

? Lundi 30 mars 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°9 (2) – Corrigé

Exercice n°1 Thermodynamique (Durée ~ 1h)

Partie I Deuxième principe

R1. Deuxième principe de la thermodynamique :

(a) L'énoncer complètement.

Solution:

1. À tout système thermodynamique est associée une **fonction d'état extensive**, notée S , et appelée **entropie**.
2. Au cours d'une transformation d'un **système FERMÉ** entre deux états d'équilibre thermodynamique :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$$

- avec $S_{\text{éch}}$, l'**entropie échangée** reçue algébriquement par le système au cours de la transformation :

$$S_{\text{éch}} = \sum_i \frac{Q_i}{T_{\text{ext},i}}$$

- $T_{\text{ext},i}$ la température constante du thermostat i avec lequel le système est en contact,
- Q_i le transfert thermique reçu par le système au cours de la transformation, en contact avec le thermostat de température $T_{\text{ext},i}$ constante ;

(b) **Donner** les **noms** et **unités** des grandeurs y intervenants.

Solution: S , $S_{\text{créée}}$ et $S_{\text{éch}}$ s'expriment en Joule par Kelvin ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$).

(c) Que peut-on dire sur l'entropie créée ?

Solution: L'**entropie créée** $S_{\text{créée}}$, qui est **nécessairement positive ou nulle**.

R2. **Citer** des causes d'irréversibilité.

Solution:

- les frottements,
- les inhomogénéités de température, pression, concentration,
- les changements d'état pas à température constante.

R3. Lois de Laplace

(a) **Énoncer** une loi de Laplace et les hypothèses permettant de les utiliser.

Solution: On peut écrire, pour

- un **gaz parfait**, de coefficient γ constant,
 - **fermé** (n constante),
 - au cours d'une **transformation adiabatique réversible**,
 - échangeant uniquement du travail des forces de pression (pas d'autres travaux)
- $PV^\gamma = \text{constante}$

(b) **Établir** les deux autres lois de Laplace à partir de la précédente.

Solution: Partons de

$$\begin{aligned} P_i V_i^\gamma &= P_f V_f^\gamma \\ \frac{nRT_i}{V_i} V_i^\gamma &= \frac{nRT_f}{V_f} V_f^\gamma \\ T_i V_i^{\gamma-1} &= T_f V_f^{\gamma-1} \\ P_i V_i^\gamma &= P_f V_f^\gamma \\ P_i \left(\frac{nRT_i}{P_i} \right)^\gamma &= P_f \left(\frac{nRT_f}{P_f} \right)^\gamma \\ P_i^{1-\gamma} T_i^\gamma &= P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma \end{aligned}$$

Partie II Bilan d'entropie sur un gaz parfait

On considère un échantillon de $n = 41$ mol de gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 7/5$, de température initiale $T_i = 20^\circ\text{C}$ est mis en contact avec un thermostat de température $T_0 = 100^\circ\text{C}$. Le gaz est enfermé dans une enceinte indéformable. (Cet exemple peut correspondre à une bouteille d'air en présence d'un incendie...).

R4. **Exprimer** la variation d'entropie du système.

Solution: Système : n moles de gaz parfait

EI	$\xrightarrow[\text{monotherme}]{\text{isochore}}$	EF
$T_i = 20^\circ\text{C}$		$T_f = T_0 = 100^\circ\text{C}$
V_i		$V_f = V_i$
P_i		$P_f =$

 **Remarque –**

† La transformation n'est pas monobare.

D'après le formulaire : $\Delta S = nC_{V,m} \ln \frac{T_f}{T_0} = \frac{5}{2} nR \ln \frac{T_f}{T_0}$

R5. **Exprimer** le transfert thermique reçu par le gaz. **En déduire** l'entropie échangée.

Solution: D'après le premier principe : $\Delta U = W + Q$

La transformation étant isochore : $W = 0$

Donc $Q = \Delta U = nC_{V,m}(T_f - T_i) = \frac{5}{2} nR(T_f - T_i)$

La transformation étant monotherme, l'entropie échangée s'exprime selon : $S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_0} = \frac{5}{2} nR \left(1 - \frac{T_i}{T_0} \right)$

R6. **En déduire** l'entropie créée. Déterminer le signe et **conclure**.

Solution: D'après le deuxième principe $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

Ainsi : $S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} = \frac{5}{2} nR \left[\ln \frac{T_f}{T_0} + \frac{T_0}{T_f} - 1 \right]$

Posons $x = \frac{T_0}{T_f}$, $x - 1 - \ln(x) \geq 0$, donc $\frac{T_0}{T_f} - 1 - \ln \frac{T_0}{T_f} \geq 0$

La transformation est irréversible puisque le système est mis en contact avec un thermostat de température différente, les transferts thermiques ont lieu irréversiblement du thermostat vers le gaz.

Partie III Bilan d'entropie en présence d'une transition de phase

R7. **Donner** la relation entre l'entropie massique de transition de phase et l'enthalpie massique de transition de phase. Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ? Quelle est la température qui intervient dedans ?

Solution: Au cours d'une transition de phase $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ayant lieu à la température constante du changement d'état T_{12} , l'enthalpie massique et l'entropie massique de transition de phase sont reliées par :

$$\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} s(T_{12}) = \frac{\Delta_{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} h(T_{12})}{T_{12}}$$

En rentrant du challenge, après une mauvaise réception lors de la grande finale de balle au prisonnier, vous ressentez une douleur au poignet de votre main d'écriture. Ne souhaitant pas ne pas pouvoir écrire lors du merveilleux DS de physique, vous décidez de mettre du froid sur votre main. Vous sortez alors des glaçons de masse $m = 100$ g du congélateur à $T_i = -18$ °C. Une idée lumineuse de physique vous traverse alors l'esprit, et vous abandonnez ces glaçons (à leurs tristes sorts...) dans une assiette vide dans votre cuisine de température constante $T_c = 25$ °C.

La transformation est considérée comme isobare.

R8. La transformation de l'eau est-elle isochore ?

Caractériser l'état final du système.

Solution: Système : glaçon de masse $m = 100$ g

EI	$\xrightarrow[\text{isobare}]{\text{monotherme à } T_c = 25 \text{ °C}}$	EF
eau (s)		eau (l)
$m = 100$ g		$m = 10$ g
$T_i = -18$ °C		$T_f = T_c = 25$ °C

L'eau va donc subir une fusion isobare monotherme.

R9. **Exprimer** le transfert thermique reçu par l'eau.

Solution:
L'enthalpie et l'entropie sont des fonctions d'état dont les variations ne dépendent pas du chemin suivi.

EI	$\xrightarrow[\text{de l'eau solide}]{\text{échauffement}}$	A	$\xrightarrow{\text{fusion}}$	B	$\xrightarrow[\text{de l'eau liquide}]{\text{échauffement}}$	EF
eau (s)		eau (s)		eau (l)		eau (l)
$m = 10$ g		m		m		m
$T_i = -18$ °C		$T_0 = 273$ K		T_0		$T_f = T_c = 25$ °C

— Échauffement de l'eau solide de T_i à T_0 : $\Delta_{EI \rightarrow A} H = mc_g(T_0 - T_i)$

— Fusion à T_0 : $\Delta_{A \rightarrow B} H = +m\Delta_{\text{fus}}h(T_0)$

— Échauffement de l'eau liquide de T_0 à T_c : $\Delta_{B \rightarrow EF} S = mc_\ell(T_c - T_0))$

$$\Delta H = m(c_g(T_0 - T_i) + \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_\ell(T_c - T_0))$$

Remarque —

ΔH se calcule avec le même chemin fictif que ΔS .

La transformation est isobare, d'après le 1^{er} principe avec l'enthalpie : $\Delta H = W' + Q$, or $W' = 0$ (le seul travail est celui des forces de pression, déjà inclus dans ΔH).

Donc
$$Q = \Delta H = m(c_g(T_0 - T_i) + \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_\ell(T_c - T_0))$$

R10. **En déduire** l'entropie échangée reçue par l'eau.

Solution: La transformation est monotherme avec la cuisine, à la température T_c :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_c} = \frac{m(c_g(T_0 - T_i) + \Delta_{\text{fus}}h(T_0) + c_\ell(T_c - T_0))}{T_c}$$

R11. **Exprimer** la variation d'entropie du système au cours de la transformation.

Solution: Variation de l'entropie

- Échauffement de l'eau solide de T_i à T_0 : $\Delta_{EI \rightarrow A}S = mc_g \ln \frac{T_0}{T_i}$
- Fusion à T_0 : $\Delta_{A \rightarrow B}S = m \frac{\Delta_{\text{fus}}h(T_0)}{T_0}$
- Échauffement de l'eau liquide de T_0 à T_c : $\Delta_{B \rightarrow EF}S = mc_\ell \ln \frac{T_c}{T_0}$

Ainsi :
$$\Delta S = m \left(c_g \ln \frac{T_0}{T_i} + \frac{\Delta_{\text{fus}}h(T_0)}{T_0} + c_\ell \ln \frac{T_c}{T_0} \right)$$

R12. **En déduire** l'entropie créée. **Commenter.**

Solution:

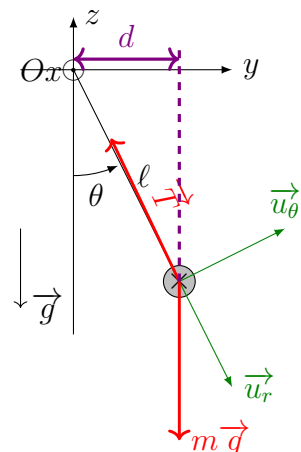
D'après le 2^e principe : $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$

Alors
$$S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}}$$

Le glaçon est mis initialement en contact avec un environnement de température supérieure, le transfert thermique a lieu irréversiblement de l'air de la cuisine vers le glaçon, par conséquent la transformation est nécessairement irréversible.

Exercice n°2 Mesure du temps par horloge à balancier (D'après Concours EPITA-IPSA 2020)

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligé. On note ℓ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On négligera tout frottement. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, avec z vers le haut et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Partie I Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle

R1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, donner une expression de la période T des oscillations du pendule. Cette expression sera à une constante multiplicative A près, A étant sans dimension. On ne fera pas intervenir les conditions initiales dans l'analyse.

Solution:

- La période peut dépendre a priori de g , ℓ et m . On veut obtenir un temps, à partir d'une accélération, d'une longueur et d'une masse. La masse m ne peut pas intervenir.

Il reste g et ℓ , avec $\left[\frac{g}{\ell}\right] = T^{-2}$. Ainsi on peut proposer : $T = A\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

- On peut aussi poser $T = A \times g^\alpha \times \ell^\beta \times m^\gamma$

Puis traduire cette relation en terme de dimensions : $T = L^\alpha T^{-2\alpha} \times L^\beta \times M^\gamma$

Puis traduire l'égalité :

$$\begin{cases} T : 1 = -2\alpha \\ L : 0 = \alpha + \beta \\ M : 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 1 \times g^{-\frac{1}{2}} \times \ell^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'obtenir A , il faut mener une analyse plus poussée du problème. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Partie II Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

On suppose que le pendule est lâché d'un angle initial $\theta_0 \ll 1$ rad avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 = 0$.

R2. En utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à (Ox) , en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

Solution: Moment cinétique par rapport à un axe (Ox) : $L_{Ox}(M) = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_x$

Système : $M(m)$

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g}$

$$|\mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g})| = mgd = mgl \sin(\theta)$$

or $m\vec{g}$ fait tourner dans le sens indirect, donc $\mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g}) < 0$, donc $\mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g}) = -mgl \sin(\theta)$

- tension du fil $\vec{T}$, sa droite d'action coupe l'axe (Ox) , donc le bras de levier est nul, donc $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}) = 0$

Le point M décrit un mouvement circulaire de rayon ℓ :

$$\begin{aligned} L_{Ox}(M) &= (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_x \\ &= (\ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_x \\ &= m\ell^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Ox) fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL_{Ox}(M/\mathcal{R})}{dt} \right)_{|\mathcal{R}} &= \mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{Ox}(m\vec{g}) \\ m\ell^2\ddot{\theta} &= -mgl \sin(\theta) \\ \ell\ddot{\theta} &= -g \sin(\theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

R3. Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre en donnant l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0 , g , ℓ et t .

Solution: Dans le cas des mouvements de petite amplitude, avec $\theta \ll 1$ rad, on peut approximer $\sin(\theta) \approx \theta$

L'équation différentielle du mouvement devient : $\ell\ddot{\theta} = -g\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

Solution générale : $\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$

Avec $\theta(0) = \theta_0 = A$ et $\dot{\theta}(0) = B\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0$

Ainsi, $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$

R4. Donner l'expression T_0 de la période des oscillations.

Solution: La période des oscillations est telle que $\theta(t + T_0) = \theta(t)$, soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

R5. Un peu avant la Révolution française, il a été proposé de définir l'unité « un mètre » comme la longueur du fil d'un pendule pour lequel une demi-oscillation dure une seconde (la période est donc de 2 s). Ce n'est finalement pas ceci qui a été retenu, mais une définition basée sur la longueur du méridien terrestre. Quelle est aujourd'hui la longueur d'un tel pendule ?

Solution: $\ell = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 0,99 \text{ m}$, soit un peu moins que 1,0 m.

Partie III Expression de la période dans le cas des grandes oscillations

On remplace la ficelle par une tige rigide, de masse négligeable par rapport à la masse m . Ceci ne change donc rien à la mise en équation, et permet simplement au pendule de faire des mouvements de grande amplitude sans que la ficelle ne se détende (par exemple lorsque le pendule est vers $\theta = \pi$). La force exercée par la tige sur la masse ne travaille pas. On ne tiendra donc pas compte de cette tige.

R6. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de la masse ponctuelle M peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos(\theta)$$

Solution: Énergie mécanique, en choisissant comme origine de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(z=0) = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mgz \\ &= \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mg(-\ell \cos(\theta))\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos(\theta)$

Remarque –

 : L'axe Oz vertical ascendant donc $\mathcal{E}_{pp} = +mgz$, mais $z < 0$, donc $z = -\ell \cos(\theta) < 0$.

On suppose dans la suite que le pendule n'effectue pas de tour complet, et qu'il est lâché d'un angle θ_0 avec une vitesse angulaire initiale nulle.

R7. Justifier qu'au cours du mouvement, $\mathcal{E}_m = -mgl \cos(\theta_0)$

Solution: Initialement, le pendule est lâché de θ_0 sans vitesse initiale, donc $\mathcal{E}_m(t=0) = -mgl \cos(\theta_0)$

De plus, d'après le théorème de la puissance mécanique $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{T}) = 0$, car $\vec{T}$ ne travaille pas.

Ainsi l'énergie mécanique vaut à chaque instant : $\boxed{\mathcal{E}_m = -mgl \cos(\theta_0)}$

R8. En déduire une expression de l'angle infinitésimal $d\theta$ parcouru par le pendule pendant un temps dt .

Solution: D'après la conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) &= -mgl \cos(\theta_0) \\ \frac{1}{2}m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl \cos(\theta) &= -mgl \cos(\theta_0) \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))} \\ d\theta &= \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))} dt \end{aligned}$$

$$\boxed{d\theta = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))} dt}$$

Pendant la première moitié de la première période : θ évolue de θ_0 à $-\theta_0$, donc θ diminue, donc $\dot{\theta} < 0$,

donc $d\theta = -\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))} dt$

Pendant la deuxième moitié de la période, $\dot{\theta} > 0$, donc $d\theta = +\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))} dt$

R9. En déduire que la période des oscillations du pendule s'écrit :

$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \quad (1)$$

Solution: La période est égale à 4 fois la durée nécessaire pour le pendule pour aller de 0 à θ_0 (où

$\dot{\theta} > 0$). Plaçons-nous sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} \\ \frac{T}{4} &= \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} \\ T &= 4 \times \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \end{aligned}$$

Soit
$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

Partie IV Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes

L'équation (1) contient une intégrale difficile à exprimer analytiquement. Nous proposons ici d'obtenir une expression approchée de la période T sans passer par ce calcul d'intégrale.

On part de l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$, avec $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, en on effectue les étapes suivantes :

- On utilise cette fois le développement de $\sin(\theta)$ à l'ordre supérieur : $\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$.
- L'équation différentielle obtenue n'est plus linéaire. On continue toutefois de chercher une solution sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$.
- Pour exprimer le terme en θ^3 , on utilise une formule trigonométrique :

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$$

- On néglige le terme en $\sin(3\omega t)$.

R10. En suivant les indications ci-dessus, montrer qu'on aboutit à l'expression $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)$

Solution:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) &= 0 \\ -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \left(\theta_0 \sin(\omega t) - \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3(\omega t) \right) &= 0 \\ -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \left(\theta_0 \sin(\omega t) - \frac{\theta_0^3}{6} \times \left(\frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t) \right) \right) &= 0 \\ -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \left(\theta_0 \sin(\omega t) - \frac{\theta_0^3}{6} \times \frac{3}{4} \sin(\omega t) \right) &= 0 \\ -\omega^2 + \omega_0^2 - \omega_0^2 \frac{\theta_0^2}{8} &= 0 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)\end{aligned}$$

On obtient donc : $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)$

R11. En déduire qu'à l'ordre le plus bas en θ_0 , on a l'expression suivante de la période des oscillations :

$$T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Solution:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right) \\ \omega &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}} \\ &\approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)\end{aligned}$$

On obtient donc : $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$

Cette formule est appelée formule de Borda. Le graphique ci-dessous montre la comparaison entre T donnée par la formule exacte (relation 1) et T donnée par la formule de Borda. On prend $\theta_0 = 30^\circ$ et $T_0 = 1,0$ s.

R12. En utilisant la formule de Borda, quel pourcentage d'erreur sur la période réelle commet-on ?

Solution: Pour $\theta_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0,52$ rad, on commet une erreur de 0,00025, soit 0,025%.
La formule de Borda est donc tout à fait justifiée dans ce cadre là.

R13. On utilise la formule de Borda. Si on compte 3600 oscillations du pendule, quelle durée s'est-elle écoulée ?

D'après le graphique donné en début d'énoncé, peut-on dire que Huygens avait pris en compte la dépendance en θ_0 pour réaliser ses horloges ?

Solution: Durée de 3600 oscillations : $\Delta t = 3600 \times T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

A.N. : $\Delta t = 3,66.10^3$ s (attention à bien convertir θ_0 en rad).

On a donc une erreur de 60 s par heure, soit 1440 s par jour, bien supérieure aux 10 s précisées sur le graphique. Huygens avait donc bien pris en compte l'effet de l'amplitude pour réaliser ses horloges.

Exercice n°3 Mars (D'après CCMP MPI 2024)

Ce problème décrit des notions connues depuis le XVII^e siècle (la mécanique céleste des trajectoires des planètes et les lois de Kepler et Newton).

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les notations des constantes fondamentales utiles, des données numériques sont regroupés en début d'énoncé.

On pourra noter $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ et $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ la base locale associée aux coordonnées polaires r, θ du point M situé dans le plan (Oxy)

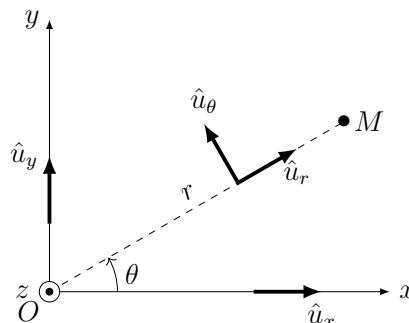


FIGURE 1 – Base locale associée aux coordonnées polaires

Ce problème est consacré aux lois de Kepler (1609 et 1618) et à une mesure historique de l'unité astronomique par CASSINI (1672). On notera que ces travaux sont tous deux nettement antérieurs à la publication de la loi de la gravitation universelle par Newton (1687).

On s'intéressera en particulier aux orbites de la Terre et de Mars, la planète la plus proche de la Terre avec une trajectoire extérieure. Le plan de sa trajectoire est presque confondu (à moins de 2° près) avec le plan de l'écliptique (la trajectoire terrestre). Ces deux trajectoires sont proches de cercles autour du Soleil.

Partie I Généralité sur le mouvement d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On étudie ici, relativement à un référentiel galiléen $(\mathcal{R}_0)$, le mouvement d'un astre $\mathcal{P}$ assimilé à un point P de masse m_P sous l'action du seul champ de gravitation exercé par un autre astre attracteur $\mathcal{A}$ de masse m_A et de centre fixe A . On notera $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$, $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{r} = r\vec{u}_r$.

R1. Quelle condition (inégalité forte) permet de considérer A comme fixe ?

Quelle est l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}$ si les deux astres sont assimilés à des points ?

Solution: Système : astre $P(m_P)$

Référentiel : $\mathcal{R}$ dans lequel le centre A de l'astre $\mathcal{A}$ est supposé fixe.

A peut être considéré comme fixe à la condition que la masse m_A de l'astre $\mathcal{A}$ est très grande devant la masse m_P de l'astre $\mathcal{P}$.

Bilan des forces : force d'attraction gravitationnelle de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}$ $\vec{F} = -\frac{Gmm_A}{r^2}\vec{u}_r$.

R2. Montrer que le mouvement de P est plan ; on notera (Axy) le plan de ce mouvement. Définir la constante C issue de la loi des aires pour ce mouvement et relier cette constante aux coordonnées polaires (r, θ) du mouvement de P dans (Axy) .

Solution: D'après le théorème du moment cinétique à P par rapport à A : $\frac{d\vec{L}_A(P)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$, or $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{AP}$

Donc le moment cinétique de P par rapport à A se conserve.

Par définition $\vec{L}_A(P) = \vec{AP} \wedge m_P \vec{v}(P)$, et par propriété du produit vectoriel $\vec{AP}$ et $\vec{v}(P)$ sont orthogonaux à chaque instant au vecteur constant $\vec{L}_A(P)$, donc ils sont contenus dans LE plan perpendiculaire à $\vec{L}_A(P)$, donc le mouvement est plan dans le plan contenant A .

Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A(P) &= \vec{AP} \wedge m_P \vec{v}(P) \\ &= r\vec{u}_r \wedge m_P(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \\ &= m_P r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z\end{aligned}$$

Le produit $r^2\dot{\theta}$ est donc constant, et est appelé constante des aires : $C = r^2\dot{\theta}$

R3. Exprimer l'énergie potentielle effective de P en fonction de $\mathcal{G}$, C , m_P , m_A et r .

Solution: Energie mécanique :

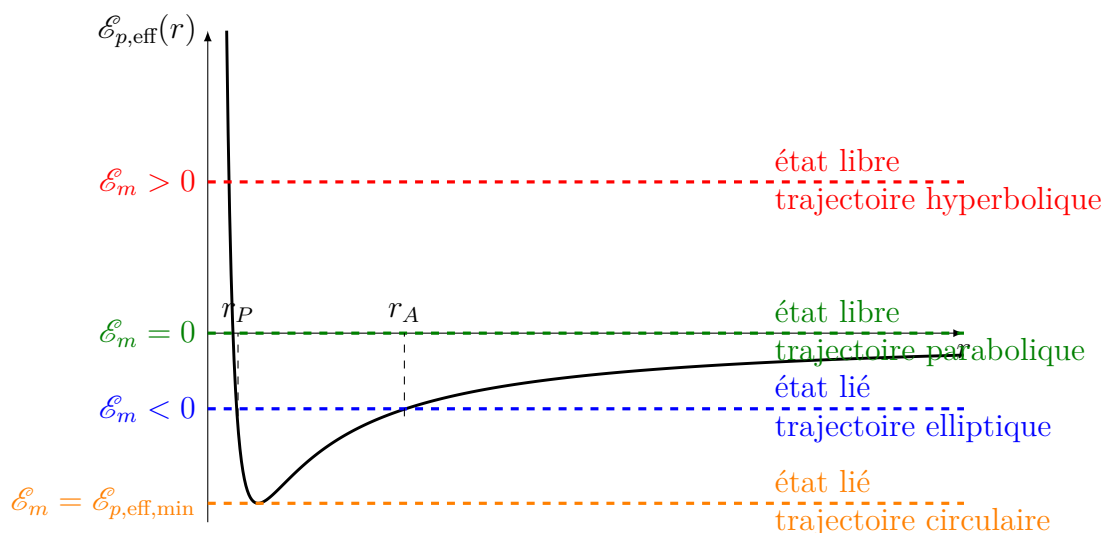
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}m_P \|\vec{v}\|^2 - \frac{\mathcal{G}m_A m_P}{r} \\ &= \frac{1}{2}m_P(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{\mathcal{G}m_A m_P}{r} \\ &= \frac{1}{2}m_P \dot{r}^2 + \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}m_A m_P}{r} \\ &= \frac{1}{2}m_P \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}(r)\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{E}_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}m_A m_P}{r}$

R4. Représenter l'allure de l'énergie potentielle effective.

Distinguer, en justifiant, les différents mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique.

Solution: Allure de $\mathcal{E}_{p,eff}$:



$\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,eff}$: P se trouve à une distance r de A à condition que l'énergie potentielle effective y est plus faible que son énergie mécanique.

Pour $\mathcal{E}_m < 0$, r est borné dans un intervalle $[r_P, r_A]$, par conséquent P serait dans un état lié : il reste au voisinage de A en décrivant une trajectoire elliptique.

Pour $\mathcal{E}_m \geq 0$, r n'est pas borné, le point P peut s'approcher jusqu'à une certaine distance minimale de P , et peut s'en éloigner à l'infini : P est dans un état libre, et décrit une trajectoire parabolique ou hyperbolique.

Partie II Mouvement circulaire d'une planète

Dans cette partie uniquement, on étudie le cas particulier où $\mathcal{P}$ décrit une trajectoire circulaire de rayon R autour du centre de $\mathcal{A}$

R5. Justifier que le mouvement de $\mathcal{P}$ est nécessairement uniforme.

Solution: D'après la loi des aires, si R est constant, alors $\dot{\theta} = \frac{C}{R^2}$ l'est également.

Or sur un mouvement circulaire $v = R\dot{\theta}$, est donc constante, donc le mouvement est uniforme.

R6. Établir l'expression de $\|\vec{v}_P\|$ en fonction de $\mathcal{G}$, m_A et R .

Solution: D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m_P \vec{a}_P &= \vec{F} \\ -m_P \frac{v_P^2}{R} \vec{u}_r &= -\frac{\mathcal{G} m_A m_P}{R^2} \vec{u}_r \\ v_P &= \frac{\mathcal{G} m_A}{R} \end{aligned}$$

Soit $\boxed{v_P = \sqrt{\frac{\mathcal{G} m_A}{R}}}$

R7. En déduire la relation entre la période T de la trajectoire et le rayon R de la trajectoire.

Solution: Le mouvement étant uniforme, la période s'exprime selon :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi R}{v_P} \\ &= \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\mathcal{G} m_A}{R}}} \end{aligned}$$

Soit $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G} m_A}}}$

Dans la suite, le mouvement n'est pas supposé circulaire et on cherche à établir les lois de Kepler dans le cas général.

Partie III Mouvements d'une planète sous l'action d'un astre attracteur

On note $\vec{v}$ la vitesse de P et $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ les vecteurs de la base polaire associée au mouvement de P . $\vec{v}$ est fonction du temps et donc aussi de l'angle polaire θ .

On admet que $\frac{df}{d\theta} = \frac{df}{dt} \times \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{df}{dt}$

R8. Exprimer $\frac{d\vec{v}}{d\theta}$, en utilisant notamment le principe fondamental de la dynamique.

En déduire que $\vec{v}(\theta) = C \frac{\vec{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ où $\vec{e}$ est une constante d'intégration et p un paramètre du mouvement qu'on exprimera en fonction de C , m_A et de la constante universelle de gravitation $\mathcal{G}$.

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{d\theta} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \times \frac{1}{\dot{\theta}} \\ &\stackrel{\text{PFD}}{=} \frac{1}{\dot{\theta}} \times -\frac{\mathcal{G}m_A}{r^2} \vec{u}_r \\ &= -\frac{\mathcal{G}m_A}{r^2 \dot{\theta}} \vec{u}_r \\ &= -\frac{\mathcal{G}m_A}{C} \vec{u}_r \\ \frac{d\vec{v}}{d\theta} &\stackrel{\text{projection}}{=} -\frac{\mathcal{G}m_A}{C} (\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y) \\ \vec{v} &\stackrel{\text{primitive}}{=} -\frac{\mathcal{G}m_A}{C} (\sin(\theta) \vec{u}_x - \cos(\theta) \vec{u}_y) + \vec{K} \quad \text{où } \vec{K} \text{ vecteur constant} \\ \vec{v} &= \frac{\mathcal{G}m_A}{C} \vec{u}_\theta + \vec{K} \\ \vec{v} &= \frac{\mathcal{G}m_A}{C} \left(\vec{u}_\theta + \frac{C}{\mathcal{G}m_A} \vec{K} \right) \\ &= \frac{\mathcal{G}m_A}{C} (\vec{u}_\theta + \vec{e}) \end{aligned}$$

On obtient bien la forme demandée, on peut identifier $\frac{C}{p} = \frac{\mathcal{G}m_A}{C}$, ainsi $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_A}$

R9. Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est sans dimension et situé dans le plan (Axy) du mouvement.

Solution:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{C}{p} (\vec{u}_\theta + \vec{e}) \\ \vec{e} &= \frac{p}{C} \vec{v} - \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ sont contenus dans le plan (Axy) , donc $\vec{e}$ est dans le plan (Axy) .
 $\vec{u}_\theta$ n'a pas de dimension.

$$\left[\frac{p}{C} v \right] = \left[\frac{C}{\mathcal{G}m_A} v \right] = \frac{L^2.T^{-1}}{M.L.T^{-2} \times L^2.M^{-1}} \times L.T^{-1} = 1$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\vec{e} = e \vec{u}_y$ avec $e = \|\vec{e}\| \geq 0$.

R10. Montrer que $\dot{r} = \frac{Ce}{p} \sin(\theta)$ et $r\dot{\theta} = \frac{C}{p}(1 + e \cos(\theta))$.

Solution: Repartons de Q8, et égalisons les deux expressions de $\vec{v}$ dans la base polaire et celle obtenue à Q8 :

$$\begin{aligned}\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta &= \frac{C}{p}(\vec{u}_\theta + \vec{e}) \\ \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta &= \frac{C}{p}(\vec{u}_\theta + e\vec{u}_y) \\ \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta &= \frac{C}{p}(\vec{u}_\theta + e(\cos(\theta)\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\vec{u}_r))\end{aligned}$$

Soit $\dot{r} = \frac{C}{p}e \sin(\theta)$ et $r\dot{\theta} = \frac{C}{p}(1 + e \cos(\theta))$

R11. En déduire r en fonction de p , e et θ et montrer que $e < 1$ pour un mouvement borné. Quelle est, dans ce cas et sans démonstration, la nature de la trajectoire ? On admettra que le mouvement est périodique de période T .

Solution:

$$\begin{aligned}r\dot{\theta} &= \frac{C}{p}(1 + e \cos(\theta)) \\ r \times \frac{C}{r^2} &= \frac{C}{p}(1 + e \cos(\theta)) \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{p}(1 + e \cos(\theta))\end{aligned}$$

soit $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$

Pour un mouvement borné, r garde des valeurs finies, et ne peut atteindre l'infini. Par conséquent $1 + e \cos(\theta)$ ne doit jamais s'annuler. Pour cela, e doit être strictement inférieur à 1. En effet, inversement, si $e > 1$, alors $e \cos(\theta)$ peut atteindre -1 et donc annuler le dénominateur de r .

Pour un mouvement borné : $\frac{p}{1+e} \leq r \leq \frac{p}{1-e}$, soit $\frac{1-e}{p} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1+e}{p}$ et puisque r est toujours positif, il vient donc que $1 - e > 0 \implies e < 1$ puisque $p > 0$

Dans ce cas, le mouvement est elliptique.

Partie IV Période du mouvement

R12. En utilisant la constante des aires et la question précédente, montrer que $T = \frac{\mathcal{I}p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}$ où la constante $\mathcal{I}$

s'obtient par le calcul de l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$.

Solution: Partons de la constante des aires :

$$\begin{aligned} C &= r^2 \dot{\theta} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{C}{r^2} \\ dt &= \frac{r^2}{C} d\theta \\ dt &= \frac{p^2/C}{(1 + e \cos(\theta))^2} d\theta \\ dt &= \frac{p^2}{\sqrt{p \mathcal{G} m_A} (1 + e \cos(\theta))^2} d\theta \\ dt &= \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G} m_A} (1 + e \cos(\theta))^2} d\theta \\ \text{sur une période : } \int_0^T dt &= \int_0^{2\pi} \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G} m_A} (1 + e \cos(\theta))^2} d\theta \\ T &= \mathcal{I} \times \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G} m_A}} \end{aligned}$$

R13. Dans le cas particulier où $e = 0$, préciser la nature de la trajectoire et l'expression de T ; en déduire une des lois de Kepler, préciser laquelle et proposer son énoncé «historique» sous forme d'une phrase en français.

Solution: Si $e = 0$, alors $r(\theta) = p$ et est constant, le mouvement est circulaire, alors $\mathcal{I} = 2\pi$ et on obtient $T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G} m_A}}$. On obtient la 3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_A}$
Énoncé historique : La période au carré du mouvement d'une planète autour du soleil est proportionnelle au demi-grand axe au cube.

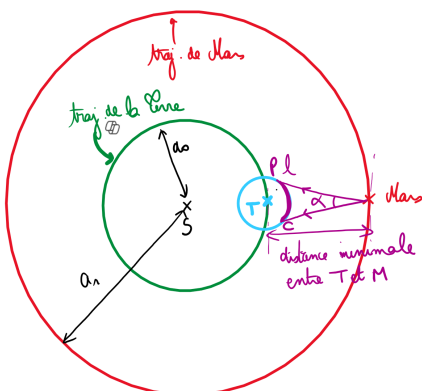
Partie V Mesure de l'unité astronomique

Nous admettons pour la Terre et Mars des orbites circulaires centrées au centre S du référentiel de COPERNIC, de rayons respectifs a_0 (c'est l'unité astronomique) et a_1 , de périodes T_0 et T_1 .

Le principe de la mesure de a_0 proposée par CASSINI, à la fin du XVII^e siècle, consistait à observer simultanément, depuis deux observatoires bien séparés (Paris et Cayenne, distants en ligne droite de $\ell = 7070$ km) la planète Mars lorsqu'elle est à sa distance minimale de la Terre, puis d'évaluer l'angle α entre les deux directions de visée (Paris $\rightarrow$ Mars et Cayenne $\rightarrow$ Mars).

R14. Représenter sur un schéma unique l'ensemble des paramètres géométriques a_0 , a_1 , ℓ , α ci-dessus au moment de la mesure, lors d'une conjonction inférieure (le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre).

Solution:



R15. En déduire la relation permettant de déterminer a_0 en fonction de T_0 , T_1 , ℓ et α .

Solution: D'après le schéma ci-dessus :

$$\begin{aligned} \ell &= (a_1 - a_0) \times \alpha \\ \text{D'après la 3e loi de Kepler} \quad \frac{T_0^2}{a_0^3} &= \frac{T_1^2}{a_1^3} \\ a_1 &= a_0 \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} \\ \ell &= a_0 \left(\left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} - 1 \right) \times \alpha \\ a_0 &= \frac{\ell}{\left(\left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{2/3} - 1 \right) \times \alpha} \end{aligned}$$

R16. La valeur annoncée par CASSINI était $\alpha = 14''$ (secondes d'angle). Est-elle compatible avec la relation ci-dessus ?

Solution: AN : $a_0 = \frac{7070 \times 10^3}{14 \times 4,85 \left[\left(\frac{687}{365} \right)^{2/3} - 1 \right] \times 10^{-6}} \simeq \frac{7,1 \times 10^{12}}{19,4[1,6 - 1]} \simeq 1,7 \times 10^{11} \text{ m}$

La valeur est compatible avec la formule précédente, même si l'écart relatif entre la valeur tabulée et la valeur trouvée est de 13%.