

? Lundi 9 mars 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°8 (2) – Corrigé

Exercice n°1 Aurores boréales (D'après Concours Centrale-Supélec MP 2016)

Partie I Aurores polaires terrestres

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux se produisant entre 80 et 400 km d'altitude causés par la précipitation de particules chargées en provenance de l'espace sur les atomes et les molécules des couches externes de l'atmosphère terrestre. Ces particules sont principalement des électrons dont l'énergie cinétique est de l'ordre du keV pour les aurores les plus spectaculaires.

R1. Expliquer le caractère lumineux d'une aurore polaire.

Solution: « Les particules chargées accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère. »

Leurs collisions avec les molécules présentes excitent ces molécules (transfert d'énergie cinétique en énergie interne) qui se désexcitent ensuite en émettant un rayonnement dans le visible, notamment.

R2. Pourquoi une aurore boréale (hémisphère nord) apparaît-elle simultanément à une aurore australe (hémisphère sud) ? (on s'appuiera sur le document ??).

Solution: Vu le schéma fourni dans le document, on remarque une symétrie du champ magnétique par rapport au plan équatorial.

Partie II Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Afin d'interpréter l'arrivée des particules chargées à l'origine des aurores polaires, on se propose dans la suite de modéliser la dynamique d'un électron dans une zone de champ magnétique stationnaire.

R3. Dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}$) supposé galiléen, on considère tout d'abord un électron de masse m pénétrant en O dans une zone de champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$, avec ($B_0 > 0$). La force gravitationnelle terrestre a-t-elle une influence sur la dynamique de cet électron ? On attend un argument qualitatif fondé sur un calcul d'ordre de grandeur.

Solution: Rédaction ! Système : électron $M(m, -e)$

Référentiel : référentiel géocentrique considéré galiléen.

Bilan des forces : Force de Lorentz $\vec{f}_L = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$

Utilisez les données numériques de l'énoncé, posez les calculs numériques complètement.

Le poids de l'électron est d'ordre de grandeur $mg \approx 10^{-30} \times 10 = 10^{-29}$ N

La force de Lorentz sur l'électron est d'ordre de grandeur $f_L = evB_0$

Pour B , on prend l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre.

Pour v , on peut utiliser l'information qui dit que les électrons ont une énergie cinétique de l'ordre du keV, soit de $\mathcal{E}_c \approx 10^{-16}$ J. Ainsi $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}} \approx \sqrt{\frac{10^{-16}}{10^{-30}}} = 10^7$ m · s⁻¹

Ainsi $f_L \approx 10^{-17}$ N

Ainsi $f_L \gg mg$: la force gravitationnelle terrestre n'a pas d'influence sur la dynamique de cet électron.

R4. Justifier, en utilisant un théorème énergétique, que le mouvement de l'électron plongé dans le champ magnétique $\vec{B}_0$ est nécessairement uniforme.

Solution:

d'après le théorème de la puissance cinétique : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_L)$, Or $\mathcal{P}(\vec{f}_L) = (-e\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{v} = 0$

$\mathcal{E}_c$ est donc constante, donc la norme du vecteur vitesse est constante. Le mouvement est par conséquent uniforme.

R5. On suppose que la vitesse initiale de la particule s'écrit $\vec{v}_0 = v_{0z}\vec{u}_z$, avec ($v_{0z} > 0$).

Comment se déplace l'électron vis à vis de la direction du champ magnétique ?

Solution: À $t = 0$, $\vec{f}_L = \vec{0}$, donc le mouvement de l'électron sera rectiligne (et uniforme).

On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x$, avec ($v_{0x} > 0$).

R6. Par analyse dimensionnelle, mettre en évidence une pulsation ω_c caractéristique du mouvement de l'électron en fonction de e , m et B et l'évaluer dans le champ magnétique terrestre régnant à l'altitude d'un satellite géostationnaire.

Données :

- le champ magnétique créé par un dipôle magnétique tel celui de la Terre évolue en $\frac{1}{r^3}$, où r est la distance entre le noyau (qui crée le champ), et le point considéré ;
- le champ créé par la Terre (de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km), à sa surface, est de $5 \cdot 10^{-5}$ T ;
- le rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire est de $4,2 \cdot 10^4$ km.

Solution: Posez honnêtement l'étude des unités pour justifier la réponse.

$$\begin{aligned} [e] &= C \\ [m] &= kg \\ [B] &= \frac{[f_L]}{[ev]} \\ &= \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2}}{C \cdot m \cdot s^{-1}} \\ &= kg \cdot C^{-1} \cdot s^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\left[\frac{eB}{m} \right] = s^{-1}$

On peut donc proposer $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$

Valeur de B_0 au niveau de l'orbite géostationnaire ? $B_{\text{géo}} \sim B_T \times \frac{R_T^3}{R_{\text{géo}}^3} = 1,7 \cdot 10^{-7}$ T

A.N $\omega_c = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,7 \cdot 10^{-7}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 3 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot s^{-1}$

R7. Par application du principe fondamental de la dynamique, justifier que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{B}_0$, puis établir les équations couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{eB_0}{m}y + v_{0x} & (1) \\ \dot{y} = \frac{eB_0}{m}x & (2) \end{cases}$$

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{f}_L \\ m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= -e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -eB_0\dot{y} \\ eB_0\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par intégration l'équation selon z , on obtient $\dot{z}(t) = cste = \dot{z}(0) = 0$, donc le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au vecteur champ magnétique.

On intègre une première fois les deux premières équations issues du PFD :
$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{eB_0}{m}y + A \\ \dot{y} = \frac{eB_0}{m}x + C \end{cases}$$

Or à $t = 0$, $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = 0$, $x(0) = 0 = y(0)$



Remarque –

La condition initiale sur la vitesse ne suffit pas, il faut également celle sur la position pour exprimer $y(0)$ et $x(0)$.

On obtient le système demandé :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{eB_0}{m}y + v_{0x} & (1) \\ \dot{y} = \frac{eB_0}{m}x & (2) \end{cases}$$

R8. En déduire l'équation différentielle vérifiée par y :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x}$$

Solution: D'après (2) : $x = \frac{\dot{y}}{\omega_c}$, dans (1) : $\frac{\ddot{y}}{\omega_c} = -\omega_c y + v_{0x}$

Ainsi $\boxed{\ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c v_{0x}}$

R9. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

Solution: Par intégration de l'équation précédente : $y(t) = A \cos(\omega_c t) + C \sin(\omega_c t) + \frac{v_{0x}}{\omega_c}$

Avec $y(0) = 0 = A + \frac{v_{0x}}{\omega_c}$

De plus $\dot{y}(0) = C\omega_c = 0$

Ainsi $\boxed{y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))}$

On en déduit $\boxed{x(t) = +\frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t)}$

R10. Montrer que la trajectoire de l'électron est circulaire en établissant son équation cartésienne. Représenter la trajectoire et repérer son centre.

Évaluer son rayon R_c .

Solution:

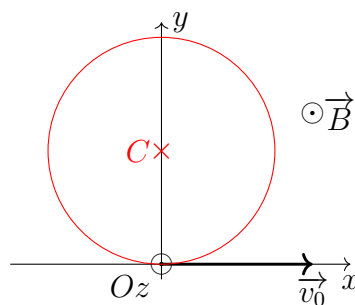


Remarque –

Il faut exploiter le fait que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, donc commencer par isoler $\cos(\omega_c t)$ et $\sin(\omega_c t)$ de chaque équation horaire.

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\y(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) \\\sin(\omega_c t) &= \omega_c \frac{x}{v_{0x}} \\\cos(\omega_c t) &= 1 - \frac{\omega_c}{v_{0x}} y \\1 &= \left(\frac{\omega_c}{v_{0x}} x \right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{v_{0x}} y - 1 \right)^2 \\\frac{v_{0x}^2}{\omega_c^2} &= x^2 + \left(y - \frac{v_{0x}}{\omega_c} \right)^2\end{aligned}$$

C'est l'équation cartésienne d'un cercle de rayon $R_c = \frac{v_{0x}}{\omega_c} = \frac{mv_{0x}}{eB}$, de centre $C \left(0, \frac{v_{0x}}{\omega_c} \right)$



A.N. : $R_c = \frac{10^7}{3 \cdot 10^4} \approx 3 \cdot 10^2 \text{ m}$

Un électron accéléré non relativiste perd de l'énergie en rayonnant à un instant donné une puissance électromagnétique $\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} e^2 c^2 \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2$.

R11. Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs des puissances α et β .

Indication : Pour $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, on pourra utiliser la force de Coulomb pour déterminer sa dimension.

Solution:

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}] &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \times [e]^\alpha [c]^\beta \left[\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2 \right] \\ kg.m^2.s^{-3} &= \left[\frac{F_{\text{coul}} r^2}{q^2} \right] \times [e]^\alpha [c]^\beta (m.s^{-2})^2 \\ kg.m^2.s^{-3} &= \frac{kg.m.s^{-2} \times m^2}{C^2} \times [e]^\alpha [c]^\beta (m.s^{-2})^2 \\ s^{-3} &= \frac{m.s^{-2}}{C^2} \times [e]^\alpha [c]^\beta m^2.s^{-4} \\ 1 &= \frac{m^3.s^{-3}}{C^2} \times [e]^\alpha [c]^\beta \\ [e]^\alpha [c]^\beta &= \frac{C^2}{(m.s^{-1})^3} \end{aligned}$$

Ainsi $\alpha = 2$ et $\beta = -3$

Soit $\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2$

R12. En utilisant l'expression obtenue R10, exprimer la variation de l'énergie cinétique de l'électron dE_c lorsque R_c varie de dR_c .

Établir l'équation différentielle vérifiée par R_c et l'écrire sous la forme $\frac{dR_c}{dt} + \frac{R_c}{\tau} = 0$

Solution:

$$\begin{aligned} \text{Vitesse : } v &= \omega_c R_c \\ \text{Énergie cinétique : } E_c &= \frac{1}{2} m \omega_c^2 R_c^2 \\ \text{Dérivée temporelle : } \frac{dE_c}{dt} &= \frac{1}{2} m \omega_c^2 \times 2 R_c \frac{dR_c}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi $dE_c = m \omega_c^2 R_c dR_c$

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= -\mathcal{P} \\ \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} \left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\|^2 \\ \text{or le mouvement est circulaire uniforme } \frac{d\vec{v}}{dt} &= -R_c \omega_c^2 \vec{e}_r \\ \frac{dE_c}{dt} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} R_c^2 \omega_c^4 \\ m \omega_c^2 R_c \frac{dR_c}{dt} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} R_c^2 \omega_c^4 \\ \frac{dR_c}{dt} + \frac{e^2 \omega_c^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} R_c &= 0 \\ \frac{dR_c}{dt} + \frac{R_c}{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

avec $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_c^2}$

R13. En déduire l'expression de la fonction $R_c(t)$ et établir que le temps caractéristique τ mis en évidence s'écrit

$$\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}.$$

L'évaluer et commenter.

Solution: On en déduit l'évolution temporelle $R_c(t) = R_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$: le rayon de la trajectoire circulaire de l'électron diminue au cours du temps, le mouvement de l'électron est une spirale, et il finit par s'arrêter au bout de quelques τ .

Expression de τ : $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_c^2} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3}{e\omega_c^2} \times \frac{mB_0}{eB_0} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3}{e\omega_c^2} \times \frac{B_0}{\omega_c}$, on retrouve l'expression fournie.

A.N. $\tau \approx 1,8.10^{14}$ s = 6 millions d'années. Ce phénomène peut donc être négligé à l'échelle de l'observation.

R14. On suppose désormais que l'électron pénètre dans cette même zone de champ magnétique en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$, avec ($v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$). Comment se déplace l'électron vis à vis du champ magnétique ?

Solution: Le mouvement de l'électron est ici une combinaison d'un mouvement rectiligne uniforme dans le sens de l'axe (Oz), et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan (Oxy). Il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal d'axe (Oz).

Partie III Ceintures de Van Allen

La Terre est entourée d'une zone où des particules de haute énergie cinétique, typiquement de quelques 100 MeV au GeV, sont piégées par le champ magnétique. Ces particules sont réparties dans des ceintures autour du plan équatorial dites ceintures de Van Allen ou ceintures de radiation. Ces ceintures sont très stables et contrairement aux autres éléments de la magnétosphère, elles sont peu sensibles aux orages, sous-orages et autres reconfigurations de la magnétosphère. De ce fait, les particules s'en échappent difficilement.

R15. Évaluer la vitesse typique d'un électron dans ces ceintures. La dynamique d'un tel électron peut-elle se déduire des résultats précédents ?

Solution:

La vitesse de électrons de telles énergies $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 100.10^6 \times 1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31}}} \approx 5,9.10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > c!!!$

Le cadre de la mécanique classique utilisé ici n'est pas valable. Il faut le cadre de la mécanique relativiste pour étudier convenablement ce mouvement.

Exercice n°2 Gaz parfait (Durée ~ 2h00)

- La partie I est indépendante des deux parties suivantes.
- La partie II est un ensemble de questions de cours dont les connaissances sont nécessaires pour la partie III.

Partie I Risque d'hypoxie (Durée ~ 15 min)

Cette partie est extrait d'un sujet portant sur l'exploration des très grandes profondeurs à l'aide de sous-marins autonomes et s'attache à discuter des contraintes de sécurité liées à ces expéditions.

La puissance électrique disponible assure, entre autres, le fonctionnement du système de contrôle de l'atmosphère de la capsule pendant plus de 50 heures. Ce système permet de maintenir une composition de l'air intérieur de l'habitacle correspondant à celle de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer.

On considère que, **lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume V_p d'air** dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que **seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons**.

R1. Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

Solution: L'air est composé de 80% de diazote et 20% de dioxygène

On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note n_i et $P_{O_2,i}$ respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la i -ème respiration après l'arrêt de ce système.

R2. En explicitant les hypothèses utilisées, établir la relation $n_{i+1} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$, où V est le volume libre dans l'habitacle. En déduire une relation entre $P_{O_2,i+1}$ et $P_{O_2,i}$.

En déduire que $P_{O_2,i} = P_{O_2,0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^i$.

Solution: On suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait, que la température et la concentration de dioxygène sont uniformes dans l'habitacle, et que la température est également uniforme. L'énoncé indique en outre que l'oxygène utilisé est remplacé par la même quantité de dioxyde de carbone, donc le nombre de moles gazeuses dans l'habitacle est constante, de même à température et volume constants que la pression.

Après la i -ème inspiration, le volume V de l'habitacle contient n_i moles de dioxygène, donc la quantité de dioxygène inspiré lors de la $(i+1)$ -ème inspiration vaut

$$n_{\text{inspiré}} = n_i \frac{V_p}{V}$$

où V_p est le volume inspiré. Seul un quart de cette quantité est utilisé par les poumons et transformé en dioxyde de carbone, le reste étant exhalé, donc la quantité de dioxygène restant dans l'habitacle après cette respiration vaut, en l'absence de production de dioxygène lors d'une panne du système de production :

$$n_{i+1} = n_i - \frac{n_{\text{inspiré}}}{4} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Soit en appliquant la loi du gaz parfait, dans l'hypothèse d'une température constante dans l'habitacle

$$P_{O_2,i+1} = \frac{n_{i+1}RT}{V} = n_i \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right) \frac{RT}{V} = P_{O_2,i} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)$$

Les pressions partielles $P_{O_2,i}$ forment donc une suite géométrique de raison $r = \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right) < 1$, d'où

$$P_{O_2,i} = P_{O_2,0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^i$$

R3. En déduire le nombre d'inspirations que peut faire le pilote, puis sa durée de vie sans apport extérieur de dioxygène.

Solution: Le nombre n d'inspirations possibles d'air respirable vérifie $P_{O_2,n} \leq P_{O_2,\ell}$, soit

$$P_{O_2,0} \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)^n \leq P_{O_2,\ell}$$

En passant au logarithme on obtient la relation

$$n \ln \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right) \leq \ln \left(\frac{P_{O_2,\ell}}{P_{O_2,0}}\right)$$

Le nombre maximal de respirations vaut

$$n_{\max} = \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{P_{O_2,\ell}}{P_{O_2,0}}\right)}{\ln \left(1 - \frac{V_p}{4V}\right)} \right\rceil$$

On calcule la pression partielle de dioxygène à la surface libre $P_{O_2,0} = x_{O_2,0}P_0 = 0,2P_0 = 2.10^4$ bar.

Le volume de la partie habitable assimilée à une sphère de diamètre $D = 1,09$ m, $V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6} = 0,678$ m³

Enfin :

$$n_{\max} = \left\lfloor \frac{\ln(8,0.10^3/2.10^4)}{\ln(1 - 0,5.10^{-3}/(4 \times 0,678))} \right\rfloor = 4,97.10^3$$

En supposant que la fréquence de la respiration reste constante, même quand la quantité d'oxygène diminue, la durée maximale de respiration vaut

$$\tau = \frac{n_{\max}}{f} = \frac{4,97.10^3}{0,25} \approx 2,0.10^4 \text{ s} = 5,5 \text{ h}$$

Cette valeur donne une estimation du temps de survie en cas de panne du système de contrôle de l'atmosphère. Ce temps présente sans doute des variations liées à la physiologie et à la psychologie du pilote (modification de la respiration par rapport au signal d'alarme physiologique associé à la concentration de monoxyde de carbone, modification de l'utilisation du dioxygène par l'organisme en cas d'hypoxie, ...)

Partie II Questions de cours (Durée ~ 10 min)

R4. **Donner** les définitions (générales, pas spécifiquement pour le gaz parfait) de l'énergie interne et de l'enthalpie. **Donner** leurs unités.

Solution: L'énergie interne est la somme des énergies cinétiques d'agitation thermique à l'échelle microscopique, et des énergies potentielles d'interaction entre les particules.

L'enthalpie est définie par $H = U + PV$.

H et U s'expriment en joule (J).

R5. **Donner** les expressions de la variation de l'énergie interne et de l'enthalpie de n moles d'un gaz parfait dont la température varie de T_1 à T_2 . Définir la grandeur introduite, et en donner son nom et son unité.

Solution: Pour un gaz parfait : $\Delta U = nC_{V,m}(T_2 - T_1)$ où $C_{V,m}$ est la capacité thermique à volume constant molaire, qui s'exprime en $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

R6. **Donner** l'expression générale du travail des forces de pression reçu par un système. Quelle pression intervient dedans ?

Puis en donner son expression dans le cas particulier d'une **transformation mécaniquement réversible** effectuée suffisamment lentement pour que l'équilibre mécanique ait lieu à chaque instant. Quelle pression intervient dedans ?

Solution: Expression générale du travail des forces de pression : $W_p = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} dV$, où la pression qui intervient est la pression extérieure au système.



Remarque –

Attention mécaniquement réversible impose qu'à chaque instant l'équilibre mécanique a lieu, c'est-à-dire $P_{\text{ext}} = P_{\Sigma}$, mais P_{ext} (et donc P_{Σ}) peut varier au cours de la transformation (cf quand on pose les grains de sable au fur et à mesure).

Expression du travail des forces de pression au cours d'une transformation mécaniquement réversible :
 $W_p = \int_{V_1}^{V_2} -P_{\Sigma} dV$, où la pression qui intervient est la pression du système.

R7. **Énoncer** le premier principe pour une transformation quelconque d'un système macroscopiquement au repos.

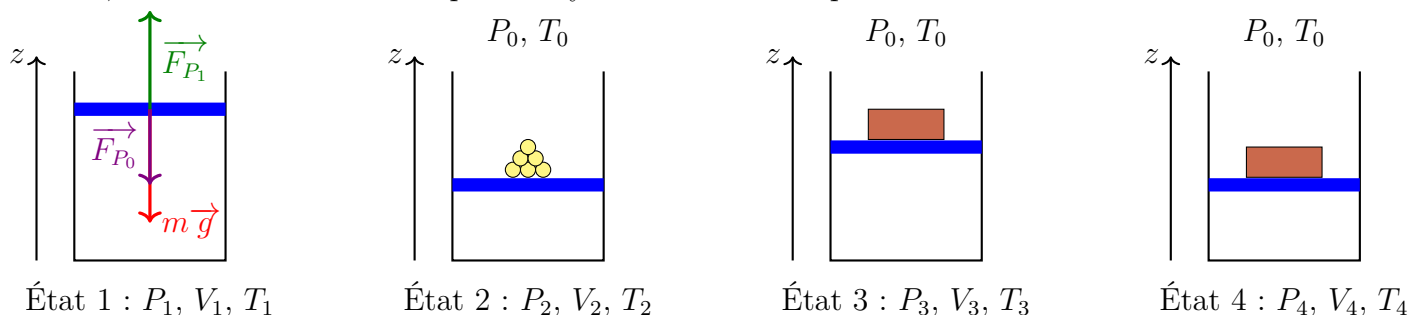
Solution: Pour un système fermé macroscopiquement au repos, le premier principe s'exprime selon $\Delta U = W + Q$, où W est la somme des travaux des forces non conservatives, et Q le transfert thermique reçus algébriquement par le système.

Partie III Transformations subies par un gaz parfait (Durée ~ 1h30)

On souhaite comprimer une quantité de n moles de gaz parfait monoatomique enfermées dans un cylindre vertical fermé par au-dessus par un piston mobile sans frottement. Le piston est de masse m , et de surface S . L'enceinte est diathermane.

L'air extérieur est à la pression P_0 constante et à la température T_0 constante.

On note V_1 , P_1 et T_1 les caractéristiques du système à l'état d'équilibre initial.



Partie III.1 Équilibre initial

R8. Que signifie le fait que l'enceinte est diathermane ? Que peut-on en déduire sur la température T_1 initiale dans l'enceinte ?

Solution: Une enceinte diathermane permet les transferts thermiques avec le milieu extérieur.
 À l'équilibre thermodynamique initial, $T_1 = T_0$.

R9. Par étude de l'équilibre du piston, **établir** l'expression de la pression P_1 dans l'enceinte en fonction de P_0 , m , g et S .

Solution:

Système : piston de masse m
 référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- force de pression exercée par le gaz intérieur $\vec{F}_{P_1} = P_1 S \vec{u}_z$
- force de pression exercée par l'air extérieur $\vec{F}_{P_0} = -P_0 S \vec{u}_z$

À l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_0} = \vec{0}$, soit $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$

R10. **En déduire** le volume V_1 .

Solution: D'après la loi des gaz parfaits :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{mg}{S}}$$

On souhaite diviser le volume de l'enceinte par trois en considérant deux façons de procéder.

Partie III.2 Avec des petits grains de sable

On pose très lentement un grain de sable par grain de sable sur le piston, jusqu'à en avoir posé une masse M telle que le volume soit $V_2 = \frac{V_1}{3}$. On note P_2 , V_2 et T_2 les grandeurs d'état à l'état final après l'ajout de ces grains de sable.

R11. Pourquoi peut-on considérer que la compression est isotherme ?

Solution: La compression est réalisée très lentement en contact avec l'atmosphère extérieure de température constante, l'équilibre mécanique et thermique ont le temps de se faire à chaque instant. La température finale vaut donc $T_2 = T_0$

R12. **Exprimer** la pression finale P_2 en fonction de P_1 uniquement.

Solution:



Remarque —



S'il y a autre chose que P_1 , c'est que vous n'avez pas répondu à la question !

D'après la loi des gaz parfaits $P_1V_1 = nRT_0$ et $P_2V_2 = nRT_0$

Ainsi
$$P_2 = P_1 \times \frac{V_1}{V_2} = 3P_1$$

R13. **Établir** l'expression du travail W_{12} des forces de pression au cours de cette transformation en fonction de n , R et T_0 . Commenter le signe.

Solution:



Remarque —



Revoir la rédaction propre d'un tel calcul !

Travail des forces de pression :

$$\begin{aligned} W_{p12} &= \int_{V_1}^{V_2} -P_{\text{ext}} dV \\ &\text{or la transformation est mécaniquement réversible, donc } P_{\text{ext}} = P \\ &= \int_{V_1}^{V_2} -P dV \\ &\stackrel{\text{loi des gaz parfaits}}{=} \int_{V_1}^{V_2} -\frac{nRT_0}{V} dV \\ &\stackrel{nRT_0 \text{ cste}}{=} -nRT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= -nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= nRT_0 \ln(3) > 0 \end{aligned}$$

Le système reçoit réellement du travail.



Remarque –

ATTENTION au sens algébrique de définition des travaux et des transferts thermiques. Un travail reçu algébriquement positif est réellement reçu.

R14. **En déduire** l'expression du transfert thermique Q_{12} en fonction de n , R et T_0 . Commenter le signe.

Solution: D'après le premier principe sur la transformation $1 \rightarrow 2$: $\Delta_{12}U = W_{12} + Q_{12}$

Or l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, qui ne varie pas ici, ainsi $\Delta_{12}U = 0$.

D'après le premier principe : $Q_{12} = -W_{p12} = -nRT_0 \ln(3) < 0$: le gaz libère réellement du transfert thermique au milieu extérieur ce qui lui permet de maintenir sa température constante malgré la compression.

Partie III.3 Avec un gros pavé

On souhaite obtenir le même volume final en plaçant un pavé de masse M brutalement. On observe que la transformation se produit en « deux temps » :

- Transformation $1 \rightarrow 3$: Le piston se stabilise très vite à un volume V_3 .
- Transformation $3 \rightarrow 4$: Les échanges thermiques ont lieu avec le milieu extérieur et le piston se déplace jusqu'à ce que le volume soit $V_4 = V_2$ et s'arrête.

Transformation $1 \rightarrow 3$:

R15. Pourquoi peut-on considérer la première transformation $1 \rightarrow 3$ comme étant adiabatique et monobare ?
Exprimer la pression P_{ext} exercée par l'extérieur en fonction de P_0 , m , M , g et S .

Solution: La transformation est brutale et les transferts thermiques n'ont pas le temps d'avoir lieu donc on peut la considérer comme adiabatique. La pression extérieure exercée sur le système est constante et vaut $P_{\text{ext}} = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}$.

R16. **Exprimer** la pression P_3 à la fin de cette première transformation.

Solution: À l'équilibre mécanique final, $P_3 = P_2 = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}$.

R17. **Exprimer** le travail des forces de pression W_{13} en fonction de P_3 , V_3 et V_1 .

Puis montrer que $W_{13} = nR(3T_1 - T_3)$.

Solution: Travail des forces de pression :

$$\begin{aligned} W_{p13} &= \int_{V_1}^{V_3} -P_{\text{ext}} dV \\ &= -P_{\text{ext}}(V_3 - V_1) \\ &= -P_3(V_3 - V_1) \\ &= -P_3V_3 + P_3V_1 \\ &= -nRT_3 + 3P_1V_1 \\ &= nR(3T_1 - T_3) \end{aligned}$$

R18. **Exprimer** la variation d'énergie interne en fonction de nR , T_3 et T_1 au cours de la transformation $1 \rightarrow 3$.

Solution: Pour un gaz parfait monoatomique : $\Delta_{13}U = nC_{Vm}(T_3 - T_1) = \frac{3nR}{2}(T_3 - T_1)$

R19. **En déduire** l'expression de T_3 en fonction de T_0 .

Solution: Par application du premier principe sur la transformation $1 \rightarrow 3$:

$$\begin{aligned}\Delta_{13}U &= W_{p13} + Q_{13} \\ \frac{3nR}{2}(T_3 - T_1) &= nR(3T_1 - T_3) + 0 \\ 3T_3 - 3T_1 &= 6T_1 - 2T_3 \\ 5T_3 &= 9T_1 \\ T_3 &= \frac{9T_1}{5} \\ &= \frac{9T_0}{5}\end{aligned}$$

Transformation $3 \rightarrow 4$:

R20. À l'équilibre final, **exprimer** P_4 , et T_4 , en fonction de P_1 et/ou T_0 .

Solution: À l'équilibre final, la pression et le volume sont les mêmes qu'à la fin de la première transformation envisagée : $P_4 = P_2 = 3P_1$ et $V_4 = V_2 = \frac{V_1}{3}$. De plus, l'équilibre thermique final assure $T_4 = T_0$.

R21. Pourquoi est-il possible d'utiliser le premier principe avec l'enthalpie ici pour exprimer le transfert thermique reçu par le gaz au cours de cette transformation ?

Solution: La pression extérieure est constante, donc la transformation est monobare, de plus à l'état initial et à l'état final la pression extérieure vaut la pression intérieure, donc le premier principe avec l'enthalpie est adapté ici : $\Delta_{34}H = Q_{34}$

R22. **Exprimer** Q_{34} en fonction de nR , T_0 et T_1 . Commenter le signe.

Solution: Ainsi $Q_{34} = nC_{Pm}(T_4 - T_3) = \frac{5}{2}nR\left(T_0 - \frac{9T_0}{5}\right)$, soit $Q_{34} = -2nRT_0 < 0$
Le gaz libère du transfert thermique pour atteindre l'équilibre thermique avec le milieu extérieur.

Exercice n°3 Autour de l'eau (Durée ~ 45 min)

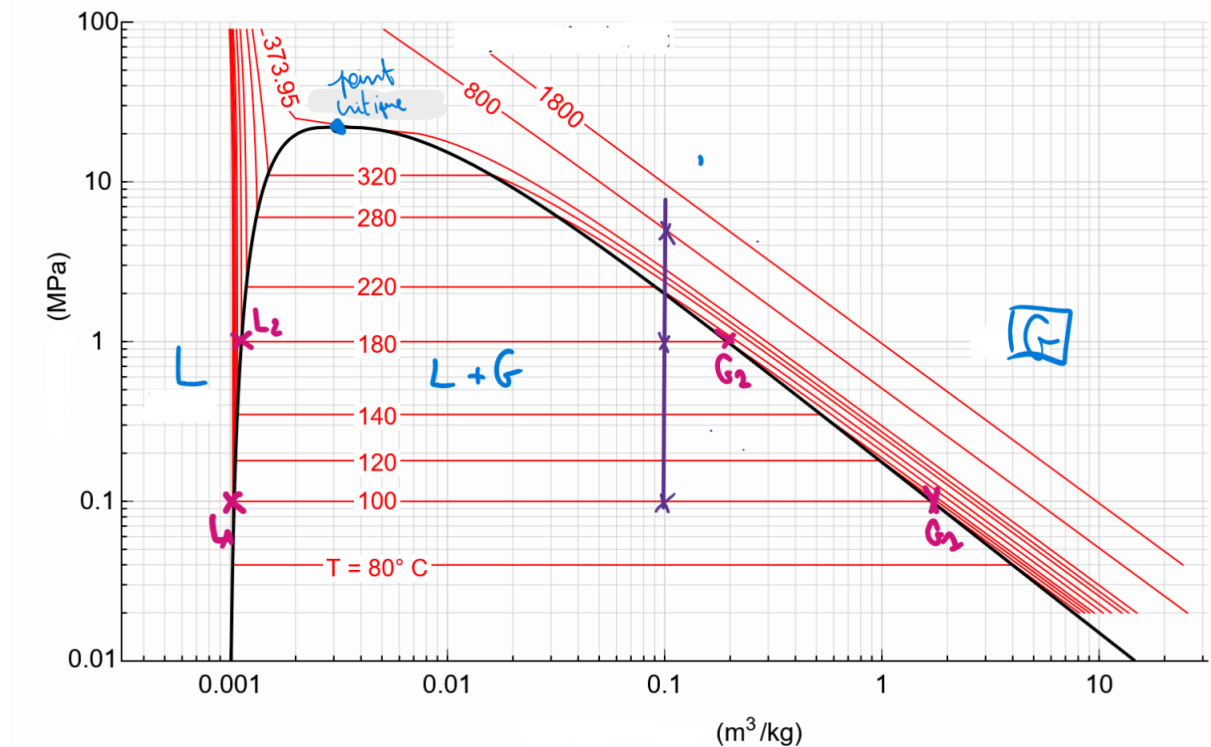
Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I Équilibre liquide-vapeur

On donne sur le **document réponse** (page ??), le diagramme de Clapeyron de l'eau.

R1. Sur le **document réponse**, indiquer les grandeurs représentées sur les axes, et les états d'équilibre de l'eau. Comment s'appelle la courbe en cloche ? sa partie de gauche ? sa partie de droite ? Placer le point critique.

Solution:



Il s'agit du diagramme de Clapeyron. La courbe en cloche est la courbe de saturation, avec sa partie de gauche qui s'appelle la courbe d'ébullition, et sa partie de droite qui s'appelle la courbe de rosée. À gauche se trouve l'état d'équilibre liquide, sous la courbe de saturation se trouve l'état d'équilibre diphasé liquide-gaz, et à droite l'état d'équilibre gazeux.

R2. **Énoncer** le théorème des moments.

Solution: Le titre massique en phase gazeuse est donné par $x_G = \frac{LM}{LG} = \frac{v_M - v_L}{v_G - v_L}$

Dans une enceinte indéformable, de volume $V = 1,0 \text{ L}$, initialement vide, à la température $T_1 = 100 \text{ °C}$, on introduit une goutte d'eau de masse $m = 10 \text{ g}$.

R3. **Déterminer** complètement l'état du système.

Solution: Volume massique : $v_1 = \frac{V}{m} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

D'après le diagramme, le système est à l'équilibre diphasé liquide-gaz.

La pression vaut la pression de vapeur saturante à 100 °C , soit $0,1 \text{ MPa} = 1 \text{ bar}$.

D'après le théorème des moments : $x_V = \frac{LM}{LG} = \frac{0,1 - 0,001}{1,7 - 0,001} = 0,0058$, soit $5,8\%$ en masse de vapeur.

R4. L'enceinte s'échauffe jusqu'à $T_3 = 800 \text{ °C}$. Déterminer le nouvel état du système.

Solution: Le système est alors entièrement à l'état gazeux, à la pression 5 MPa .

Partie II Évaporation d'un verre d'eau

Dans une pièce close de volume $V = 40,0 \text{ m}^3$ avec un degré d'hygrométrie $H = 60\%$, on laisse un verre contenant $V_0 = 200 \text{ mL}$ d'eau soit une masse $m_0 = 200 \text{ g}$ d'eau. La pression atmosphérique est $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et la température de la pièce est $T_0 = 20 \text{ °C}$. On connaît la pression de vapeur saturante à cette température $P_{\text{sat}}(20 \text{ °C}) = 2,3 \text{ kPa}$. On suppose que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait de masse molaire $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

R5. **Montrer** que toute l'eau du verre peut s'évaporer et calculer le nouveau degré d'hygrométrie dans la pièce.

Solution: La pression partielle en haut initiale dans l'air vaut $P_{e,i} = H_i \times P_{\text{sat}}(20 \text{ °C}) < P_{\text{sat}}(20 \text{ °C}) = 2,3 \text{ kPa}$, donc l'eau liquide contenue dans le verre peut s'évaporer, au moins partiellement.

Supposons qu'elle s'est entièrement évaporée, à la fin dans l'air, il y a une masse d'eau vapeur $m_{v,f} = m_{v,i} + m_0$

Ainsi la pression partielle en eau finale, d'après la loi des gaz parfaits vaut :

$$\begin{aligned} P_{e,f} &= \frac{n_{v,f}RT_0}{V} \\ &= \frac{m_{v,f}RT_0}{MV} \\ &= \frac{m_{v,i}RT_0}{MV} + \frac{m_0RT_0}{MV} \\ &= P_{e,i} + \frac{m_0RT_0}{MV} \\ &= H_i \times P_{\text{sat}}(20 \text{ °C}) + \frac{m_0RT_0}{MV} \\ &= 2057 \text{ Pa} < P_{\text{sat}}(20 \text{ °C}) \end{aligned}$$

Par conséquent, la saturation n'est jamais atteinte, l'eau du verre s'est donc entièrement évaporée.

R6. Quelle masse d'eau maximale aurait-on pu faire évaporer pour saturer la pièce en vapeur d'eau ?

Solution: Pour saturer la pièce en vapeur d'eau, il faut que $P_{e,f} = P_{\text{sat}}(20 \text{ °C})$

Il faut pour cela une masse : $m_{\text{max}} = \frac{P_{\text{sat}}(20 \text{ °C})MV}{RT_0} = 0,680 \text{ kg}$

R7. On suppose que toute l'eau du verre de 200 mL s'est bien évaporée. Suite à un refroidissement, la température chute à $T_1 = 5,0 \text{ °C}$. Quelle masse d'eau repasse à l'état liquide sachant que la pression de vapeur saturante à cette température est $P_{\text{sat}}(5 \text{ °C}) = 0,87 \text{ kPa}$?

Solution: La question laisse penser que le système est à l'équilibre diphasé liquide-vapeur.

Par conséquent la masse d'eau à l'état vapeur dans l'atmosphère est, après refroidissement, donnée par :

$$m_{v,f2} = \frac{P_{\text{sat}}(5 \text{ °C})MV}{RT_f} = 0,271 \text{ kg}$$

Avant abaissement de la température, la masse d'eau dans l'atmosphère était de $m_{v,f} = m_{v,i} + m_0 = \frac{H_i P_{\text{sat}}(20 \text{ °C})MV}{RT_0} + m_0 = 608 \text{ g}$

Par conséquent, il y a 337 g d'eau qui repasse à l'état liquide, soit 137 g de plus qu'il y avait initialement.

Partie III Obtention d'un thé buvable

Dans une tasse de volume $V = 350 \text{ mL}$ à double paroi limitant fortement les transferts thermiques avec le milieu extérieur, vous versez $V_1 = \frac{2V}{3}$ d'eau bouillante à $T_1 = 87^\circ\text{C}$. Pour pouvoir boire votre thé directement, vous ajoutez de l'eau froide à $T_2 = 7^\circ\text{C}$ pour compléter la tasse. On souhaite déterminer la température finale T_f .

R8. Quelles hypothèses peut-on faire sur la nature de la transformation ?

Solution: Le système étudié est le contenu de la tasse (eau chaude + eau froide).

La transformation est très rapide, les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire, donc on peut considérer que la transformation est adiabatique.

En l'absence d'évaporation, le système est fermé, et comme c'est une phase condensée qu'on peut modélisée comme incompressible et indilatable, on peut considérer la transformation isochore.

Enfin, la pression reste constante au cours de la transformation, elle est donc isobare.

R9. **Établir** l'expression de la température finale T_f en fonction de T_1 et T_2 uniquement. Faire l'application numérique.

Solution:



Remarque –

Raisonnement et calculs à reprendre avec le cours et l'exercice. ATTENTION les deux systèmes n'étaient pas de même masse, il fallait donc introduire m_1 et m_2 .

L'énergie interne est additive :

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 \\ &= m_1 c_{\text{eau}}(T_f - T_1) + m_2 c_{\text{eau}}(T_f - T_2) \\ &= \rho c_{\text{eau}}(V_1(T_f - T_1) + V_2(T_f - T_2))\end{aligned}$$

D'après le premier principe : $\Delta U = W + Q$, avec $W = 0$ car la transformation est isochore, et $Q = 0$ car la transformation est adiabatique.

Ainsi

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0 \\ \rho c_{\text{eau}}(V_1(T_f - T_1) + V_2(T_f - T_2)) &= 0 \\ V_1(T_f - T_1) + V_2(T_f - T_2) &= 0 \\ VT_f &= \frac{2V}{3}T_1 + \frac{V}{3}T_2 \\ T_f &= \frac{2T_1 + T_2}{3} \\ T_f &= \frac{2 \times 360 + 280}{3} \\ T_f &= \frac{1000}{3}\end{aligned}$$

soit $T_f = \frac{2T_1 + T_2}{3} = 333 \text{ K} = 60^\circ\text{C}$