

CONCOURS BLANC 2026 – *Corrigé*

ÉPREUVE de PHYSIQUE

Mardi 12 mai 2026 – De 13h30 à 17h30

Problème I Émissions carbone d'une voiture thermique (CCINP TSI 2026)

Dans son sixième rapport d'évaluation, le Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC) estime à 56 gigatonnes d'équivalent CO_2 les émissions annuelles mondiales. Sur ce total, environ 15% sont imputées au secteur des transports (routier, aérien et maritime).

Dans ce problème, nous nous intéresserons au transport routier responsable de plus de la moitié de ces émissions.

A Fonctionnement de la voiture thermique

On définit le rapport volumétrique comme le rapport $\delta = \frac{V_h}{V_b}$ et la cylindrée comme le volume total admis par l'ensemble des cylindres du moteur lors de la phase d'admission.

Le moteur à essence de cette voiture utilise un mélange air-essence modélisé par un cycle thermodynamique de Beau de Rochas.

Ce cycle est constitué des phases successives suivantes :

- $0 \rightarrow 1$: admission isobare et isotherme du mélange dans la chambre de combustion jusqu'au point mort haut de volume V_h . La quantité de matière de mélange admise sera notée n_e ;
- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique réversible du mélange vers le point mort bas de volume V_b où le mélange est porté à une température de 614 K ;
- $2 \rightarrow 3$: combustion isochore du mélange qui atteint une température de 1800 K ;
- $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique réversible du mélange jusqu'au point mort haut où le mélange descend à une température de 879 K ;
- $4 \rightarrow 1$: ouverture de la soupape modélisée par un refroidissement isochore jusqu'à la température ambiante de 300 K ;
- $1 \rightarrow 0$: éjection isobare et isotherme du mélange jusqu'au point mort bas.

Pour simplifier l'étude, on assimile le mélange air-essence à un système fermé constitué d'une quantité de matière n_e d'un gaz parfait diatomique de coefficient isentropique γ , hors étapes d'admission et d'éjection. On notera {GP} ce système.

On note respectivement W , Q_c et Q_f , le travail reçu par le système de la part du rotor du moteur, le transfert thermique reçu par le système de la part de la source chaude et le transfert thermique reçu par le système de la part de la source froide sur un cycle. On note également d'un indice i , toute variable d'état associée à l'état i .

R1. Identifier les sources chaude et froide, et donner leurs températures.

Solution: La source chaude est la chambre de combustion, de température $T_c = 1800 \text{ K}$
La source froide est l'air atmosphérique, de température $T_f = 300 \text{ K}$

R2. Donner, en justifiant, les signes de Q_f , Q_c et de W .

Solution: Dans un moteur ditherme, le gaz reçoit réellement du transfert thermique de la part de la source chaude, donc $Q_c > 0$, il libère du transfert thermique à la source froide, donc $Q_f < 0$. Son but est de fournir du travail au milieu extérieur, donc $W < 0$.

R3. Représenter le cycle dans le diagramme de Watt (P, V). Commenter le sens de parcours du cycle représenté.

Solution:
Le cycle est décrit dans le sens horaire, donc l'aire est positive, donc $W < 0$, ce qui correspond bien au cycle d'un moteur.

B Étude théorique du rendement

R4. Rappeler la relation de Mayer reliant les capacités thermiques à volume constant C_v et à pression constante C_p de {GP}.

En déduire les expressions de ces capacités thermiques en fonction de n_e , γ et de R , la constante des gaz parfaits.

Solution: Relation de Mayer : $C_p = C_v + nR$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \text{ donc } \gamma C_v = C_v + n_e R, \text{ ainsi } \boxed{C_v = \frac{n_e R}{\gamma - 1}} \text{ et } \boxed{C_p = \frac{\gamma n_e R}{\gamma - 1}}$$

R5. Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par {GP} lors de la phase $2 \rightarrow 3$, en fonction notamment des températures T_2 et T_3 .

Solution: D'après le 1^{er} principe appliqué à {GP} sur la transformation $2 \rightarrow 3$: $\Delta_{23}U = W_{23} + Q_{23}$, avec $\Delta_{23}U = C_v(T_3 - T_2)$, $W_{23} = 0$ car la transformation est isochore. Ainsi $\boxed{Q_{23} = C_v(T_3 - T_2)}$

R6. Exprimer Q_{41} , le transfert thermique reçu par {GP} lors de la phase $4 \rightarrow 1$, en fonction notamment des températures T_1 et T_4 .

Solution: D'après le 1^{er} principe appliqué à {GP} sur la transformation $4 \rightarrow 1$: $\Delta_{41}U = W_{41} + Q_{41}$, avec $\Delta_{41}U = C_v(T_1 - T_4)$, $W_{41} = 0$ car la transformation est isochore. Ainsi $\boxed{Q_{41} = C_v(T_1 - T_4)}$

R7. En déduire une expression du rendement du moteur η en fonction des températures T_1 , T_2 , T_3 et T_4 .

Solution: Le rendement du moteur est défini par $\eta = \frac{-W}{Q_c}$

Ici, $Q_c = Q_{23}$

D'après le 1^{er} principe sur un cycle : $Q_{23} + Q_{41} + W = 0$, donc $W = -Q_{23} - Q_{41}$

$$\text{Ainsi : } \eta = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}, \text{ soit } \boxed{\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

R8. Exprimer la température T_4 en fonction de T_3 , V_b , V_h et de γ .

Solution: La transformation $3 \rightarrow 4$ est adiabatique réversible et le gaz est parfait, donc d'après la loi de Laplace : $T_3 V_b^{\gamma-1} = T_4 V_h^{\gamma-1}$, soit $T_4 = T_3 \left(\frac{V_b}{V_h} \right)^{\gamma-1}$, soit $\boxed{T_4 = \frac{T_3}{\delta^{\gamma-1}}}$

R9. Exprimer la température T_1 en fonction de T_2 , V_b , V_h et de γ .

Solution: De même sur la transformation $1 \rightarrow 2$: $T_1 V_h^{\gamma-1} = T_2 V_b^{\gamma-1}$, soit $\boxed{T_1 = \frac{T_2}{\delta^{\gamma-1}}}$

R10. En déduire l'expression de η en fonction de δ et de γ .

Solution: D'après les trois questions précédentes :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \\ &= 1 + \frac{\frac{T_2}{\delta^{\gamma-1}} - \frac{T_3}{\delta^{\gamma-1}}}{T_3 - T_2} \\ &= 1 - \frac{1}{\delta^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

L'application numérique donne $\eta = 0,59$. On utilisera cette valeur pour la suite.

R11. Établir l'expression du rendement de Carnot η_c associé à ce cycle. Faire l'application numérique et commenter.

Solution: Le rendement de Carnot est le rendement maximal, obtenu pour un cycle entièrement réversible.

1^{er} principe sur le cycle : $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$

2^e principe sur le cycle réversible : $\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \underbrace{S_{créée}}_{=0}$

Soit $Q_f = -Q_c \frac{T_f}{T_c}$

Ainsi $W + Q_c - Q_c \frac{T_f}{T_c} = 0$, soit $\eta_c = \frac{-W}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

A.N. $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{300}{1800} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - 0,17 = 0,83 > \eta$

Le cycle de Beau-de-Rochas décrit ici n'est pas réversible, car les transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ ne le sont pas car le gaz n'est pas à l'équilibre thermiques avec la source de chaleur avec laquelle a lieu la transformation, le transfert thermique qui se produit est irréversible.

Problème II Marcher à son rythme pour aller loin (CCINP TSI 2019)

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_o et de longueur d en rotation autour de l'axe horizontal $(O, \vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O, \vec{e}_x)$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la figure ??). Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est notée J . On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O .

γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH) .

La liaison pivot en O est supposée parfaite.

La jambe ne touche pas le sol dans cette étude.

On néglige tout frottement.

L'accélération de la pesanteur, notée $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, est supposée uniforme.

R12. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire, L_{Ox} de la jambe par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ en fonction de γ et J .

Solution: Moment cinétique de la jambe par rapport à l'axe (Ox) de rotation : $L_{Ox} = J\dot{\gamma}$

R13. Exprimer le moment par rapport à (Ox) des actions mécaniques s'exerçant sur la jambe.

Solution: La liaison pivot d'axe (Ox) est supposée sans frottement puisque tous les frottements sont négligés. Ainsi, le moment de l'action mécanique de liaison par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ est nul.

Le moment du poids est donné par $\Gamma_{Ox} = -m_o g \times \ell$, avec ℓ le bras de levier, qui est la distance entre la droite d'action du poids et l'axe de rotation, soit $d = d' \sin(\gamma)$

Ainsi $\Gamma_{Ox} = -m_o g d' \sin(\gamma)$

R14. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ , caractérisant le mouvement de la jambe.

Solution:

Système : jambe de masse m_o , de moment d'inertie J , de centre d'inertie H

Référentiel d'étude : référentiel terrestre considéré galiléen à l'échelle de l'expérience

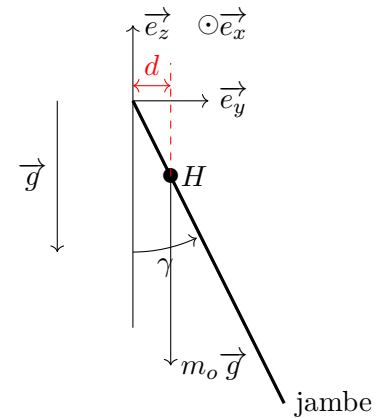
Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m_o \vec{g}$
- action de la liaison pivot (d'axe (Ox))
- tous les frottements sont négligés

Loi du moment cinétique à la jambe dans le référentiel terrestre par rapport à l'axe de rotation (Ox) :

$$\frac{dL_{Ox}}{dt} = \Gamma_{Ox} + \mathcal{M}_{Ox}(\text{liaison})$$

Soit $J\ddot{\gamma} = -m_o g d' \sin(\gamma)$



On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

R15. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

Solution: Énergie cinétique de la jambe : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\gamma}^2$

R16. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de la jambe en fonction de m_o , g , d' , γ et d'une constante.

Solution: Énergie potentielle de pesanteur de la jambe : $\mathcal{E}_{pp} = m g z_G$, avec $z_G = -d' \cos(\gamma) < 0$.

$\mathcal{E}_{pp} = -m_o g d' \cos(\gamma) + K$, où K est une constante.

R17. À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.

Solution: La jambe n'est soumise qu'à son poids qui est une force conservative et à l'action de la liaison pivot qui ne travaille pas (car son moment par rapport à l'axe est nul). L'énergie mécanique de la jambe se conserve.

L'énergie mécanique se conserve, donc sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_{pp}}{dt} = 0 \Leftrightarrow J\ddot{\gamma} + m_o g d' \sin(\gamma) = 0$$

On obtient à nouveau $J\ddot{\gamma} + m_o g d' \sin(\gamma) = 0$

R18. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre d'oscillations de la jambe

est : $T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_o g d'}}$

Solution: En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, $\sin(\gamma) \approx \gamma$

Ainsi l'équation différentielle devient $\ddot{\gamma} + \frac{m_o g d'}{J} \gamma = 0$ qui est l'équation différentielle d'un oscillateur har-

monique de pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{m_o g d'}{J}}$

La période propre vaut donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_o g d'}}$

- R19. Le moment d'inertie de la jambe est de la forme : $J = km_o d^2$ où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

Solution: Le moment d'inertie de la jambe est de la forme : $J = km_o d^2$ où k est une constante positive.

Ainsi la période propre vaut $T = \frac{2\pi\sqrt{km_o d}}{\sqrt{m_o g d'}}$, avec $d' = \frac{d}{2}$

soit $T = 2\pi\sqrt{\frac{2kd}{g}}$ qui est donc indépendante de la masse de la jambe et proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

- R20. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?

Solution: Pour l'adulte : $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{2kd_a}{g}}$, avec $d_a = 90$ cm et $T_a = 1,6$ s.

Pour l'enfant : $T_e = 2\pi\sqrt{\frac{2kd_e}{g}}$, avec $d_e = 40$ cm

Ainsi $T_e = T_a \times \sqrt{\frac{d_e}{d_a}}$

A.N. : $T_e = 1,6 \times \frac{2}{3} \approx 1$ s

- R21. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Solution: La vitesse du randonneur est proportionnelle à la longueur ℓ_{pas} des pas et à la fréquence f des pas : $v \propto \ell_{\text{pas}} f$

On peut supposer que la longueur des pas est proportionnelle à la longueur d'une jambe, ainsi $v \propto df$

Ainsi $v \propto d \times \frac{1}{\sqrt{d}}$ (la fréquence des pas est inversement proportionnelle à la longueur de la jambe) d'après la question précédente).

Ainsi $v \propto \sqrt{d}$

On en déduit que $\frac{v_{\text{adulte}}}{v_{\text{enfant}}} = \sqrt{\frac{d_a}{d_e}} = \sqrt{\frac{90}{40}} \approx 1,5$: la vitesse naturelle de l'adulte est donc environ égale à 1,5 fois celle de l'enfant.

Problème III Expérience de Rüchardt (D'après EPITA 2024)

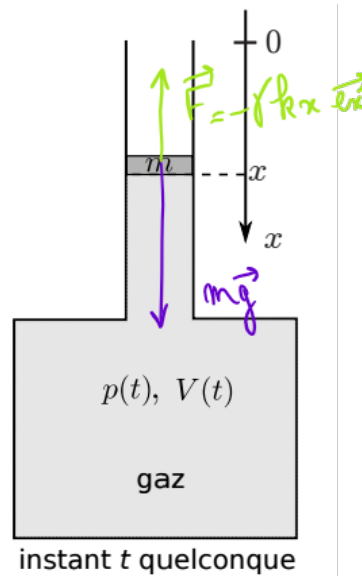


FIGURE 1 – Photographie et schéma de l'expérience

Proposée par Rüchardt en 1929, perfectionnée à plusieurs reprises, cette expérience et ses variantes ont permis des mesures extrêmement précises du coefficient adiabatique $\gamma = C_p/C_V$ de divers gaz.

A Photographie de l'expérience

On souhaite photographier l'expérience, pour cela, on utilise une lentille convergente de distance focale $f' = 10$ cm.

L'expérience est située à la distance $D = 30$ cm de l'appareil photographique.

Le capteur de l'appareil photographique, sur lequel se forme l'image, est une matrice rectangulaire de taille $L \times \ell$ avec $L = 36$ mm et $\ell = 24$ mm constituée de pixels carrés de taille a . Le constructeur indique pour son capteur une résolution de 24 Mpixels.

Le piston oscille sur une distance d'environ 30 cm à une période de 1 seconde.

R22. Rappeler les conditions de Gauss. Que permettent-elles ? Définir ce qu'est le stigmatisme approché.

Solution: La lentille est utilisée dans les conditions de Gauss si les rayons sont paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu inclinés.

Un système optique respecte un stigmatisme approché si tous les rayons issus d'un point se croisent au voisinage d'un point de taille inférieure à la taille d'une cellule du capteur.

R23. Déterminer la valeur numérique de la distance D' entre le capteur et la lentille de l'objectif pour que l'image soit nette sur le capteur.

Solution: D'après la relation de conjugaison $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$

Soit $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{f' + \overline{OA}}$, avec $\overline{OA} = -D = -30$ cm

Soit $D' = \frac{-f'D}{f' - D} = 15$ cm

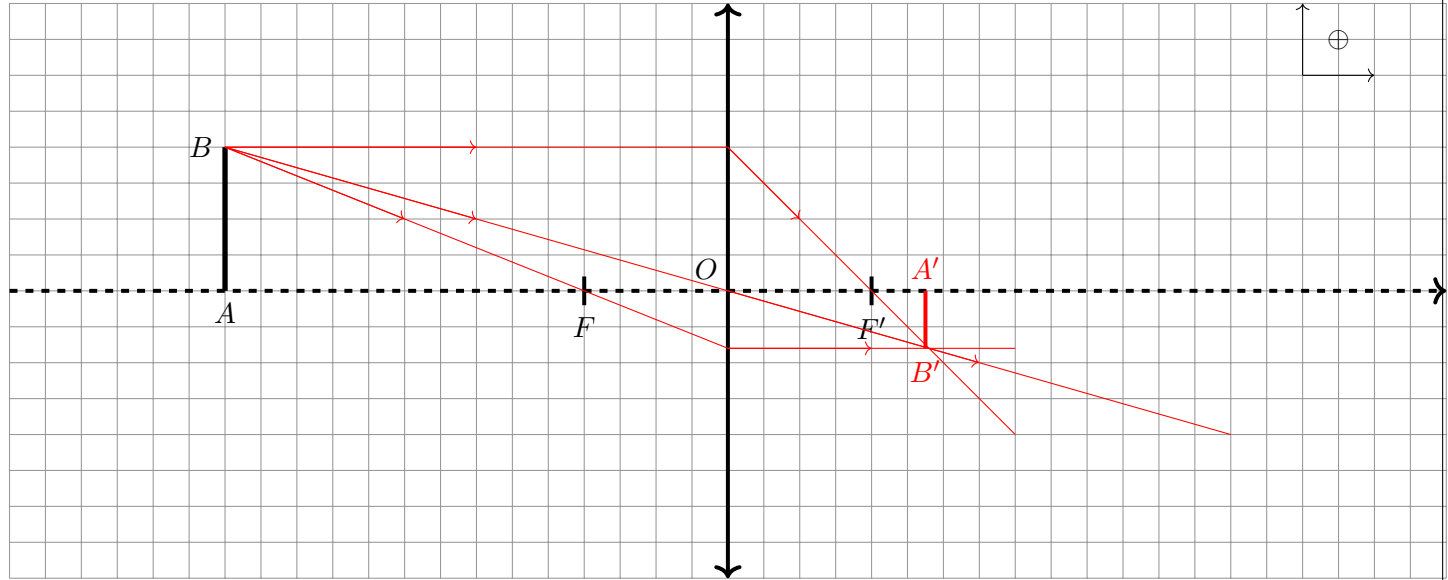
R24. Déterminer la taille de l'image du piston sur le capteur sachant qu'il mesure 1 cm de haut.

Solution: D'après la relation de grandissement de Descartes : $\gamma_1 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{A'B'}{AB}$

On en déduit $\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{D'}{-D} = 1 \times \frac{15}{-30} = -0,5 \text{ cm}$

R25. Effectuer, sans chercher être à l'échelle, un schéma de la situation en traçant les rayons lumineux nécessaires.

Solution:



R26. Expliquer pourquoi si la durée d'exposition du capteur pendant la prise de la photographie est trop longue, la photo sera floue.

Calculer un ordre de grandeur de cette durée maximale d'exposition pour obtenir une photographie nette en fonction des paramètres pertinents, et proposer une application numérique.

Solution: Si au cours du déplacement du piston, l'image d'un point donné occupe plus d'un pixel au cours du déplacement du piston, l'image apparaîtra floue.

Sur la durée τ_{exp} de l'exposition, l'image du point qui se déplace doit être de taille inférieure à a .

Distance parcourue par le piston durant l'exposition : $d = v\tau_{\text{exp}} = \frac{h}{T}\tau_{\text{exp}}$, avec $h = 30 \text{ cm}$ l'amplitude du déplacement et $T = 1 \text{ s}$ sa période.

Cette distance sur le capteur vaut : $d' = |\gamma|d = \frac{D'}{D}d = \frac{D'}{D} \times \frac{h}{T}\tau_{\text{exp}}$

On veut $d' < a$, soit $\tau_{\text{exp}} < \frac{Da}{D'h}T$

Or $a = \sqrt{\frac{36 \times 24}{24 \cdot 10^6}} = \sqrt{36 \cdot 10^{-6}} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$

$\tau_{\text{exp}} < 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

B Détermination de la période des oscillations

On utilise les notations de la figure 1. En particulier :

- V_0 est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston).
 $V(t)$ est le volume de ce même gaz, mais à un instant t quelconque. La pression du gaz est notée $p(t)$ et sa température $T(t)$.
- La pression atmosphérique est p_0 . C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial.
- La section du tube est notée Σ .
- La masse du piston est m et l'intensité de la pesanteur est g .
- $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire descendant.

R27. Rappeler la loi de Laplace reliant p_0 , V_0 , $p(t)$, $V(t)$, avec $\gamma = C_p/C_V$ l'exposant adiabatique du gaz. Rappeler les hypothèses nécessaires pour que la loi de Laplace s'applique.

Solution: Pur un système fermé, de gaz parfait, au cours d'une transformation adiabatique et réversible :

$$p_0 V_0^\gamma = p(t) V(t)^\gamma$$

On suppose dans toute cette partie **B** que cette loi s'applique.

On admet que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston se met sous la forme :

$$\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x \quad (1)$$

R28. En plus de $\vec{F}$, la seule autre force prise en compte comme agissant sur le piston est la force de pesanteur.

À l'aide d'une étude mécanique, établir une équation différentielle portant sur $x(t)$.

L'écrire sous une forme canonique en faisant intervenir la pulsation propre ω_0 . Donner l'expression de ω_0 en fonction de k , γ et m .

Solution: Système : piston de masse m

Référentiel : celui du laboratoire, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.

Bilan des forces :

— poids $m \vec{g} = m g \vec{e}_x$

— résultante des forces de pression $\vec{F} = -\gamma k x \vec{e}_x$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= m \vec{g} + \vec{F} \\ m \ddot{x} \vec{e}_x &= m g \vec{e}_x - \gamma k x \vec{e}_x \\ \ddot{x} + \frac{\gamma k}{m} x &= g \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= g \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}}$$

R29. Pour l'expérience considérée ici, $m/k = 4,01 \times 10^{-2} \text{ s}^2$. Le récipient étant rempli d'air, on mesure une période des oscillations $T_0 = 1,08 \text{ s}$. Exprimer γ en fonction de m/k et de T_0 .

Solution: La période propre est

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\ T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\gamma k}} \\ \gamma &= \frac{m}{k} \times \frac{T_0^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Pour information, l'application numérique donne $\gamma = 1,36$, et la valeur théorique est 1,4.

C Étude mécanique avec frottements

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 2. L'amortissement de la courbe $x(t)$ montre qu'il y a présence de dissipation (frottements solides ou fluides, échanges thermiques entre le gaz et le récipient, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques...). L'objectif de cette partie est de modéliser cette courbe, sans chercher à comprendre le détail du processus de dissipation.

FIGURE 2 – Données issues d'un pointage vidéo. L'échelle des x est approximative, celle des t est précise.

Nous supposons que l'équation du mouvement du piston s'écrit sous la forme suivante, et nous allons tester si ceci permet une description correcte de l'enregistrement $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = g \quad (2)$$

La pulsation propre de ce système est ω_0 , son expression théorique reste la même que précédemment. Le facteur de qualité Q traduit la présence plus ou moins forte de dissipation. Le second membre g est constant.

R30. En vous aidant de la figure 2, et sans faire de calculs, donner en justifiant une valeur approchée de Q . Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système ?

Solution: D'après la figure 2, le régime est pseudo-périodique, le système oscille une petite dizaine de fois, donc Q est très approximativement de l'ordre de 10.

R31. Établir la forme générale des solutions $x(t)$ de l'équation (2). Exprimer la pseudo-pulsation Ω .

Solution:

Équation caractéristique associée à l'équation homogène sans second membre : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) < 0$, car $Q > \frac{1}{2}$

Racines : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

La partie réelle va dans l'exponentielle, et la partie imaginaire dans les cos et sin :

$$x_H(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} + B \sin \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right)$$

On identifie $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$

$$x(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\mu t} + \frac{g}{\omega_0^2}$$

R32. Déterminer l'expression de la position d'équilibre, x_{eq} .

Solution: La position d'équilibre du système est : $x_{\text{eq}} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{g}{\omega_0^2}$

R33. Y a-t-il une différence significative entre la période propre T_0 et la pseudo-période T ? Justifier.

Solution: La pseudo-période s'exprime selon : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Pour $Q \sim 10$, $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$, donc $T \sim T_0$, la différence entre T et T_0 est peu significative.

R34. Un modèle des données est représenté figure 3. En utilisant une de vos expressions précédentes, et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de Q .

Solution:

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \approx \frac{\Omega}{2Q}, \text{ donc } Q \approx \frac{\Omega}{2\mu} = \frac{5,83}{0,6} \approx 9,71$$

FIGURE 3 – Données et modèle du type $C + (A * \cos(\Omega * t) + B * \sin(\Omega * t)) * \exp(-\mu * t)$.

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.83, \mu = 0.30, A = -0.43, B = -0.059, C = 0.53$

D Étude en régime sinusoïdal forcé

En 1940, Clark et Katz modifient la méthode de Rüchardt afin d'en améliorer la précision. Ils obtiennent des valeurs de γ associées à des incertitudes relatives de l'ordre de 0,1%, et qui serviront de référence pour la dizaine d'années qui suivent.

Par rapport à la méthode de Rüchardt, ils procèdent à deux modifications principales :

- Le piston mobile sépare maintenant, de façon étanche, deux compartiments. Son oscillation n'est plus verticale, mais horizontale.
- Un électroaimant exerce une force $\vec{F}_E(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ sur le piston mobile.

On admet que sous certaines hypothèses, tout ceci modifie l'équation du mouvement pour donner :

$$m\ddot{x} = -\gamma kx - \lambda \dot{x} + F_E(t) \quad (3)$$

avec λ un coefficient de frottement, k une constante de raideur qui dépend, comme dans le cas précédent, de la géométrie du système et de la pression du gaz au repos, et $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$ un forçage à la pulsation ω imposée.

FIGURE 4 – schéma de la manipulation, à gauche issue de l'article original (source : <https://doi.org/10.1139/cjr40a-002>), à droite retravaillée

D.1 Mise en équation

Clark et Katz exploitent le phénomène de résonance. Pour le mettre en évidence, nous utilisons la notation complexe (avec j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$) :

- le signal $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$ est représenté par $\underline{F}_E(t) = F_0 e^{j\omega t}$;
- la position de la masse est du type $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, représentée par $\underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$, avec l'amplitude complexe $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$.

R35. À partir de l'équation (3), établir une expression de l'amplitude complexe $\underline{X}_0$. L'écrire sous la forme

$$\underline{X}_0 = \frac{A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (4)$$

On donnera les expressions de A, ω_0 et Q en fonction de F_0, λ, k, γ et m .

Solution: On rappelle que dans le domaine complexe, $\dot{\underline{x}} = j\omega \underline{x}$ et $\ddot{\underline{x}} = -\omega^2 \underline{x}$. Ainsi, l'équation (3) devient :

$$-m\omega^2 \underline{X}_0 = -\gamma k \underline{X}_0 - \lambda j\omega \underline{X}_0 + F_0$$

où l'on a simplifié par $e^{j\omega t}$. En factorisant par $\underline{X}_0$, on en déduit :

$$\underline{X}_0 = \frac{F_0}{-m\omega^2 + \gamma k + j\lambda\omega} = \frac{F_0/\gamma k}{1 - \frac{m}{\gamma k}\omega^2 + j\frac{\lambda}{\gamma k}\omega}$$

Par identification, on en déduit directement $A = \frac{F_0}{\gamma k}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}}$. De plus, on identifie $\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{\gamma k}$ soit $Q = \frac{\gamma k}{\lambda\omega_0}$ d'où $Q = \frac{\sqrt{m\gamma k}}{\lambda}$.

Le candidat pourra admettre cette relation (4) pour poursuivre.

R36. Donner l'expression de l'amplitude X_0 du signal $x(t)$, en fonction de ω , ω_0 , Q et A .

Solution: L'amplitude X_0 du signal est donnée par le module de l'amplitude complexe $|\underline{X}_0|$:

$$X_0 = |\underline{X}_0| = \frac{A}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

R37. Indiquer vers quoi tend X_0 lorsque la pulsation du forçage ω tend vers 0, puis lorsqu'elle tend vers $+\infty$.

Solution: Pour $\omega \rightarrow 0$, le dénominateur tend vers 1, donc $\lim_{\omega \rightarrow 0} X_0 = A$.

Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $X_0 \simeq \frac{A\omega_0^2}{\omega^2}$ donc $\lim_{\omega \rightarrow \infty} X_0 = 0$.

R38. On pose $u = \omega/\omega_0$. Expliquer pourquoi la recherche d'un maximum de la fonction $X_0(\omega)$ est équivalente à la recherche d'un minimum pour la fonction $f(u) = (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$.

Solution: On pose $u = \omega/\omega_0$. Ainsi, X_0 se réécrit :

$$X_0 = \frac{A}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + u^2/Q^2}}$$

L'amplitude X_0 admet un maximum lorsque son dénominateur est minimal, ce qui revient bien à chercher un minimum pour la fonction $f : u \mapsto (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$.

R39. Montrer que f admet un minimum en $u \neq 0$ seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Déterminer alors l'expression de u , noté u_r , pour lequel f est minimale.

Solution: Pour chercher le minimum de la fonction f , on cherche les zéros sa dérivée et on doit vérifier a posteriori qu'il s'agit bien d'un minimum en calculant la dérivée seconde pour montrer qu'elle est positive. On commence par chercher les zéros de $f'(u) : \frac{df}{du} = 0$. Ainsi

$$\frac{df}{du} = \frac{2u}{Q^2} + 2 \times (-2u) (1 - u^2) = 4u \left(\frac{1}{2Q^2} - (1 - u^2) \right)$$

La solution $u = 0$ ne nous intéresse pas, on en déduit que l'équation $\frac{df}{du} = 0$ se traduit par la condition :

$$\frac{1}{2Q^2} - (1 - u_r^2) = 0 \quad \text{soit} \quad u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette égalité est valable uniquement si l'argument dans la racine est positif, ce qui impose la condition suivante sur Q : $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

R40. On note ω_r la pulsation non nulle pour laquelle $X_0(\omega)$ est maximale, lorsque $Q > 1/\sqrt{2}$. Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et de Q . Que dire du rapport ω_r/ω_0 lorsque $Q \approx 10$ comme ici ?

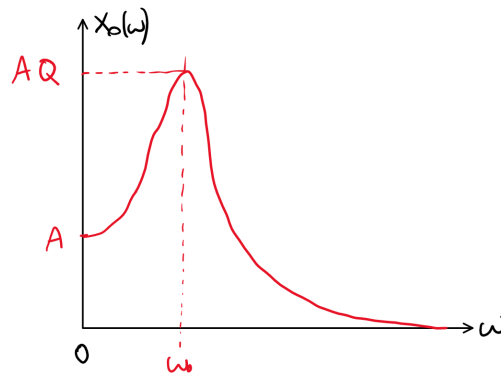
Solution: En reprenant la définition de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, on trouve directement :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Si $Q \approx 10$, le quotient $\frac{1}{2Q^2} \approx 0,005$: dans ce cas, le rapport $\frac{\omega_r}{\omega_0} \approx 1$ (à 10^{-2} près).

R41. Tracer l'allure de la courbe $X_0(\omega)$, en précisant les expressions en $\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$.

Solution:



D.2 Exemples de résultats

Clark et Katz exploitent la mesure de ω_r pour remonter à celle de γ . Ils prennent en compte diverses corrections non abordées ici (écart aux gaz parfaits, mise en mouvement du gaz, non adiabaticité...). La figure 5 montre des exemples de valeurs obtenues.

FIGURE 5 – Gauche : courbe de X_0 en fonction de la fréquence (en Hz) obtenue par Clark et Katz.

Droite : valeurs obtenues pour du diazote, sous 1 bar, lors de différentes répétitions de l'expérience. (source : doi.org/10.1139/cjr40a-003)

R42. On note γ_i la valeur numéro i de γ obtenue par Clark et Katz sur la figure 5 (droite). Il y a $N = 8$ valeurs. "Average" est la moyenne de ces 8 valeurs.

Quelle opération effectuer pour évaluer l'incertitude-type sur cette valeur moyenne ?

Solution: Il s'agit ici d'une évaluation d'incertitude de type A. En notant σ l'écart-type associé à cette distribution, l'incertitude-type $u(\gamma)$ est donnée par :

$$u(\gamma) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \text{ avec } \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma_i - \bar{\gamma})^2} \text{ et } \bar{\gamma} \text{ la valeur moyenne des } \gamma_i$$

R43. On souhaite estimer la valeur du facteur de qualité Q pour l'expérience de la figure 5 (gauche). On rappelle que les fréquences de coupures $f_{c,1}$ et $f_{c,2}$ sont définies comme celles pour lesquelles $X_0(f) = (X_0)_{\max}/\sqrt{2}$. Pour une résonance assez piquée comme ici, on a la relation

$$|f_{c,1} - f_{c,2}| \approx \frac{f_r}{Q}$$

avec f_r la fréquence de résonance. On donne $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Exploiter la figure 5 (gauche) pour en déduire une valeur de Q . Expliquer votre démarche, par exemple à l'aide d'une reproduction de l'allure de la figure 5 sur votre copie. On arrondira raisonnablement les valeurs pour faire les applications numériques.

Solution: On exploite ici la relation donnant la bande passante de la résonance au facteur de qualité donnée dans l'énoncé :

$$|f_{c,1} - f_{c,2}| = \frac{f_r}{Q}$$

où l'on évalue la fréquence de résonance grâce à l'abscisse du pic de la courbe de la figure 6 :

$$f_r \approx 29,2 \text{ Hz}$$

Pour $f = f_{c,1} = f_{c,2}$, l'amplitude est divisée d'un facteur $\sqrt{2}$ par rapport au maximum, qui se situe à une amplitude de $6,52 \times 10^{-2} \text{ cm}$. En ordre de grandeur,

$$\frac{6,52}{\sqrt{2}} \approx \frac{6,52}{1,4} = \frac{2 \times 6,5}{3} \approx 4,6$$

Ainsi, les fréquences de coupure sont telles qu'à ces fréquences, l'amplitude vaut $0,046 \text{ cm}$. Par lecture graphique, on repère les abscisses de l'intersection entre la droite horizontale $y = 0,046$ et la courbe représentative de l'amplitude, comme sur la figure ci-dessous.

On en déduit : $f_{c,1} \approx 28,2 \text{ Hz}$ et $f_{c,2} \approx 30,2 \text{ Hz}$

Finalement,

$$Q = \frac{f_r}{|f_{c,1} - f_{c,2}|} \approx \frac{29,2}{2} \approx 14$$

On s'intéresse ensuite aux valeurs de γ obtenues. La valeur prédite par la théorie, pour un gaz parfait diatomique, est $\gamma = 1,4$.

FIGURE 6 – valeurs de γ obtenues par Clark et Katz, à différentes pressions.

Gauche : pour N_2 . Droite : pour CO_2

R44. On considère les résultats pour le diazote N_2 (figure 6, gauche). Qu'est-ce qui explique les écarts de plus en plus importants à la valeur 1,4 à mesure que la pression augmente ?

Solution: Le modèle des gaz parfaits repose sur l'hypothèse de particules ponctuelles sans interactions entre elles, ce qui suppose notamment que la taille des particules doit être bien inférieure à la distance entre ces dernières. Or, à mesure que l'on augmente la pression, les particules se rapprochent les unes des autres, et donc leur taille n'est plus petite devant la distance entre constituants et elles interagissent à courte distance. À haute pression, le modèle des gaz parfaits n'est donc plus valable, ce qui explique les écarts de plus en plus importants à la valeur 1,4 à mesure que la pression augmente.

R45. On considère les résultats pour le CO_2 (figure 6, droite). Qu'est-ce qui explique les écarts importants à la valeur 1,4, même à basse pression ?

Solution: Ici, le modèle du gaz parfait reste valable, mais c'est cette fois l'hypothèse diatomique qui doit être remise en cause : le dioxyde de carbone n'est pas un gaz diatomique ce qui explique les écarts importants à la valeur 1,4, même à basse pression.