

? Lundi 30 mars 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°9 (1) – Corrigé

Exercice n°1 Thermodynamique (Durée ~ 1h30)

Partie I Deuxième principe

R1. Deuxième principe de la thermodynamique :

(a) L'énoncer complètement.

Solution:

1. À tout système thermodynamique est associée une **fonction d'état extensive**, notée S , et appelée **entropie**.
2. Au cours d'une transformation d'un **système FERMÉ** entre deux états d'équilibre thermodynamique :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$$

- avec $S_{\text{éch}}$, l'**entropie échangée** reçue algébriquement par le système au cours de la transformation :

$$S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_{\text{ext},i}}$$

- $T_{\text{ext},i}$ la température constante du thermostat i avec lequel le système est en contact,
- Q_i le transfert thermique reçu par le système au cours de la transformation, en contact avec le thermostat de température $T_{\text{ext},i}$ constante ;

(b) Donner les noms et unités des grandeurs y intervenants.

Solution: S , $S_{\text{créée}}$ et $S_{\text{éch}}$ s'expriment en Joule par Kelvin ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$).

(c) Que peut-on dire sur l'entropie créée ?

Solution: L'entropie créée $S_{\text{créée}}$, qui est **nécessairement positive ou nulle**.

R2. Citer des causes d'irréversibilité.

Solution:

- les frottements,
- les inhomogénéités de température, pression, concentration,
- les changements d'état pas à température constante.

R3. Lois de Laplace

(a) Énoncer une loi de Laplace et les hypothèses permettant de les utiliser.

Solution: On peut écrire, pour

- un **gaz parfait**, de coefficient γ constant,
- **fermé** (n constante),
- au cours d'une **transformation adiabatique réversible**,
- échangeant uniquement du travail des forces de pression (pas d'autres travaux)

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

(b) Établir les deux autres lois de Laplace à partir de la précédente.

Solution: Partons de

$$\begin{aligned} P_i V_i^\gamma &= P_f V_f^\gamma \\ \frac{nRT_i}{V_i} V_i^\gamma &= \frac{nRT_f}{V_f} V_f^\gamma \\ T_i V_i^{\gamma-1} &= T_f V_f^{\gamma-1} \\ P_i V_i^\gamma &= P_f V_f^\gamma \\ P_i \left(\frac{nRT_i}{P_i} \right)^\gamma &= P_f \left(\frac{nRT_f}{P_f} \right)^\gamma \\ P_i^{1-\gamma} T_i^\gamma &= P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma \end{aligned}$$

Partie II Bilan d'entropie sur un gaz parfait

R4. **Donner** les expressions de la variation de l'énergie interne et de l'enthalpie d'un gaz parfait dont on connaît les capacités thermiques molaires. Préciser quelle capacité thermique intervient dans chaque variation.

Solution: Pour un gaz parfait : $\Delta U = nC_{Vm}(T_f - T_i)$ et $\Delta H = nC_{Pm}(T_f - T_i)$, où C_{Vm} est la capacité thermique molaire à volume constant, et C_{Pm} est la capacité thermique molaire à pression constante.

R5. **Donner** les expressions de C_{Vm} et C_{Pm} d'un gaz parfait en fonction de R et γ .

Solution: $C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$ et $C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

On considère un échantillon de $n = 41$ mol de gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 7/5$, de température initiale $T_i = 20^\circ\text{C}$ est mis en contact avec un thermostat de température $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Le gaz est enfermé dans une enceinte indéformable. (Cet exemple peut correspondre à une bouteille d'air en présence d'un incendie...).

R6. **Exprimer** la variation d'entropie du système.

Solution: Système : n moles de gaz parfait

EI	$\xrightarrow[\text{monotherme}]{\text{isochore}}$	EF
$T_i = 20^\circ\text{C}$		$T_f = T_0 = 100^\circ\text{C}$
V_i		$V_f = V_i$
P_i		$P_f =$



Remarque –

La transformation n'est pas monobare.

D'après le formulaire : $\Delta S = nC_{Vm} \ln \frac{T_f}{T_0} = \frac{5}{2} nR \ln \frac{T_f}{T_0}$

R7. **Exprimer** le transfert thermique reçu par le gaz. **En déduire** l'entropie échangée.

Solution: D'après le premier principe : $\Delta U = W + Q$

La transformation étant isochore : $W = 0$

Donc $Q = \Delta U = nC_{Vm}(T_f - T_i) = \frac{5}{2} nR(T_f - T_i)$

La transformation étant monotherme, l'entropie échangée s'exprime selon : $S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_0} = \frac{5}{2} nR \left(1 - \frac{T_i}{T_0} \right)$

R8. **En déduire** l'entropie créée. Déterminer le signe et **conclure**.

Solution: D'après le deuxième principe $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

Ainsi :
$$S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} = \frac{5}{2}nR \left[\ln \frac{T_f}{T_0} + \frac{T_0}{T_f} - 1 \right]$$

Posons $x = \frac{T_0}{T_f}$, $x - 1 - \ln(x) \geq 0$, donc $\frac{T_0}{T_f} - 1 - \ln \frac{T_0}{T_f} \geq 0$

La transformation est irréversible puisque le système est mis en contact avec un thermostat de température différente, les transferts thermiques ont lieu irréversiblement du thermostat vers le gaz.

Partie III Bilan d'entropie en présence d'une transition de phase

R9. **Donner** la relation entre l'entropie massique de transition de phase et l'enthalpie massique de transition de phase. Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ? Quelle est la température qui intervient dedans ?

Solution: Au cours d'une transition de phase $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ayant lieu à la température constante du changement d'état T_{12} , l'enthalpie massique et l'entropie massique de transition de phase sont reliées par :

$$\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} s(T_{12}) = \frac{\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} h(T_{12})}{T_{12}}$$

R10. Quelle propriété de l'enthalpie et de l'entropie permet d'utiliser un chemin fictif ?

Solution: L'enthalpie et de l'entropie sont des fonctions d'état dont les variations ne dépendent pas du chemin suivi, mais seulement de l'état initial et de l'état final.

R11. **Donner** l'expression de la variation d'enthalpie d'une phase condensée dont on connaît la capacité thermique massique.

Solution: Variation d'enthalpie : $\Delta H = mc(T_f - T_i)$

En rentrant du challenge, après une mauvaise réception lors de la grande finale de balle au prisonnier, vous ressentez une douleur au poignet de votre main d'écriture. Ne souhaitant pas ne pas pouvoir écrire lors du merveilleux DS de physique, vous décidez de mettre du froid sur votre main. Vous sortez alors des glaçons de masse $m = 100 \text{ g}$ du congélateur à $T_i = -18^\circ\text{C}$. Une idée lumineuse de physique vous traverse alors l'esprit, et vous abandonnez ces glaçons (à leurs tristes sorts...) dans une assiette vide dans votre cuisine de température constante $T_c = 25^\circ\text{C}$.

La transformation est considérée comme isobare.

R12. La transformation de l'eau est-elle isochore ?

Caractériser l'état final du système.

Solution: Système : glaçon de masse $m = 100 \text{ g}$

EI $\xrightarrow[\text{isobare}]{\text{monotherme à } T_c=25^\circ\text{C}}$ EF

eau (s) eau (l)

$m = 100 \text{ g}$ $m = 10 \text{ g}$

$T_i = -18^\circ\text{C}$ $T_f = T_c = 25^\circ\text{C}$

L'eau va donc subir une fusion isobare monotherme.

R13. **Décrire** un chemin fictif permettant d'exprimer la variation de l'enthalpie et de l'entropie de l'eau.

Solution: L'enthalpie et l'entropie sont des fonctions d'état dont les variations ne dépendent pas du chemin suivi.

$EI \xrightarrow[\text{de l'eau solide}]{\text{échauffement}}$ eau (s) $m = 10 \text{ g}$ $T_i = -18^\circ\text{C}$	$A \xrightarrow{\text{fusion}}$ eau (s) m $T_0 = 273 \text{ K}$	$B \xrightarrow[\text{de l'eau liquide}]{\text{échauffement}}$ eau (l) m T_0	EF eau (l) m $T_f = T_c = 25^\circ\text{C}$
--	--	---	--

R14. **Exprimer** la variation de l'enthalpie de l'eau, et en déduire le transfert thermique reçu par l'eau.

Solution:

- Échauffement de l'eau solide de T_i à T_0 : $\Delta_{EI \rightarrow A}H = mc_g(T_0 - T_i)$
- Fusion à T_0 : $\Delta_{A \rightarrow B}H = +m\Delta_{\text{fus}}h(T_0)$
- Échauffement de l'eau liquide de T_0 à T_c : $\Delta_{B \rightarrow EF}S = mc_\ell(T_c - T_0)$

$$\Delta H = m(c_g(T_0 - T_i) + \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_\ell(T_c - T_0))$$

La transformation est isobare, d'après le 1^{er} principe avec l'enthalpie : $\Delta H = W' + Q$, or $W' = 0$ (le seul travail est celui des forces de pression, déjà inclus dans ΔH).

Donc $Q = \Delta H = m(c_g(T_0 - T_i) + \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_\ell(T_c - T_0))$

R15. **En déduire** l'entropie échangée reçue par l'eau.

Solution: La transformation est monotherme avec la cuisine, à la température T_c :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_c} = \frac{m(c_g(T_0 - T_i) + \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_\ell(T_c - T_0))}{T_c}$$

R16. **Exprimer** la variation d'entropie du système au cours de la transformation.

Solution: Variation de l'entropie

- Échauffement de l'eau solide de T_i à T_0 : $\Delta_{EI \rightarrow A}S = mc_g \ln \frac{T_0}{T_i}$
- Fusion à T_0 : $\Delta_{A \rightarrow B}H = m\Delta_{\text{fus}}h(T_0) = m\frac{\Delta_{\text{fus}}h(T_0)}{T_0}$
- Échauffement de l'eau liquide de T_0 à T_c : $\Delta_{B \rightarrow EF}S = mc_\ell \ln \frac{T_c}{T_0}$

Ainsi : $\Delta S = m \left(c_g \ln \frac{T_0}{T_i} + \frac{\Delta_{\text{fus}}h(T_0)}{T_0} + c_\ell \ln \frac{T_c}{T_0} \right)$



Remarque –

ΔS se calcule avec le même chemin fictif que ΔH .

R17. **En déduire** l'entropie créée. **Commenter.**

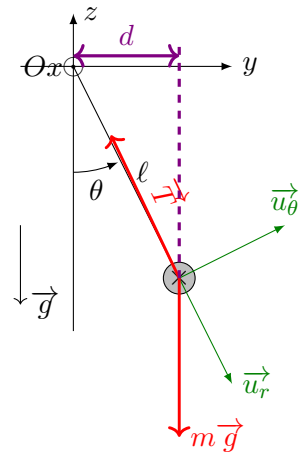
Solution: D'après le 2^e principe : $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

Alors $S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}}$

Le glaçon est mis initialement en contact avec un environnement de température supérieure, le transfert thermique a lieu irréversiblement de l'air de la cuisine vers le glaçon, par conséquent la transformation est nécessairement irréversible.

Exercice n°2 Mesure du temps par horloge à balancier (D'après Concours EPITA-IPSA 2020)

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligée. On note ℓ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On négligera tout frottement. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, avec z vers le haut et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Partie I Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle

R1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, donner une expression de la période T des oscillations du pendule. Cette expression sera à une constante multiplicative A près, A étant sans dimension. On ne fera pas intervenir les conditions initiales dans l'analyse.

Solution:

— La période peut dépendre a priori de g , ℓ et m .

On veut obtenir un temps, à partir d'une accélération, d'une longueur et d'une masse. La masse m ne peut pas intervenir.

Il reste g et ℓ , avec $\left[\frac{g}{\ell}\right] = T^{-2}$. Ainsi on peut proposer : $T = A\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

— On peut aussi poser $T = A \times g^\alpha \times \ell^\beta \times m^\gamma$

Puis traduire cette relation en terme de dimensions : $T = L^\alpha T^{-2\alpha} \times L^\beta \times M^\gamma$

$$\text{Puis traduire l'égalité : } \begin{cases} T : 1 = -2\alpha \\ L : 0 = \alpha + \beta \\ M : 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 1 \times g^{-\frac{1}{2}} \times \ell^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'obtenir A , il faut mener une analyse plus poussée du problème. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Partie II Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

On suppose que le pendule est lâché d'un angle initial $\theta_0 \ll 1 \text{ rad}$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 = 0$.



Remarque —

Attention à la RIGUEUR des définitions.

R2. Donner la définition du moment cinétique par rapport à un axe (Ox) .

Solution: Moment cinétique par rapport à un axe (Ox) : $L_{Ox}(M) = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_x$

R3. Établir l'expression du moment cinétique du point M par rapport à (Ox) en fonction des paramètres du problème. On fera apparaître sur un schéma tout vecteur introduit pour le calcul.

Solution: Le point M décrit un mouvement circulaire de rayon ℓ :

$$\begin{aligned} L_{Ox}(M) &= (\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_x \\ &= (\ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_x \\ &= m\ell^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

R4. Définir le moment d'une force $\vec{f}$ par rapport à un axe (Ox) .

Solution: Moment d'une force $\vec{f}$ par rapport à un axe (Ox) : $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{f}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_x$

R5. Après avoir effectué le bilan des forces, **établir** les expressions des moments des forces qui s'exercent sur M à l'aide du **bras de levier**. Toutes les constructions nécessaires devront être définies sur un schéma.

Solution: Système : $M(m)$

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

— poids $m\vec{g}$

$$|\mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g})| = mgd = mg\ell \sin(\theta)$$

or $m\vec{g}$ fait tourner dans le sens indirect, donc $\mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g}) < 0$, donc $\mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g}) = -mg\ell \sin(\theta)$

— tension du fil $\vec{T}$, sa droite d'action coupe l'axe (Ox) , donc le bras de levier est nul, donc $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}) = 0$

R6. Après avoir énoncé le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Ox) , établir l'équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

Solution: Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe orienté $(Ox$ fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL_{Ox}(M/\mathcal{R})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} &= \mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g}) \\ m\ell^2\ddot{\theta} &= -mg\ell \sin(\theta) \\ \ell\ddot{\theta} &= -g \sin(\theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

R7. **Faire une hypothèse** qui permet de résoudre simplement cette équation. La **résoudre** en donnant l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0 , g , ℓ et t .

Solution: Dans le cas des mouvements de petite amplitude, avec $\theta \ll 1$ rad, on peut approximer $\sin(\theta) \approx \theta$

L'équation différentielle du mouvement devient : $\ell\ddot{\theta} = -g\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

Solution générale : $\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$

Avec $\theta(0) = \theta_0 = A$ et $\dot{\theta}(0) = B\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0$

Ainsi, $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$

R8. **Déterminer** l'expression T_0 de la période des oscillations.

Solution: La période des oscillations est telle que $\theta(t + T_0) = \theta(t)$, soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

R9. Un peu avant la Révolution française, il a été proposé de définir l'unité « un mètre » comme la longueur du fil d'un pendule pour lequel une demi-oscillation dure une seconde (la période est donc de 2 s). Ce n'est finalement pas ceci qui a été retenu, mais une définition basée sur la longueur du méridien terrestre. Quelle est aujourd'hui la longueur d'un tel pendule ?

Solution: $\ell = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 0,99 \text{ m}$, soit un peu moins que 1,0 m.

Exercice n°3 Étude du mouvement d'un satellite (D'après CCINP MP 2025)

On se propose dans ce problème d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T .

Partie I Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_T$) considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

R1. **Rappeler** la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.

Solution: Le référentiel géocentrique est le référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les trois axes pointent vers trois étoiles lointaines pour être considérées comme fixes.

Le principe d'inertie stipule l'existence d'une classe privilégiée de référentiels dans lesquels un système isolé ou pseudo-isolé persévère dans son mouvement rectiligne uniforme.

R2. **Donner** l'expression $\vec{F}_g$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m en fonction de la constante de gravitation universelle G , de la masse M_T , de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$.

Solution: Système : mobile $M(m)$

Référentiel : géocentrique considéré galiléen à l'échelle du mouvement du satellite

Force gravitationnelle exercée par la Terre sur M : $\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}$

R3. **Montrer** que le moment cinétique $\vec{L}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. **En déduire** que la trajectoire du mobile est plane.

Solution: On applique la loi du moment cinétique à M par rapport au centre de la Terre, O , dans le référentiel géocentrique galiléen : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g)$

Or $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$, car $\vec{F}_g$ est colinéaire à $\vec{OM}$ (c'est une force centrale).

Ainsi, le moment cinétique $\vec{L}_O$ est constant

Le moment cinétique est défini par : $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$ est orthogonal à chaque instant au vecteur position et au vecteur vitesse. Autrement dit, $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux à chaque instant au vecteur $\vec{L}_O$ constant. Ces deux vecteurs sont donc contenus à chaque instant dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_O$, le mouvement a lieu dans le plan con

Dans la suite, on associera au référentiel ($\mathcal{R}_T$) le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\vec{L}_O$ soit aligné avec $\vec{e}_z$.

On posera $\vec{L}_O = L_0 \vec{e}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ) , de centre O , pour décrire le mouvement du mobile (figure 1).

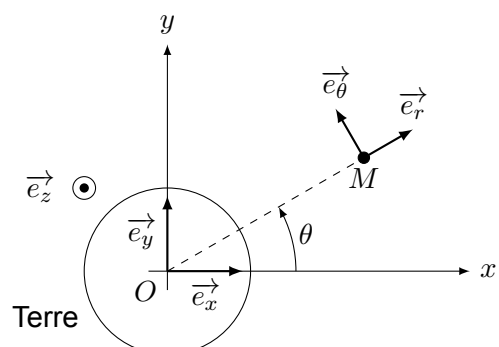


FIGURE 1 – Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

R4. **Exprimer** le moment cinétique $\mathcal{L}_O$ en fonction de r , $\dot{\theta}$, m .

Solution: Dans la base polaire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_O &= \vec{\mathcal{L}}_O \cdot \vec{e}_z \\ &= (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z \\ &= (r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)) \cdot \vec{e}_z \\ &= mr^2\dot{\theta}\end{aligned}$$



Remarque –

L'énoncé demandé d'exprimer $\mathcal{L}_O$, qui d'après $\vec{\mathcal{L}}_O = \mathcal{L}_O\vec{e}_z$, est la composante de $\vec{\mathcal{L}}_O$ selon $\vec{e}_z$.

R5. **Montrer** que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. **Établir** l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

Solution: Travail de la force F_g lors du déplacement de M entre A et B :

$$\begin{aligned}W_{AB}(F_g) &= \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{OM} \\ &= \int_A^B -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi\vec{u}_\varphi) \\ &= -GmM_T \int_A^B \frac{dr}{r^2} \\ &= -GmM_T \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \\ &= - \left(-\frac{GmM_T}{r_B} - \left(-\frac{GmM_T}{r_A} \right) \right) \\ &= - \left(-\frac{GmM_T}{r_B} + K - \left(-\frac{GmM_T}{r_A} + K \right) \right)\end{aligned}$$

La force gravitationnelle est donc conservative.

On identifie l'énergie potentielle gravitationnelle : $\mathcal{E}_p = -\frac{GmM_T}{r} + K$, où K est une constante.

Souvent on choisit l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle à très grande distance de la masse m_O , alors

$$K = 0, \text{ soit } \boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{GM_T m}{r}}$$

R6. **Montrer que** l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé énergie potentielle effective, que l'on exprimera en fonction de G , m , M_T , $\mathcal{L}_O$ et de r .

Solution: Énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\|\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\|^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\mathcal{L}_O}{mr^2}\right)^2 - \frac{GmM_T}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_O^2}{mr^2} - \frac{GmM_T}{r}\end{aligned}$$

On identifie : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_O^2}{mr^2} - \frac{GmM_T}{r}$



Remarque –

Passer par la constante des aires n'était pas nécessaire, il était plutôt préférable d'exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de $\mathcal{L}_O$.

R7. **Expliquer** pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

Solution: D'après l'expression précédente, $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, donc $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$

Par conséquent, le mobile peut se retrouver à une distance r du centre de la Terre à condition qu'à cette distance r l'énergie potentielle effective soit plus faible que son énergie mécanique.

R8. **Représenter graphiquement**, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r .

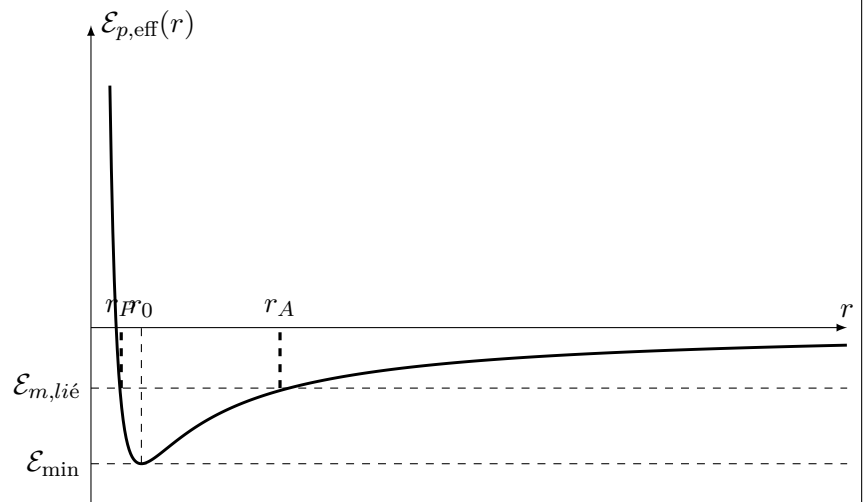
Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

Solution:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{E}_{p,\text{eff}} = +\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{p,\text{eff}} = 0$$

Pour que le système soit en état lié, il faut que r soit borné sur le mouvement, pour cela il faut que $\mathcal{E}_m$ soit strictement négative (et supérieure à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective).



R9. Pour un mouvement elliptique quelconque, **indiquer** à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective.

Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

Solution: L'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective aux deux points extrêmes de la trajectoire elliptique : à l'apogée (le point le plus éloigné de la Terre), et au périégée (le point le plus proche de la Terre).

Dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective, un seul rayon vérifie l'inégalité $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, par conséquent le mouvement est circulaire de rayon qui minimise $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R . Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m , assimilable à un point matériel.

R10. **Justifier** que le mouvement circulaire à force centrale est nécessairement uniforme.

Solution: Le moment cinétique se conserve, donc $mR^2\dot{\theta}$ est constant, or m est constant, et sur un mouvement circulaire R est constant, ce qui impose $\dot{\theta}$ constant.

De plus, la norme du vecteur vitesse s'écrit $v = R\dot{\theta}$ et est donc constante, par conséquent le mouvement est uniforme.

R11. **Établir** l'expression de la norme v du vecteur vitesse sur l'orbite circulaire en fonction de G , M_T et R .

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_g \\ m\left(-\frac{v^2}{R}\vec{u}_r\right) &= -\frac{GmM_T}{R^2}\vec{u}_r \\ -m\frac{v^2}{R} &= -\frac{GmM_T}{R^2} \\ v^2 &= \frac{GM_T}{R} \end{aligned}$$

Soit $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$

R12. **Établir** la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

Solution: Le mouvement est uniforme, donc la période du mouvement s'écrit :



Remarque –

Ne pas oublier de préciser que le mouvement est uniforme, ce qui permet d'écrire la durée comme la distance parcourue sur la vitesse.

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi R}{v} \\ T &= 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM_T}} \\ T &= 2\pi \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 R^3}{GM_T} \end{aligned}$$

On retrouve la 3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

R13. **Établir** l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G , M_T , m et de R .

Solution: Ainsi l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m,\text{alt}} &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ \mathcal{E}_{m,\text{alt}} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R} \\ &= \frac{1}{2}m \frac{GM_T}{R} - \frac{GmM_T}{R}\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{m,\text{alt}} = -\frac{GmM_T}{2R}$$

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

Partie II Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré figure 2, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périégée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

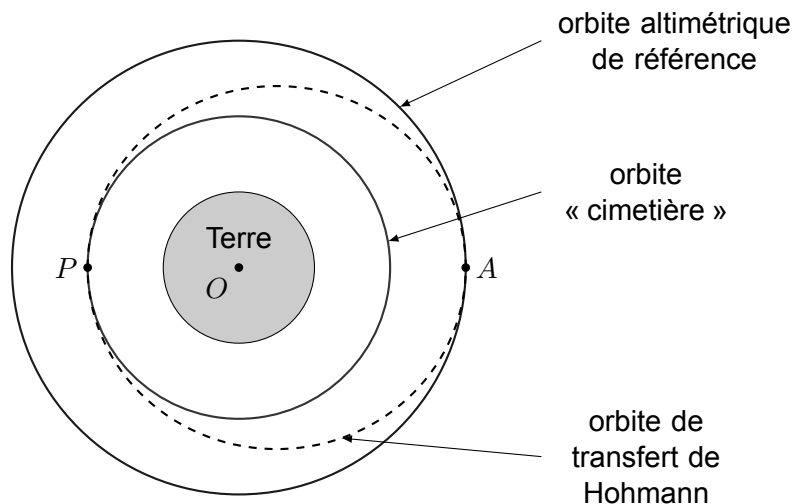


FIGURE 2 – Tracé des différentes orbites du satellite

R14. **Exprimer** le demi-grand axe de l'ellipse de transfert en fonction des données.

Solution: Le grand axe est la distance PA , donc $2a = R + R_c$, donc $R = \frac{R + R_c}{2}$

R15. En utilisant l'équation (1), **montrer que** l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}$$

Solution: On part de l'expression de l'énergie mécanique trouvée plus haut : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$.

Au niveau du périhélie et de l'apogée la trajectoire est tangente à $\overrightarrow{OM}$, et donc : $\dot{r} = 0$. On a alors : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_P) = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_A)$.

$r_A = R$ et $r_P = R_c$ sont solution de l'équation : $\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r}$

Soit $\mathcal{E}_m r^2 + GmM_T r - \frac{\mathcal{L}_O^2}{2m} = 0$, qui a les 2 racines : $r = \frac{-GmM_T \pm \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{E}_m}$

En sommant les deux racines, on obtient : $2a = -\frac{GmM_T}{\mathcal{E}_m}$, soit $\mathcal{E}_m = -\frac{GmM_T}{2a} = -\frac{GmM_T}{2(R + R_c)}$

R16. **Exprimer** la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Solution: Variation de l'énergie mécanique lors du changement d'orbite :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}} \\ &= -\frac{GmM_T}{R + R_c} + \frac{GmM_T}{2R} \\ &= GmM_T \times \frac{R + R_c - 2R}{2R(R + R_c)} \\ &= GmM_T \frac{R_c - R}{2R(R + R_c)} < 0\end{aligned}$$

$R_c < R$, donc $\Delta\mathcal{E}_m < 0$, donc l'objet doit perdre de l'énergie mécanique pour passer sur l'orbite de transfert.

R17. **En justifiant la réponse**, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetièr.

Solution: L'énergie mécanique sur l'orbite cimetièr est : $\mathcal{E}_{m,\text{cim}} = -\frac{GmM_T}{2R_c}$.

La variation d'énergie mécanique entre l'orbite de transfert et l'orbite cimetièr est donc : $\Delta\mathcal{E}'_m = \mathcal{E}_{m,\text{cim}} - \mathcal{E}_{m,\text{tr}}$.

Ainsi $\Delta\mathcal{E}'_m = -\frac{GmM_T}{2R_c} - \left(-\frac{GmM_T}{R + R_c}\right) = -GmM_T \frac{R - R_c}{2R_c(R + R_c)} < 0$.

La variation d'énergie mécanique calculée est négative, le satellite doit donc perdre de l'énergie pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite cimetièr. Or au niveau du transfert le rayon est localement constant, le satellite doit donc perdre de l'énergie cinétique, soit être freiné en P .