : **Le TEM c'est LA VIE!!!!!! PAS de TEC ici!**



vous effectuez un calcul de travail, long, laborieux et FAUX (la plupart du temps !)

$$\begin{aligned}\Delta_{G_1 \rightarrow G_2} \mathcal{E}_m &= W_{G_1 \rightarrow G_2}(\vec{f}^{nc}) \\ \mathcal{E}_c(G_2) - \mathcal{E}_c(G_1) + \mathcal{E}_{pe}(G_2) - \mathcal{E}_{pe}(G_1) &= 0 \\ \Delta_{G_1 \rightarrow G_2} \mathcal{E}_c + qV_{G_2} - qV_{G_1} &= 0 \\ \Delta_{G_1 \rightarrow G_2} \mathcal{E}_c &= q(V_{G_1} - V_{G_2})\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta_{G_1 \rightarrow G_2} \mathcal{E}_c = qU$ On demandait bien la variation de l'énergie cinétique.

L'ion d'uranium est accéléré si son énergie cinétique augmente.

Pour cela, il faut que qU soit positif, comme q est positive (cation chargé positivement), on en déduit que $U = V_{G_1} - V_{G_2}$ doit être positive.

- R5. **Établir** les expressions des vitesses v_{235} et v_{238} respectivement des ions ${}_{92}^{235}\text{U}^+$ et ${}_{92}^{238}\text{U}^+$ lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_{235} , m_{238} et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.

Solution: Sachant que la vitesse est nulle en G_1 : $\frac{1}{2}mv^2 - 0 = qU$.

Ainsi $v_{235} = \sqrt{\frac{2qU}{m_{235}}}$ et $v_{238} = \sqrt{\frac{2qU}{m_{238}}}$

- R6. L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de 15,0 keV. En déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles.

Déterminer numériquement les vitesses v_{235} et v_{238} .

Solution:

L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est égale à $\mathcal{E}_c(O_2) = qU$, ainsi $U = \frac{\mathcal{E}_c(O_2)}{q} = 15,0 \times 10^3 \text{ V}$

A.N : $v_{235} = 1,109 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{238} = 1,102 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Les données ont beaucoup de chiffres significatifs, il faut faire les AN avec le même nombre de chiffres significatifs.

Partie III Déviation des ions

- R7. **Représenter l'allure** de la trajectoire de la particule chargée entre O_2 et F . Comment doit-être dirigée la force magnétique pour que ce soit le cas ?

En déduire le sens du champ magnétique $\vec{B}$ régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur.

Solution:



Remarque —

Une réponse détaillée était attendue, en s'appuyant sur un schéma : cf cours !

Répondre « d'après la règle de la main droite, $\vec{B}$ est selon ... » ne JUSTIFIE RIEN !! Avec quoi faites-vous la règle de la main droite ? Quel est le rapport avec $\vec{B}$?

Perpendiculaire à la feuille donne la direction mais rien sur le sens.

BILAN DES FORCES à faire ! il a changé.

La particule chargée est maintenant soumise à la force de Lorentz magnétique $\vec{f}_B = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

Pour que la particule atteigne le collecteur elle doit suivre la trajectoire circulaire représentée ci-contre.

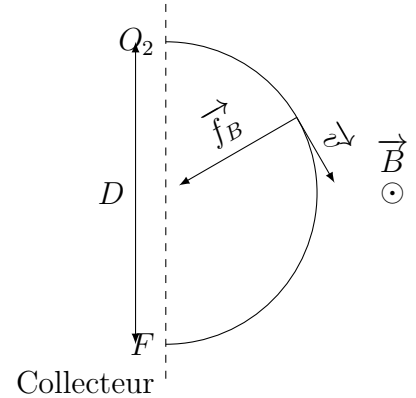
Le PFD donne $m \vec{a} = \vec{f}_B$, avec $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$

Soit $-m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

Donc la force $\vec{f}_B$ est radiale et dirigée vers le centre du cercle.

De plus elle est dans le même sens que le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ puisque q est positive.

D'après la règle de la main droite, on en déduit que $\vec{B}$ doit venir vers nous.



R8. **Montrer** que le mouvement dans le champ magnétique est uniforme.

Solution:



Remarque –

$\vec{E}$ est totalement absent de cette zone, il n'est bien question que du champ magnétique.

Appliquons le théorème de la puissance cinétique aux ions dans le référentiel terrestre considéré galiléen : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_B)$, avec $\mathcal{P}(\vec{f}_B) = (q \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\perp \vec{v}}) \cdot \vec{v} = 0$

Ainsi l'énergie cinétique des ions est constante, donc la norme du vecteur vitesse des ions est constante : le mouvement est uniforme.

R9. **Appliquer** le principe fondamental de la dynamique. Comment est le vecteur accélération par rapport à $\vec{B}$?

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique : $m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, or $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, donc $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.

R10. Projeter le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u}_z$. **En déduire** que le mouvement est plan.

Solution: Selon $\vec{u}_z$: $a_z = 0$, donc $v_z = K \in \mathbb{R}$, or à $t = 0$, $v_z(0) = 0$, donc $v_z(t) = 0$: il n'y a aucun mouvement selon l'axe (Oz) , le mouvement est donc plan.



Remarque –

ATTENTION, le fait que $a_z = 0$ ne permet pas de conclure que le mouvement est plan ! Il faut au moins obtenir v_z .

R11. **Exprimer** $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en utilisant la base de Frenet dans le plan du mouvement.

Solution: Sur un mouvement uniforme : $\vec{v} = v \vec{T}$ et $\vec{a} = \frac{v^2}{R(t)} \vec{N}$.

R12. En réutilisant le principe fondamental de la dynamique **montrer que** le mouvement est circulaire et **exprimer** le rayon R_{235} en fonction de m_{235} , e , U et $B = \|\vec{B}\|$. En déduire le rayon R_{238} de la trajectoire de ${}^{238}_{92}\text{U}^+$.

Solution: Le PFD s'écrit en norme : $m \frac{v^2}{R(t)} = q \|\vec{v} \wedge \vec{B}\|$, avec $\vec{v} \perp \vec{B}$, donc $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| = vB$

Soit $R(t) = \frac{mv}{eB}$ qui est constant, donc le mouvement est circulaire.

Ainsi $\boxed{R_{235} = \frac{m_{235}v_{235}}{eB}}$ et $\boxed{R_{238} = \frac{m_{238}v_{238}}{eB}}$

En injectant les expressions des vitesses établies précédemment, on en déduit :

$\boxed{R_{235} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_{235}U}{e}}}$ et $\boxed{R_{238} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_{238}U}{e}}}$

R13. Le collecteur consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' placée entre M et N qui permet de recueillir les isotopes 235.

Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le spectromètre sachant que la fente F est placée à $D = 940$ mm de O_2 ?

Solution: Afin de récupérer les ions ${}^{235}\text{U}^+$ au niveau de la fente, il faut que le diamètre de la trajectoire de ces ions soit égale à la distance $D = 940$ mm, soit $D = 2R_{235} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m_{235}U}{e}}$.

Pour cela, il faut que $\boxed{B = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2m_{235}U}{e}} = 0,575 \text{ T}}$

R14. Le faisceau d'ions émis en O_2 est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de $L' = 4,0$ mm dans le plan de la figure.

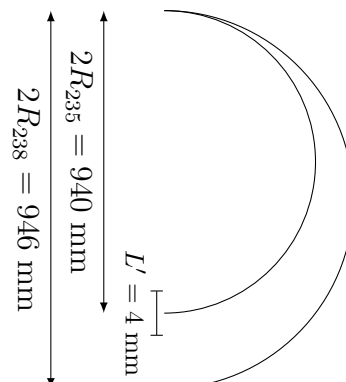
Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ? *Appuyez-vous sur un schéma pour visualiser ce qu'il se passe.*

Solution: SCHÉMA!!

Calculons le diamètre de la trajectoire des ions ${}^{238}\text{U}^+$ et déterminons si la différence entre ce diamètre et celui des ions ${}^{235}\text{U}^+$ est supérieure ou inférieure à L' .

$$2R_{238} = 2 \frac{m_{238}v_{238}}{qB} = 0,946 \text{ m} = 946 \text{ mm}$$

$$2R_{238} - 2R_{235} > L' \Leftrightarrow R_{238} > R_{235} + \frac{L'}{2}, \text{ donc les deux isotopes peuvent être séparés.}$$



Exercice n°2 Gaz parfait (Durée ~ 2h00)

- La partie I est indépendante des deux parties suivantes.
- La partie II est un ensemble de questions de cours dont les connaissances sont nécessaires pour la partie III.

Partie I Risque d'hypoxie (Durée ~ 15 min)

Cette partie est extrait d'un sujet portant sur l'exploration des très grandes profondeurs à l'aide de sous-marins autonomes et s'attache à discuter des contraintes de sécurité liées à ces expéditions.

La puissance électrique disponible assure, entre autres, le fonctionnement du système de contrôle de l'atmosphère de la capsule pendant plus de 50 heures. Ce système permet de maintenir une composition de l'air intérieur de l'habitacle correspondant à celle de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer.

On considère que, **lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume V_p d'air** dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que **seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons**.

R1. Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

Solution: L'air est composé de **80% de Dlazote et 20% de Dloxygène**

On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note n_i et P_{O_2i} respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la i -ème respiration après l'arrêt de ce système.

On suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait.

Dans l'habitacle, le nombre de moles de gaz total, la pression P_0 totale, la température T_0 et le volume V sont constants.

R2. **Exprimer** la quantité de matière d'oxygène n_i , présente dans la capsule en fonction de P_{O_2i} , V , R , T_0 , après la i^e inspiration.

Solution: Dans l'habitacle de volume V est présente la quantité de dioxygène suivante :
$$n_i = \frac{P_{O_2i}V}{RT_0}$$

R3. **Exprimer** la quantité de matière d'oxygène inspiré lors d'une inspiration $n_{O_2}^{\text{insp}}$ en fonction de P_{O_2i} , V_p , R , T_0 .

Solution: À chaque inspiration est inspiré un volume V_p d'air dans lequel la pression partielle en O_2 est P_{O_2i} , soit :
$$n_{O_2}^{\text{insp}} = \frac{P_{O_2i}V_p}{RT_0}$$

R4. **En déduire** une relation entre n_{i+1} , n_i et $n_{O_2}^{\text{insp}}$.

Solution:
Seul 1/4 de cet O_2 est réellement utilisé par les poumons, le reste est rejeté, donc
$$n_{i+1} = n_i - \frac{n_{O_2}^{\text{insp}}}{4}$$

R5. **En déduire** que $n_{i+1} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$

Solution: D'après les relations précédentes : $n_{O_2}^{\text{insp}} = n_i \times \frac{V_p}{V}$
soit
$$n_{i+1} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Partie II Questions de cours (Durée ~ 10 min)

R6. **Donner** les définitions (générales, pas spécifiquement pour le gaz parfait) de l'énergie interne et de l'enthalpie. **Donner** leurs unités.

Solution: L'énergie interne est la somme des énergies cinétiques d'agitation thermique à l'échelle microscopique, et des énergies potentielles d'interaction entre les particules.
L'enthalpie est définie par $H = U + PV$.
 H et U s'expriment en joule (J).

R7. **Donner** les expressions de la variation de l'énergie interne et de l'enthalpie de n moles d'un gaz parfait dont la température varie de T_1 à T_2 . Définir la grandeur introduite, et en donner son nom et son unité.

Solution: Pour un gaz parfait : $\Delta U = nC_{Vm}(T_2 - T_1)$ où C_{Vm} est la capacité thermique à volume constant molaire, qui s'exprime en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

R8. **Donner** l'expression générale du travail des forces de pression reçu par un système. Quelle pression intervient dedans ?

Puis en donner son expression dans le cas particulier d'une **transformation mécaniquement réversible** effectuée suffisamment lentement pour que l'équilibre mécanique ait lieu à chaque instant. Quelle pression intervient dedans ?

Solution: Expression générale du travail des forces de pression : $W_p = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} dV$, où la pression qui intervient est la pression extérieure au système.



Remarque –

Attention mécaniquement réversible impose qu'à chaque instant l'équilibre mécanique a lieu, c'est-à-dire $P_{\text{ext}} = P_{\Sigma}$, mais P_{ext} (et donc P_{Σ}) peut varier au cours de la transformation (cf quand on pose les grains de sable au fur et à mesure).

Expression du travail des forces de pression au cours d'une transformation mécaniquement réversible :
 $W_p = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\Sigma} dV$, où la pression qui intervient est la pression du système.

R9. **Énoncer** le premier principe pour une transformation quelconque d'un système macroscopiquement au repos.

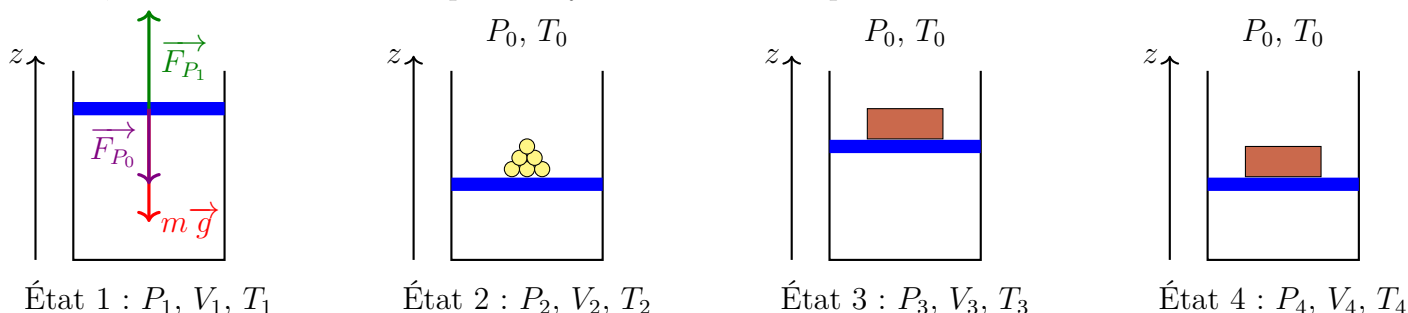
Solution: Pour un système fermé macroscopiquement au repos, le premier principe s'exprime selon $\Delta U = W + Q$, où W est la somme des travaux des forces non conservatives, et Q le transfert thermique reçus algébriquement par le système.

Partie III Transformations subies par un gaz parfait (Durée ~ 1h30)

On souhaite comprimer une quantité de n moles de gaz parfait monoatomique enfermées dans un cylindre vertical fermé par au-dessus par un piston mobile sans frottement. Le piston est de masse m , et de surface S . L'enceinte est diathermane.

L'air extérieur est à la pression P_0 constante et à la température T_0 constante.

On note V_1 , P_1 et T_1 les caractéristiques du système à l'état d'équilibre initial.



Partie III.1 Équilibre initial

R10. Que signifie le fait que l'enceinte est diathermane ? Que peut-on en déduire sur la température T_1 initiale dans l'enceinte ?

Solution: Une enceinte diathermane permet les transferts thermiques avec le milieu extérieur. À l'équilibre thermodynamique initial, $T_1 = T_0$.

R11. Par étude de l'équilibre du piston, **établir** l'expression de la pression P_1 dans l'enceinte en fonction de P_0 , m , g et S .

Solution:

Système : piston de masse m

référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces :

— poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

— force de pression exercée par le gaz intérieur $\vec{F}_{P_1} = P_1 S \vec{u}_z$

— force de pression exercée par l'air extérieur $\vec{F}_{P_0} = -P_0 S \vec{u}_z$

À l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_0} = \vec{0}$, soit $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$

R12. **En déduire** le volume V_1 .

Solution: D'après la loi des gaz parfaits : $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{mg}{S}}$

On souhaite diviser le volume de l'enceinte par trois en considérant deux façons de procéder.

Partie III.2 Avec des petits grains de sable

On pose très lentement un grain de sable par grain de sable sur le piston, jusqu'à en avoir posé une masse M telle que le volume soit $V_2 = \frac{V_1}{3}$. On note P_2 , V_2 et T_2 les grandeurs d'état à l'état final après l'ajout de ces grains de sable.

R13. Pourquoi peut-on considérer que la compression est isotherme ?

Solution: La compression est réalisée très lentement en contact avec l'atmosphère extérieure de température constante, l'équilibre mécanique et thermique ont le temps de se faire à chaque instant. La température finale vaut donc $T_2 = T_0$

R14. **Exprimer** la pression finale P_2 en fonction de P_1 uniquement.

Solution:



Remarque –

! S'il y a autre chose que P_1 , c'est que vous n'avez pas répondu à la question !

D'après la loi des gaz parfaits $P_1 V_1 = nRT_0$ et $P_2 V_2 = nRT_0$

Ainsi
$$P_2 = P_1 \times \frac{V_1}{V_2} = 3P_1$$

R15. **Établir** l'expression du travail W_{12} des forces de pression au cours de cette transformation en fonction de n , R et T_0 . Commenter le signe.

Solution:



Remarque –

! Revoir la rédaction propre d'un tel calcul !

Travail des forces de pression :

$$\begin{aligned} W_{p12} &= \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} dV \\ &\text{or la transformation est mécaniquement réversible, donc } P_{\text{ext}} = P \\ &= \int_{V_1}^{V_2} -P dV \\ &\stackrel{\text{loi des gaz parfaits}}{=} \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT_0}{V} dV \\ &\stackrel{nRT_0 \text{ cste}}{=} -nRT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= nRT_0 \ln(3) > 0 \end{aligned}$$

Le système reçoit réellement du travail.



Remarque –

! ATTENTION au sens algébrique de définition des travaux et des transferts thermiques. Un travail reçu algébriquement positif est réellement reçu.

R16. **En déduire** l'expression du transfert thermique Q_{12} en fonction de n , R et T_0 . Commenter le signe.

Solution: D'après le premier principe sur la transformation $1 \rightarrow 2$: $\Delta_{12}U = W_{12} + Q_{12}$

Or l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, qui ne varie pas ici, ainsi $\Delta_{12}U = 0$.

D'après le premier principe : $Q_{12} = -W_{p12} = -nRT_0 \ln(3) < 0$: le gaz libère réellement du transfert thermique au milieu extérieur ce qui lui permet de maintenir sa température constante malgré la compression.

Partie III.3 Avec un gros pavé

On souhaite obtenir le même volume final en plaçant un pavé de masse M brutalement. On observe que la transformation se produit en « deux temps » :

- Transformation $1 \rightarrow 3$: Le piston se stabilise très vite à un volume V_3 .
- Transformation $3 \rightarrow 4$: Les échanges thermiques ont lieu avec le milieu extérieur et le piston se déplace jusqu'à ce que le volume soit $V_4 = V_2$ et s'arrête.

Transformation $1 \rightarrow 3$:

R17. Pourquoi peut-on considérer la première transformation $1 \rightarrow 3$ comme étant adiabatique et monobare ?
Exprimer la pression P_{ext} exercée par l'extérieur en fonction de P_0 , m , M , g et S .

Solution: La transformation est brutale et les transferts thermiques n'ont pas le temps d'avoir lieu donc on peut la considérer comme adiabatique. La pression extérieure exercée sur le système est constante et vaut $P_{\text{ext}} = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}$.

R18. Exprimer la pression P_3 à la fin de cette première transformation.

Solution: À l'équilibre mécanique final, $P_3 = P_2 = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}$.

R19. Exprimer le travail des forces de pression W_{13} en fonction de P_3 , V_3 et V_1 .
Puis montrer que $W_{13} = nR(3T_1 - T_3)$.

Solution: Travail des forces de pression :

$$\begin{aligned} W_{p13} &= \int_{V_1}^{V_3} -P_{\text{ext}} dV \\ &= -P_{\text{ext}}(V_3 - V_1) \\ &= -P_3(V_3 - V_1) \\ &= -P_3V_3 + P_3V_1 \\ &= -nRT_3 + 3P_1V_1 \\ &= nR(3T_1 - T_3) \end{aligned}$$

R20. Exprimer la variation d'énergie interne en fonction de nR , T_3 et T_1 au cours de la transformation $1 \rightarrow 3$.

Solution: Pour un gaz parfait monoatomique : $\Delta_{13}U = nC_{Vm}(T_3 - T_1) = \frac{3nR}{2}(T_3 - T_1)$

R21. En déduire l'expression de T_3 en fonction de T_0 .

Solution: Par application du premier principe sur la transformation $1 \rightarrow 3$:

$$\begin{aligned}\Delta_{13}U &= W_{p13} + Q_{13} \\ \frac{3nR}{2}(T_3 - T_1) &= nR(3T_1 - T_3) + 0 \\ 3T_3 - 3T_1 &= 6T_1 - 2T_3 \\ 5T_3 &= 9T_1 \\ T_3 &= \frac{9T_1}{5} \\ &= \frac{9T_0}{5}\end{aligned}$$

Transformation $3 \rightarrow 4$:

R22. À l'équilibre final, exprimer P_4 , et T_4 , en fonction de P_1 et/ou T_0 . Aucun calcul n'est nécessaire.

Solution: À l'équilibre final, la pression et le volume sont les mêmes qu'à la fin de la première transformation envisagée : $P_4 = P_2 = 3P_1$ et $V_4 = V_2 = \frac{V_1}{3}$. De plus, l'équilibre thermique final assure $T_4 = T_0$.

R23. Pourquoi est-il possible d'utiliser le premier principe avec l'enthalpie ici pour exprimer le transfert thermique reçu par le gaz au cours de cette transformation ?

Solution: La pression extérieure est constante, donc la transformation est monobare, de plus à l'état initial et à l'état final la pression extérieure vaut la pression intérieure, donc le premier principe avec l'enthalpie est adapté ici : $\Delta_{34}H = Q_{34}$

R24. Exprimer Q_{34} en fonction de nR , T_0 et T_1 . Commenter le signe.

Solution: Ainsi $Q_{34} = nC_{Pm}(T_4 - T_3) = \frac{5}{2}nR\left(T_0 - \frac{9T_0}{5}\right)$, soit $Q_{34} = -2nRT_0 < 0$
Le gaz libère du transfert thermique pour atteindre l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.

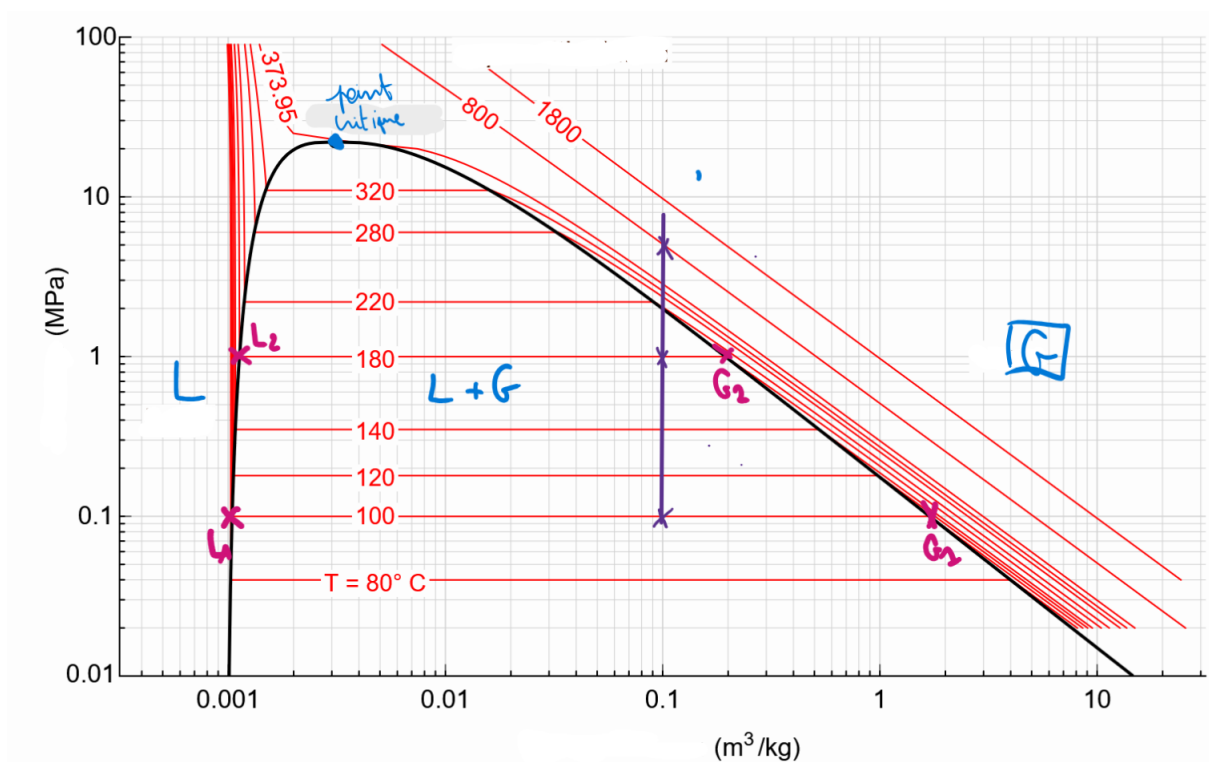
Exercice n°3 Autour de l'eau (Durée ~ 45 min)

Partie I Équilibre liquide-vapeur

On donne sur le **document réponse** (page ??), le diagramme de Clapeyron de l'eau. **On sera vigilant au fait que l'unité de l'ordonnée est le MPa, avec la conversion 1 Méga = 10^6 .**

R1. Sur le **document réponse**, indiquer les grandeurs représentées sur les axes, et les états d'équilibre de l'eau. Comment s'appelle la courbe en cloche ? sa partie de gauche ? sa partie de droite ? Placer le point critique.

Solution:



Il s'agit du diagramme de Clapeyron. La courbe en cloche est la courbe de saturation, avec sa partie de gauche qui s'appelle la courbe d'ébullition, et sa partie de droite qui s'appelle la courbe de rosée. À gauche se trouve l'état d'équilibre liquide, sous la courbe de saturation se trouve l'état d'équilibre diphasé liquide-gaz, et à droite l'état d'équilibre gazeux.

R2. **Énoncer** le théorème des moments.

Solution: Le titre massique en phase gazeuse est donné par $x_G = \frac{LM}{LG} = \frac{v_M - v_L}{v_G - v_L}$

Dans une enceinte indéformable, de volume $V = 1,0 \text{ L}$, initialement vide, à la température $T_1 = 100 \text{ °C}$, on introduit une goutte d'eau de masse $m = 10 \text{ g}$.

R3. (a) **Calculer** le volume massique du système.

Solution: Volume massique : $v_1 = \frac{V}{m} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

(b) **Placer** le point sur le document réponse.

Solution: cf ci-dessus

(c) Dans quel état est le système ?

Solution: Le système est à l'équilibre diphasé liquide-gaz.

(d) **Déterminer** la pression et/ou le titre massique en phase vapeur.

Solution: La pression vaut la pression de vapeur saturante à 100 °C , soit $0,1 \text{ MPa} = 1 \text{ bar}$.

D'après le théorème des moments : $x_V = \frac{LM}{LG} = \frac{0,1 - 0,001}{1,7 - 0,001} = 0,0058$, soit 5,8% en masse de vapeur.

R4. L'enceinte s'échauffe jusqu'à $T_2 = 180 \text{ °C}$.

- (a) **Représenter** la transformation **sur le document réponse**, et indiquer l'état final du système.

Solution: Le volume et la masse sont fixés, donc le volume massique l'est également. La transformation a donc lieu le long de la verticale. L'état final du système est à nouveau un équilibre diphasé dont la fraction massique en vapeur a augmenté.

- (b) **Déterminer** la pression et/ou le titre massique en phase vapeur.

Solution: La pression vaut alors $P_{\text{sat}}(180\text{ °C}) = 1\text{ MPa} = 10\text{ bar}$.

D'après le théorème des moments : $x_v = \frac{0,1 - 0,001}{0,2 - 0,001} = 0,50$: 50% de l'eau est à l'état vapeur.

- R5. **Reprendre** la question **R4** si l'échauffement de l'enceinte se produit jusqu'à $T_3 = 800\text{ °C}$.

Solution: Le système est alors entièrement à l'état gazeux, à la pression 5 MPa.

Partie II Obtention d'un thé buvable

Dans une tasse de volume $V = 350\text{ mL}$ à double paroi limitant fortement les transferts thermiques avec le milieu extérieur, vous versez $V_1 = \frac{2V}{3}$ d'eau bouillante à $T_1 = 87\text{ °C}$. Pour pouvoir boire votre thé directement, vous ajoutez de l'eau froide à $T_2 = 7\text{ °C}$ pour compléter la tasse. On souhaite déterminer la température finale T_f .

- R6. Après avoir défini le système, pourquoi peut-on considérer la transformation comme étant isochore, isobare et adiabatique ?

Solution: Le système étudié est le contenu de la tasse (eau chaude + eau froide).

La transformation est très rapide, les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire, donc on peut considérer que la transformation est adiabatique.

En l'absence d'évaporation, le système est fermé, et comme c'est une phase condensée qu'on peut modélisée comme incompressible et indilatable, on peut considérer la transformation isochore.

Enfin, la pression reste constante au cours de la transformation, elle est donc isobare.

- R7. Exprimer la variation d'énergie interne du système contenu dans la tasse.

Solution:



Remarque —

Raisonnement et calculs à reprendre avec le cours et l'exercice. ATTENTION les deux systèmes n'étaient pas de même masse, il fallait donc introduire m_1 et m_2 .

L'énergie interne est additive :

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 \\ &= m_1 c_{\text{eau}}(T_f - T_1) + m_2 c_{\text{eau}}(T_f - T_2) \\ &= \rho c_{\text{eau}}(V_1(T_f - T_1) + V_2(T_f - T_2))\end{aligned}$$

- R8. Par application du premier principe, en déduire l'expression de T_f en fonction de T_1 et T_2 uniquement. Faire l'application numérique.

Solution: D'après le premier principe : $\Delta U = W + Q$, avec $W = 0$ car la transformation est isochore, et $Q = 0$ car la transformation est adiabatique.

Ainsi

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0 \\ \rho c_{\text{eau}}(V_1(T_f - T_1) + V_2(T_f - T_2)) &= 0 \\ V_1(T_f - T_1) + V_2(T_f - T_2) &= 0 \\ VT_f &= \frac{2V}{3}T_1 + \frac{V}{3}T_2 \\ T_f &= \frac{2T_1 + T_2}{3} \\ T_f &= \frac{2 \times 360 + 280}{3} \\ T_f &= \frac{1000}{3}\end{aligned}$$

soit $T_f = \frac{2T_1 + T_2}{3} = 333 \text{ K} = 60 \text{ °C}$