

CONCOURS BLANC 2026 – **Corrigé**

ÉPREUVE de PHYSIQUE

Mardi 12 mai 2026 – De 13h30 à 17h30

Problème I Un moteur à essence turbocompressé (Mines-Pont MPI 2025)

DONNÉES

Aide de calcul : $9^{1/5} = 1,6$; $9^{2/5} = 2,4$

Le moteur qui équipe les automobiles thermiques peut être décrit comme une machine ditherme à air (on néglige la quantité de carburant et les gaz brûlés devant l'air au niveau des pistons) fonctionnant de manière pseudo-cyclique (l'air rejeté par la ligne d'échappement n'est évidemment pas le même que celui qui est admis dans le filtre à air, mais il est en même quantité). On caractérise un tel moteur par les températures de la «source froide» T_f (en pratique c'est celle de l'air ambiant et on prendra $T_f = 27^\circ\text{C}$) et de la «source chaude» T_c (au moins égale à celle du point le plus chaud du cycle, après la combustion du carburant).

A Rendement du moteur

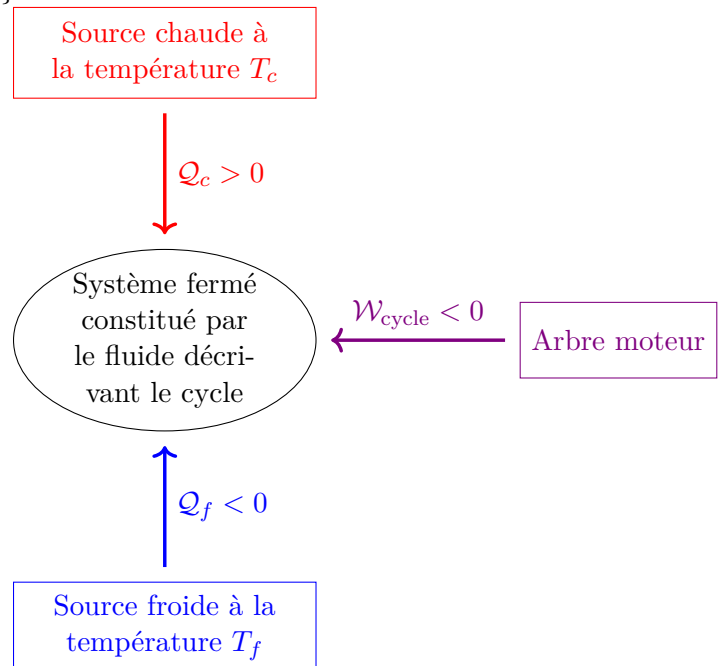
R1. Définir le rendement η d'un tel moteur thermique ditherme.

Énoncer et démontrer avec soin le théorème de Carnot.

Solution:

— Sur un cycle, le système {fluide qui décrit le cycle} :

- fournit effectivement du travail à l'extérieur : $\mathcal{W}_{\text{cycle}} < 0$
- reçoit effectivement du transfert thermique de la part de la source chaude : $Q_c > 0$
- fournit effectivement du transfert thermique à la source froide : $Q_f < 0$



On appelle **rendement** du moteur, le rapport de l'énergie échangée utile sur l'énergie échangée coûteuse (celle que l'opérateur est obligé de payer) :

$$\eta = \frac{\text{énergie échangée utile}}{\text{énergie échangée coûteuse}} = \frac{-\mathcal{W}_{\text{cycle}}}{Q_c} \in]0, 1[$$

- Le rendement d'un moteur ditherme est nécessairement inférieur au rendement de Carnot obtenu pour un cycle réversible constitué de deux transformations adiabatiques et de deux transformations isothermes réversibles, dépendant uniquement des températures de la source chaude et de la source froide.
- Système étudié : Fluide décrivant le cycle du moteur, recevant algébriquement un transfert thermique $Q_c > 0$ de la part de la source chaude de température T_c , un transfert thermique $Q_f < 0$ de la part de la source froide de température T_f et le travail $\mathcal{W}_{\text{cycle}} < 0$ sur un cycle.

Premier principe sur un cycle : $\Delta U = Q_c + Q_f + \mathcal{W}_{\text{cycle}}$

Or U est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi, donc $\Delta U = 0$

$$\text{Soit } Q_c + Q_f + W_{\text{cycle}} = 0$$

$$\text{Deuxième principe sur un cycle : } \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{\text{créée}}$$

Or S est une fonction d'état, donc sa variation ne dépend pas du chemin suivi, donc $\Delta S = 0$

De plus, $S_{\text{créée}} \geq 0$, donc

$$\text{Soit } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

$$(1) : Q_f = -W_{\text{cycle}} - Q_c \quad (1')$$

$$(1') \text{ dans } (2) : \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_c}{T_f} - \frac{W_{\text{cycle}}}{T_f} \leq 0$$

$$\text{En divisant par } Q_c > 0 : \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_f} + \underbrace{\left(\frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_c} \right)}_{\eta_{\text{moteur}}} \frac{1}{T_f} \leq 0$$

$$\text{Soit } \eta_{\text{moteur}} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Certains véhicules sont mus par un moteur à essence à quatre temps ; le carburant utilisé est de l'Eurosuper 95 produisant, par combustion totale, une énergie $W_v = 3,6 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{L}^{-1}$ (joules produits par litre de carburant consommé). En circulant à la vitesse stabilisée $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur route horizontale, le moteur du véhicule étudié ici développe la puissance $\mathcal{P} = 18 \text{ kW}$ (pour vaincre essentiellement les frottements aérodynamiques) et consomme une quantité q égale à 5,4 litres de carburant pour parcourir 100 km .

R2. Déduire des données ci-dessus le rendement réel η_r du moteur.

Quelle inégalité concernant T_c peut-on déduire du théorème de Carnot ?

Cette inégalité est-elle vérifiée en pratique, sachant que dans le moteur étudié la température est $T_c \simeq 2000 \text{ K}$?

Solution: Étudions un trajet de 100 km durant 1 heure :

Le travail fourni par le moteur est $\mathcal{W} = \mathcal{P} \times \Delta t$

Le transfert thermique reçu par le gaz de la part de la source chaude provient de la combustion totale :

$$Q_c = W_v \times q$$

$$\text{Ainsi } \eta_r = \frac{\mathcal{P} \times \Delta t}{W_v \times q}$$

$$\text{A.N. : } \eta_r = \frac{18 \cdot 10^3 \times 3600}{3,6 \cdot 10^7 \times 5,4} = \frac{1,8}{5,4} \times 0,33$$

D'après le théorème de Carnot :

$$\begin{aligned} \eta_r &< \eta_c \\ \eta_r &< 1 - \frac{T_f}{T_c} \\ \frac{T_f}{T_c} &< 1 - \eta_r \\ T_c &> \frac{T_f}{1 - \eta_r} \end{aligned}$$

$$T_c > \frac{T_f}{1 - \eta_r} = \frac{300}{1 - 0,33} = 450 \text{ K}$$

Cette inégalité est donc bien vérifiée en pratique.

B Thermodynamique des gaz

Une quantité donnée de gaz est caractérisé par ses fonctions d'état énergie interne U et enthalpie H et par leurs dérivées $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ et $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$ qui sont les capacités thermiques du gaz. On définit le rapport adiabatique $\gamma = C_P/C_V$; dans ce qui suit ce rapport γ est supposé constant.

R3. De quel(s) paramètre(s) thermodynamique(s) dépendent les fonctions U et H dans le cadre du modèle du gaz parfait ?

En déduire les expressions de C_P et C_V en fonction de la quantité de matière n , du rapport adiabatique γ et d'une constante fondamentale.

Solution:

- L'énergie interne et l'enthalpie dépendent uniquement de la quantité de matière et de la température.
- Par définition de l'enthalpie : $H = U + PV$, or d'après la loi des gaz parfaits $PV = nRT$, soit $H = U + nRT$
En dérivant par rapport à la température, à n fixée : $C_p = C_v + nR$

Avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, on en déduit $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$

On admettra l'expression de l'entropie molaire $S_m(T, V)$ d'un gaz parfait de température T et de volume V :

$$S_m(T, V) = S_m(T_0, V_0) + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}$$

R4. En déduire la relation de LAPLACE qui relie les variations de pression P et de volume V évoluant de manière isentropique depuis un état initial (P_0, V_0) .

Solution: Au cours d'une transformation isentropique, d'après la relation fournie :

$$\begin{aligned} S_m(T, V) &= S_m(T_0, V_0) \\ \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} &= 0 \\ \ln \frac{T}{T_0} + (\gamma - 1) \ln \frac{V}{V_0} &= 0 \\ \ln \left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0V_0^{\gamma-1}} \right) &= 0 \\ \frac{TV^{\gamma-1}}{T_0V_0^{\gamma-1}} &= 1 \\ TV^{\gamma-1} &= T_0V_0^{\gamma-1} \\ \frac{PV}{nR} V^{\gamma-1} &= \frac{P_0V_0}{nR} V_0^{\gamma-1} \\ PV^\gamma &= P_0V_0^\gamma \end{aligned}$$

C Le cycle moteur à quatre temps

Le moteur à quatre temps a été décrit pour la première fois en 1862 par l'ingénieur Alphonse Beau. Ce cycle est décrit par l'air (pris à l'extérieur à la pression atmosphérique p_0), assimilé à un gaz parfait diatomique, qui évolue entre un volume minimal V_1 et un volume maximal.

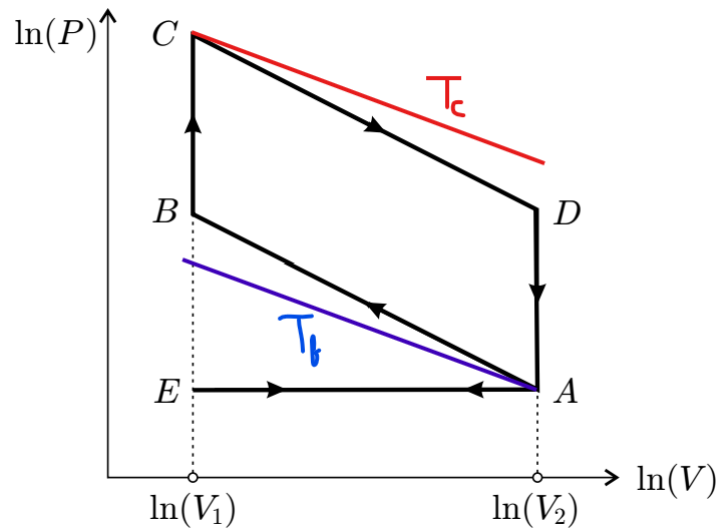


FIGURE 1 – Cycle moteur de Beau à quatre temps en échelle logarithmique

$V_2 = \alpha V_1$ avec le taux de compression $\alpha > 1$. Il est représenté sur la figure 1 en échelle doublement logarithmique dans le diagramme de Clapeyron.

Ce cycle comporte :

- Une phase d'admission EA de l'air extérieur dans les cylindres du moteur ;
- Une phase de compression adiabatique AB de l'air enfermé dans le piston (mélangé avec un peu d'essence) suivie de la combustion BC quasiment instantanée provoquée par une étincelle produite par le système électrique d'allumage ;
- Une phase motrice de détente adiabatique CD de l'air (et du combustible brûlé) jusqu'à l'ouverture en D des soupapes d'échappement avec chute brutale DA de la pression ;
- Une phase d'échappement AE évacuant les gaz brûlés avant la reprise du cycle.

Dans toute la suite de l'étude les phases d'échappement AE et d'admission EA ne jouent aucun rôle et on pourra donc les ignorer.

R5. On considère d'abord que toutes les évolutions au sein du cycle $ABCD AEA$ sont réversibles. Montrer que les transformations AB et CD sont décrites par deux droites parallèles et déterminer leur pente commune $p_{rv} < 0$.

Solution: Une transformation adiabatique réversible est isentropique.

AB est donc isentropique, d'après la relation de Laplace établie précédemment :

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= P_A V_A^\gamma \\ \ln(PV^\gamma) &= \ln(P_A V_A^\gamma) \\ \ln(P) + \gamma \ln(V) &= \ln(P_A) + \gamma \ln(V_A) \\ \ln(P) &= \ln(P_A) + \gamma \ln(V_A) - \gamma \ln(V) \end{aligned}$$

C'est l'équation d'une droite de pente $p_{rv} = -\gamma < 0$

De même, sur la transformation CD : $\ln(P) = \ln(P_C) + \gamma \ln(V_C) - \gamma \ln(V)$

Les transformations AB et CD sont décrites par deux droites parallèles de pente $p_{rv} = -\gamma < 0$

R6. Reproduire sur votre copie le diagramme de la figure 1 en y ajoutant les isothermes de températures T_f (température minimale du cycle) et T_c (température maximale du cycle).

Solution: Au cours d'une transformation isotherme d'un gaz parfait, $PV = nRT = \text{cste}$, donc en échelle logarithmique : $\ln(P) = \ln(nRT) - \ln(V)$: c'est une droite décroissante de pente $p_t = -1$, plus faible en valeur absolue que l'adiabatique réversible précédente.

De plus, la température augmente au cours de la compression adiabatique réversible AB et au cours de la compression isochore BC . Puis la température diminue au cours de la détente CD et au cours de la détente isochore DA . Ainsi, A est le point de température minimale du cycle, et C le point de température maximale du cycle.

D'où les isothermes tracées sur le cycle.

R7. Exprimer les transferts thermiques sur les phases AB, BC, CD et DA en fonction des températures T_A, T_B, T_C et T_D aux divers points du cycle.

En déduire l'expression η_{rv} du rendement du cycle moteur de la figure 1 en fonction des températures puis en déduire que $\eta_{rv} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.

Solution:

- Les transformations AB et CD sont adiabatiques, donc $Q_{AB} = 0 = Q_{CD}$
- D'après le premier principe sur la transformation BC : $\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$. Or elle est isochore, donc $W_{BC} = 0$

$$\text{Donc } Q_{BC} = \Delta U_{BC} = C_V(T_C - T_B) > 0$$

- De même $Q_{DA} = \Delta U_{DA} = C_V(T_A - T_D) < 0$

Au cours de la transformation BC le gaz reçoit réellement du transfert thermique, Q_{BC} est donc le transfert thermique reçu de la part de la source chaude.

Sur un cycle, U étant une fonction d'état : $\Delta U = 0 = Q_{BC} + Q_{DA} + W_{\text{cycle}}$

Ainsi, le rendement s'écrit :

$$\begin{aligned} \eta_{rv} &= \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{BC}} \\ &= 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} \\ &= 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \end{aligned}$$

Or d'après la relation de Laplace sur la transformation AB adiabatique réversible, puis sur CD :

$$\begin{aligned} T_A V_A^{\gamma-1} &= T_B V_B^{\gamma-1} \\ T_B &= T_A \frac{V_2^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} \\ T_B &= T_A \alpha^{\gamma-1} \\ T_C &= T_D \alpha^{\gamma-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \eta_{rv} &= 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} \\ &= 1 + \frac{T_A - T_D}{(T_D - T_A)\alpha^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \alpha^{1-\gamma} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \eta_{rv} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$$

R8. Pour le moteur étudié ici $\alpha = 9$ et on prendra pour l'air $\gamma = 1,4$. Calculer η_{rv} et commenter.

$$\text{Solution: A.N. : } \eta_{rv} = 1 - 9^{-0,4} = 1 - \frac{1}{9^{2/5}} \approx 1 - \frac{1}{2,4} = \frac{1,4}{2,4} \approx 0,6$$

Ce rendement est supérieur au rendement réel η_r calculé précédemment. En effet, nous avons utilisé des modèles de transformation réversible qui ne le sont pas et expliquent un rendement plus faible en réalité.

Si on calcule le rendement de Carnot : $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{300}{2000} = 0,85$ qui est bien évidemment très supérieur au rendement réel et au rendement du cycle de Beau de Rochas qui n'est pas réversible.

En réalité l'hypothèse de réversibilité des transformations adiabatiques AB et CD n'est pas réaliste ; pour s'approcher du rendement réel on la remplace par un modèle amélioré, toujours adiabatique mais non réversible, dans lequel le cycle devient $AB'C'D'A$, mais on suppose toujours que AB' et $C'D'$ sont des droites de pentes (négatives) respectives p'_{comp} et p'_{det} pour la compression AB' et la détente $D'A$.

R9. En application du second principe montrer que $p'_{\text{comp}} < p_{rv} < p'_{\text{det}}$.

Solution: D'après le 2^e principe sur AB' : $\Delta S = S_e + S_c = S_c > 0$ car elle est supposée adiabatique mais non réversible.

D'après la formule fournie :

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_{B'}}{T_A} + nR \ln \frac{V_{B'}}{V_A} \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_{B'} V_{B'}^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{P_{B'} V_{B'}^\gamma}{P_A V_A^\gamma}\end{aligned}$$

Or sur AB' est toujours une droite décroissante de pente p'_{comp} , donc $\frac{\ln(P_{B'}) - \ln(P_A)}{\ln(V_{B'}) - \ln(V_A)} = p'_{\text{comp}} < 0$, soit

$$\ln \frac{P_{B'}}{P_A} = p'_{\text{comp}} \ln \frac{V_{B'}}{V_A}, \text{ soit } \frac{P_{B'}}{P_A} = \left(\frac{V_{B'}}{V_A} \right)^{p'_{\text{comp}}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\left(\frac{V_{B'}}{V_A} \right)^{p'_{\text{comp}}} \times \left(\frac{V_{B'}}{V_A} \right)^\gamma \right) \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} (p'_{\text{comp}} + \gamma) \ln \frac{V_{B'}}{V_A}\end{aligned}$$

Or $\Delta S > 0$ et au cours de la compression $\frac{V_{B'}}{V_A} < 1$, donc $p'_{\text{comp}} + \gamma < 0$, donc $p'_{\text{comp}} < -\gamma = p_{rv}$

De même au cours de la détente $C'D'$: $\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} (p'_{\text{det}} + \gamma) \ln \frac{V_{D'}}{V_{C'}}$

Or au cours de la détente $\frac{V_{D'}}{V_{C'}} > 1$, donc $p'_{\text{det}} + \gamma > 0$, donc $p'_{\text{det}} > -\gamma = p_{rv}$

Problème II Expérience d'EÖTVÖS (Mines-Pont MP 2015)

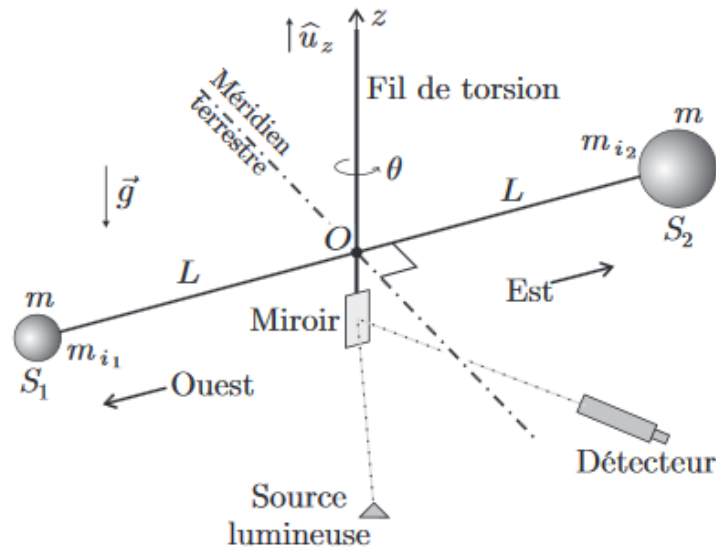


FIGURE 2 – Dispositif d'EÖTVÖS

On note $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire centré sur O et supposé galiléen dans cette sous-partie où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.

On note J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe vertical (Oz) et J le moment d'inertie du système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$ par rapport à (Oz) .

On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment par rapport à (Oz) a pour intensité $\mathcal{M}_{Oz} = -C(\theta(t) - \theta_0)$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

On définit l'énergie potentielle associée à un couple de forces conservatif par la relation $\mathcal{M}_{Oz} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}$ où $\mathcal{M}$ est le moment du couple par rapport à l'axe de rotation.

R10. En déduire l'expression de l'énergie potentielle associée au couple de torsion. On choisira $\mathcal{E}_p(\theta_0) = 0$.

En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C , J , θ , θ_0 et $\dot{\theta}$.

Solution: Le moment du couple de rappel par rapport à (Oz) s'écrit $\mathcal{M}_{Oz} = -C(\theta(t) - \theta_0)$

L'énergie potentielle associée à un couple de forces conservatif est définie par :

$$\mathcal{M}_{Oz} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} \Leftrightarrow -C(\theta(t) - \theta_0) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}, \text{ soit } \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = C(\theta - \theta_0), \text{ soit } \mathcal{E}_p(\theta) = \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2 + K, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Avec $\mathcal{E}_p(\theta_0) = 0$, on en déduit $K = 0$ et $\mathcal{E}_p(\theta) = \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$

L'énergie mécanique s'exprime alors $\mathcal{E}_m(S) = \mathcal{E}_c(S) + \mathcal{E}_p(\theta) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2$

R11. On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $\mathcal{P}_{\text{frot}} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Solution: Système : $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$

Référentiel : $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire centré sur O et supposé galiléen dans cette sous-partie

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $m\vec{g}$
- tension du fil
- couple de rappel de moment par rapport à (Oz) : $\mathcal{M}_{Oz} = -C(\theta(t) - \theta_0)$
- frottements

L'énoncé nous fournit la puissance des actions mécaniques de frottement, il est donc pertinent d'utiliser la loi de la puissance cinétique $\frac{d\mathcal{E}_c(S)}{dt} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(\vec{C}) + \mathcal{P}_{\text{frott}}$, avec :

- $\mathcal{P}(m\vec{g}) = \mathcal{M}_{Oz}(m\vec{g}) \times \dot{\theta} = 0$, car $m\vec{g}$ est colinéaire à (Oz) .
- $\mathcal{P}(\vec{T}) = \mathcal{M}_{Oz}(T) \times \dot{\theta} = 0$, car $\vec{T}$ est colinéaire à (Oz) .
- $\mathcal{P}(\vec{C}) = C \times \dot{\theta} = -C\dot{\theta}(\theta - \theta_0)$
- $\mathcal{P}_{\text{frott}} = -\alpha\dot{\theta}^2$

Ainsi : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right) = -C\dot{\theta}(\theta - \theta_0) - \alpha\dot{\theta}^2$

Soit $J\ddot{\theta} = -C\dot{\theta}(\theta - \theta_0) - \alpha\dot{\theta}^2$, soit $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = \frac{C}{J}\theta_0$

On peut également utiliser la loi de la puissance mécanique : $\frac{d\mathcal{E}_m(S)}{dt} = \mathcal{P}(\text{forces non conservatives})$, soit $\frac{d\mathcal{E}_m(S)}{dt} = \mathcal{P}_{\text{frott}}$

R12. On observe des oscillations très faiblement amorties.

Quelle est la condition satisfaite par les constantes C , J et α ?

Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration.

Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$?

Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$.

À quelle condition sur ε , l'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est-elle inférieure à 1 % ?

Cette condition est supposée vérifiée par la suite.

Solution: On observe des oscillations très faiblement amorties, à condition que le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène est négatif. Or $\Delta = \frac{\alpha^2}{J^2} - 4\frac{C}{J}$

On observe des oscillations si $\frac{\alpha^2}{J^2} - 4\frac{C}{J} < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 4CJ \Leftrightarrow \alpha < 2\sqrt{CJ}$.

Dans ce cas : $\theta(t) = \theta_0 + e^{-\alpha t/2J} \left(A \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{J^2}} t \right) + B \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{J^2}} t \right) \right)$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_0$

Pseudo-période : $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2} \sqrt{4\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{J^2}}}$, soit $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4J^2}}}$

Or la période propre (quand $\alpha = 0$) s'écrit $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{J}}}$

Ainsi $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{J}}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4J^2} \times \frac{J}{C}}} \Leftrightarrow T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4JC}}}$

Introduisons $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$, alors $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$

En notant que $\varepsilon \ll 1$: $T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)$

La condition recherchée porte sur l'écart relatif entre T et T_0 : $\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\varepsilon^2}{2}$

L'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est inférieure à 1 %, à condition que

$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\varepsilon^2}{2} < 0,01 \Leftrightarrow \varepsilon < \sqrt{0,02} = 0,14$

On note J_1 les moments d'inertie, considérés égaux, de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par leurs centres respectifs.

On admettra que si le principe d'équivalence faible s'applique alors $J = J_0 + 2J_1 + 2mL^2$.

On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L avec des sphères de masse pesante $m = 0,2 \text{ kg}$.

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-contre :

$L \text{ [m]}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$
$T \text{ [s]}$	436	509	581
$T^2 \text{ [s}^2\text{]}$	$1,9 \cdot 10^5$	$2,6 \cdot 10^5$	$3,4 \cdot 10^5$

R13. En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2 , L^2 , J_0 , J_1 , m et C .

À partir des résultats de mesure, donner une estimation de la valeur de la constante de torsion C .

Compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T , montrer que l'on

peut écrire : $m \approx \frac{C}{8\pi^2} \frac{T^2}{L^2}$.

Solution: La condition précédente est supposée vérifiée (cf énoncé), donc $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$,

soit $T^2 = 4\pi^2 \times \frac{J_0 + 2J_1}{C} + 4\pi^2 \times \frac{2mL^2}{C}$

Ainsi, la représentation de T^2 en fonction de L^2 donne une droite de pente $a = \frac{8\pi^2 m}{C}$

La régression linéaire ($T^2 = aL^2 + b$) donne un coefficient directeur de $a = \frac{3,4 - 1,9}{6,4 - 3,6} \times 10^8 = \frac{1,5}{2,8} \times 10^8 =$

$5,10^7 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$ et permet d'en déduire $C = \frac{8\pi^2 m}{a} = \frac{80 \times 0,2}{5,10^7}$, soit $C = 3,10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

L'ordonnée à l'origine vaut $b = 10^3 \text{ s}^2$, qui est très inférieure à $T^2 \approx (6,10^2)^2 \text{ s}^2 \approx 3,6 \cdot 10^5 \text{ s}^2$.

Ainsi $T^2 \approx \frac{8\pi^2 m}{C} L^2 \Leftrightarrow m \approx \frac{CT^2}{8\pi^2 L^2}$

Problème III Photographie (EPITA 2026)

A Objectif de l'appareil photographique

Cette partie est composée de deux sous-parties indépendantes.

A.1 Objectif et téléobjectif

Cette partie traite de la comparaison entre l'encombrement d'un téléobjectif composé de deux lentilles et d'un objectif composé d'une unique lentille permettant de former une même image d'un objet situé à une grande distance du photographe.

On modélise l'objectif d'un appareil photographique par une lentille L_1 que l'on associe à un capteur CCD de taille $15,8 \times 23,6 \text{ mm}^2$. La lentille L_1 est convergente de vergence $V_1 = 5,0 \delta$. La distance entre la lentille L_1 et le capteur, notée Δ , est appelée encombrement de l'appareil. Cet appareil photographique est utilisé pour photographier un animal de hauteur 80 cm situé à 200 m.

R14. À quelle distance de la lentille d'entrée L_1 faut-il placer le capteur pour former une image nette ?

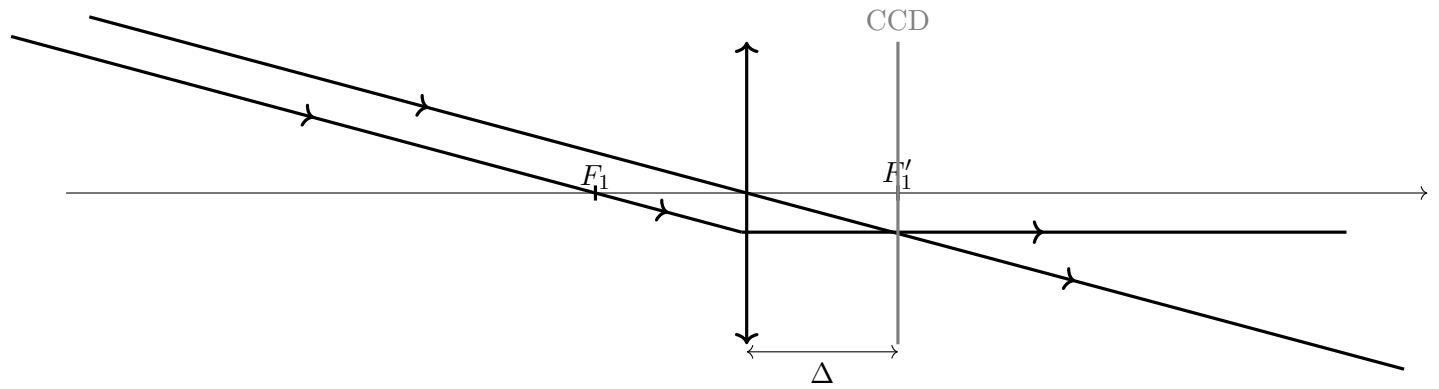
Solution: D'après la relation de conjugaison $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1}$

Soit $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'_1}{f'_1 + \overline{OA}}$, avec $\overline{OA} = -200 \text{ m}$ et $f'_1 = \frac{1}{V_1} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

Ainsi $\overline{OA'} = 20 \text{ cm} \approx f'_1$, car $|\overline{OA}| \gg f'_1$.

R15. Réaliser un schéma représentant la situation, on fera apparaître la lentille L_1 , ses foyers objet et image, ainsi que le capteur CCD que l'on placera en accord avec la question précédente.

Solution:



R16. Quel est l'encombrement Δ de l'appareil photographique ?

Solution: L'encombrement vaut $\Delta = f'_1 = 20 \text{ cm}$

R17. Quelle est la taille de l'image obtenue sur le capteur ?

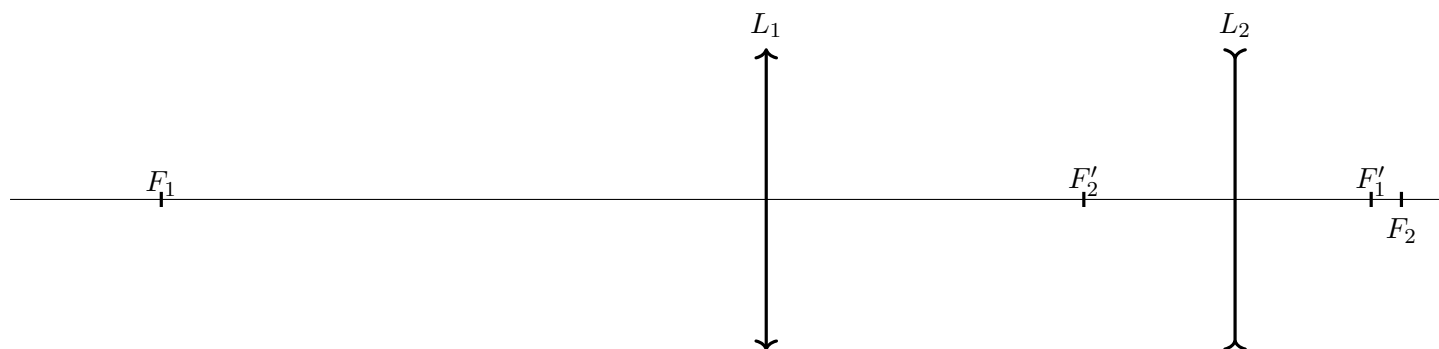
Solution: D'après la relation de grandissement de Descartes : $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1 A'}}{\overline{O_1 A}} = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{A B}}$

On en déduit $\boxed{\overline{A' B'} = \overline{A B} \times \frac{\overline{O_1 A'}}{\overline{O_1 A}}} = 0,8 \times \frac{0,2}{-200} = -8.10^{-4} \text{ m} = -0,08 \text{ cm}$

On remplace l'objectif simple par un téléobjectif constitué de la même lentille d'entrée L_1 associée à une seconde lentille L_2 placée à une distance 15,5 cm derrière la lentille d'entrée L_1 . Cette seconde lentille est divergente, de vergence $-20 \text{ } \delta$. La distance entre la lentille L_1 et le capteur, notée Δ' , est appelée encombrement du téléobjectif. On photographie le même animal de hauteur 80 cm toujours situé à 200 m.

R18. À quelle distance de lentille d'entrée L_1 faut-il placer le capteur pour former une image nette ? On donnera un résultat à deux chiffres significatifs.

Solution: $f'_2 = \frac{1}{V_2} = -5 \text{ cm}$



L'image $A_1 B_1$ de l'animal se forme dans le plan focal image de L_1 .

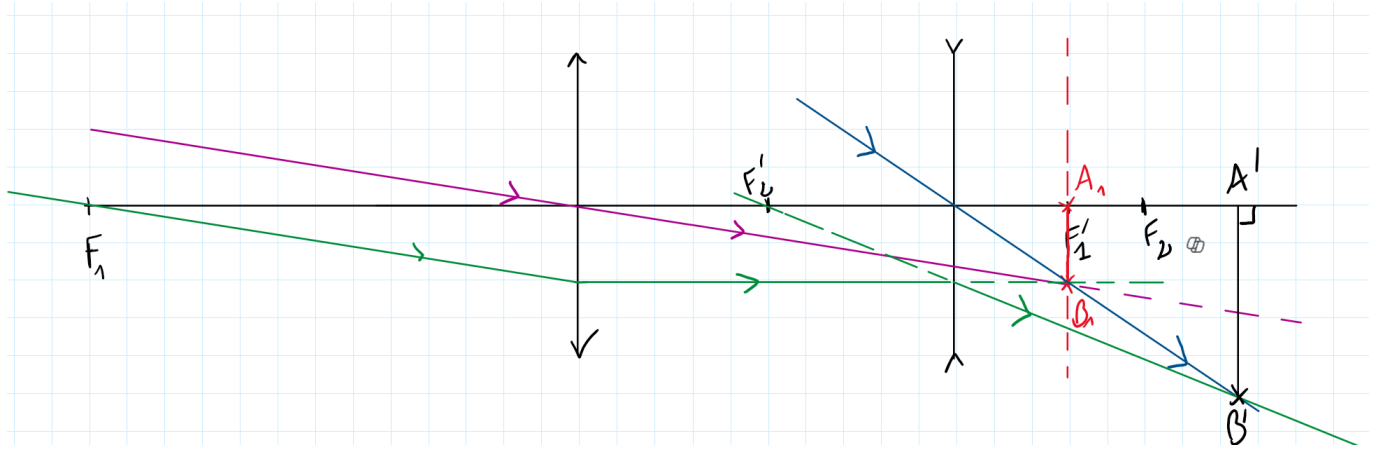
D'après la relation de conjugaison de Descartes à L_2 : $\frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2}$, avec $\overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1} = -\Delta' + f'_1$

Ainsi $\frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{-\Delta' + f'_1} = \frac{1}{f'_2}$

Ainsi : $\boxed{\overline{O_2 A'} = \frac{f'_2(f'_1 - \Delta')}{f'_2 + f'_1 - \Delta'}} = 45 \text{ cm}$

R19. Réaliser un schéma représentant la situation, on fera apparaître les lentilles L_1 et L_2 , leurs foyers objet et image, ainsi que le capteur CCD que l'on placera en accord avec la question précédente.

Solution: L'image intermédiaire A_1B_1 se forme dans le plan focal image de L_1 .



R20. Quel est alors l'encombrement Δ' du téléobjectif?

Solution: Encombrement : $\Delta' = \overline{O_1A'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A'} = \Delta' + \overline{O_2A'} = 60,5 \text{ cm}$

R21. Quelle est la taille de l'image formée à l'aide du téléobjectif?

Solution: D'après la relation de conjugaison de Descartes : $\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$

Soit $\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} \times \frac{\overline{O_2A'}}{-\Delta' + f'_1}$, avec $\overline{A_1B_1} = \gamma_1 \overline{AB}$

$$\text{AN } \overline{A'B'} = -8.10^{-2} \times \frac{45}{-15,5 + 20} = -8.10^{-2} \times \frac{45}{4,5} = -0,8 \text{ cm}$$

R22. Quelle serait la distance focale d'un téléobjectif mono-lentille constitué d'une seule lentille convergente et qui permettrait de former une image de la même taille que celle obtenue à l'aide du téléobjectif? Quel serait l'encombrement d'un tel appareil photographique?

Solution: On obtient un grandissement total de $\gamma = \frac{-0,8}{80} = -10^{-2}$

Pour un tel grandissement, $\overline{OA'} = \overline{OA} \times \gamma = -10^{-2} \times -200 = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

La lentille convergente devrait donc être de distance focale de 20 cm et l'encombrement serait de 20 cm!

A.2 Profondeur de champ

L'appareil photographique est désormais utilisé pour photographier l'image d'un objet A placé à 6 cm de l'objectif sur l'axe optique. On modélise l'objectif de l'appareil photographique par une lentille simple de distance focale 2 cm.

R23. Rappeler ce que sont les conditions de Gauss.

Définir la notion de stigmatisme rigoureux et approché.

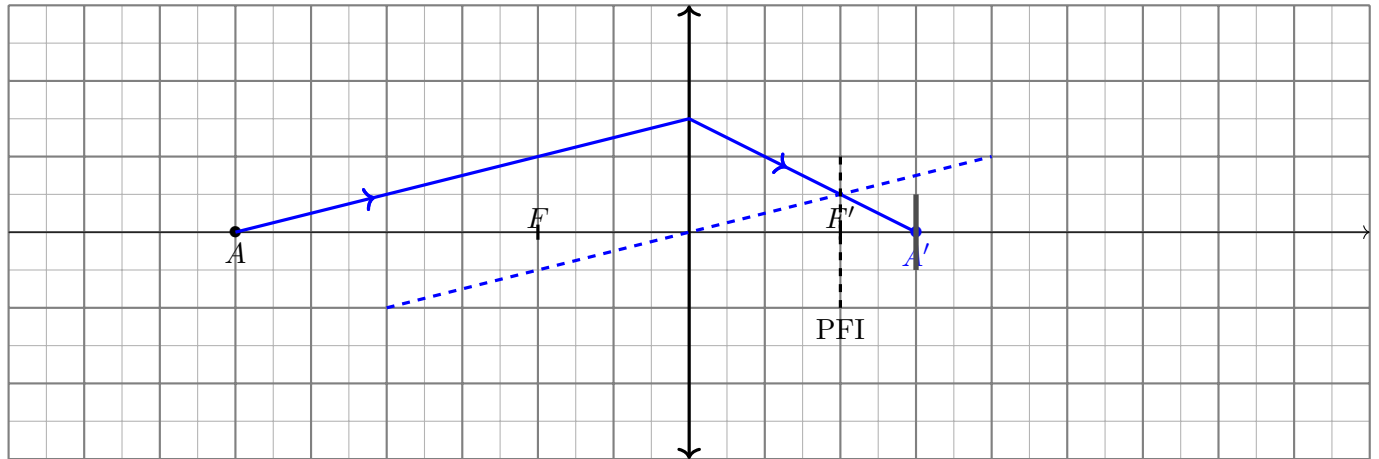
Solution: La lentille est utilisée dans les conditions de Gauss si les rayons sont paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu inclinés.

Un système optique est rigoureusement stigmatique si tous les rayons issus d'un point se croisent en un point unique.

Un système optique respecte un stigmatisme approché si tous les rayons issus d'un point se croisent au voisinage d'un point de taille inférieure à la taille d'une cellule du capteur.

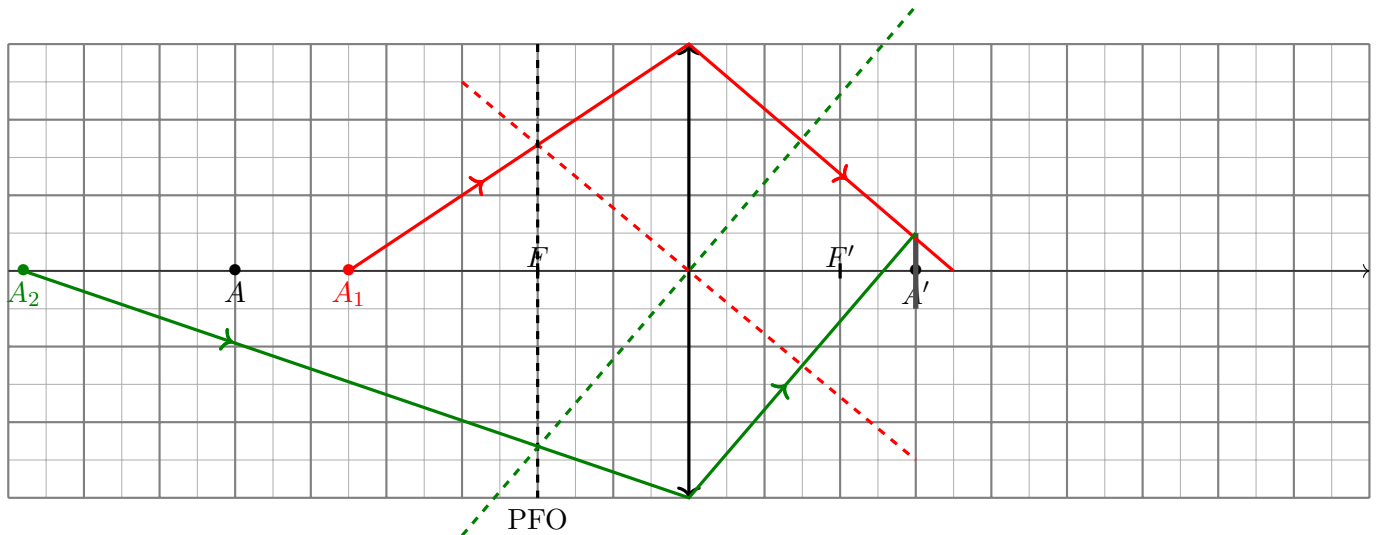
R24. Réaliser un schéma à l'échelle de la situation décrite ci-dessus en y faisant également apparaître l'image A' conjuguée à l'objet A par la lentille.

Solution:



- R25. Ajouter sur votre schéma un diaphragme de 6 cm de diamètre centré sur l'axe optique accolé à la lentille, ainsi que le pixel central du capteur placé dans le plan de l'image A , centré sur l'axe optique et de taille 1 cm. Construire graphiquement les positions extrêmes de l'objet A (notées A_1 et A_2) respectant les conditions assurant un stigmatisme approché. Mesurer la profondeur de champ p à l'aide de votre schéma.

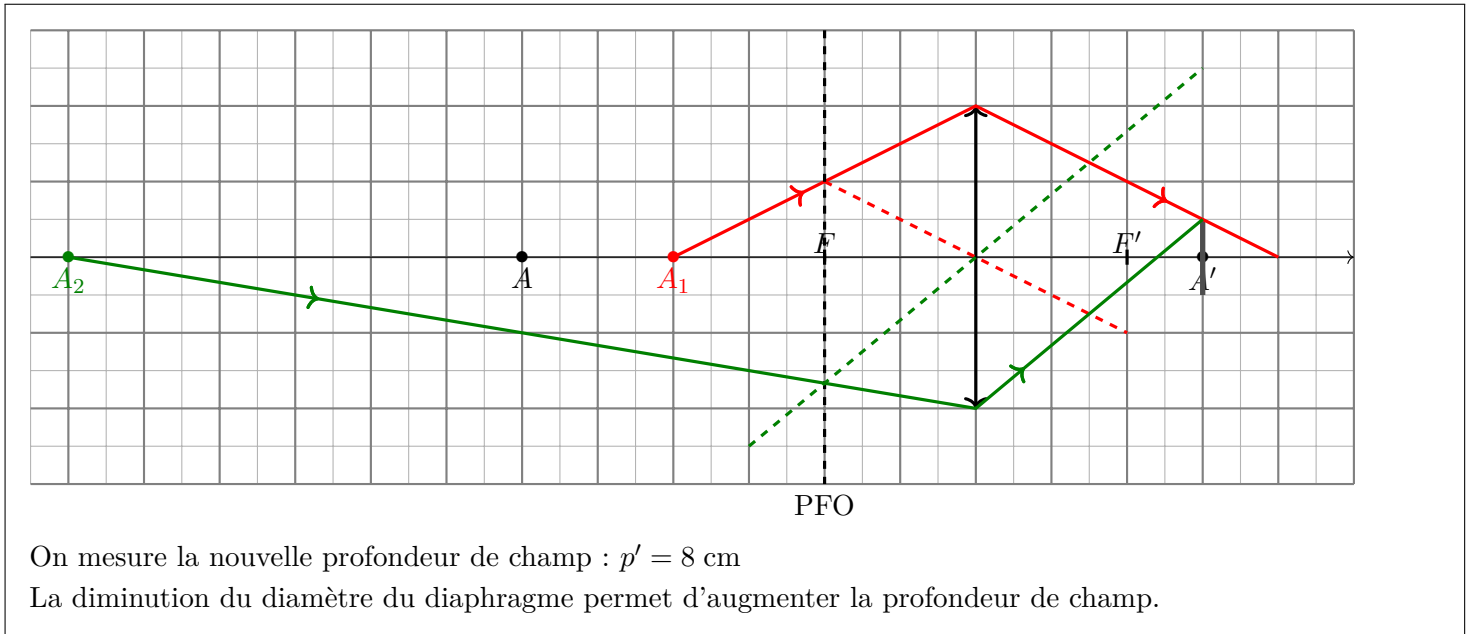
Solution:



On mesure $p = A_1 A_2 = 4,3 \text{ cm}$

- R26. Réaliser un nouveau schéma et déterminer la nouvelle profondeur de champ p' pour un diaphragme de diamètre 4 cm centré sur l'axe optique. Quelle est l'influence du diamètre du diaphragme sur la profondeur de champ ?

Solution: En reportant uniquement ce qui est nécessaire.



B Accéléromètre à détection capacitive

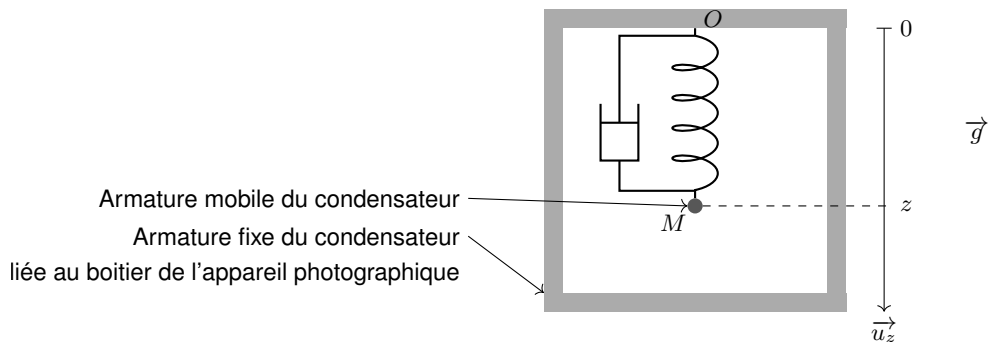
Cette partie est composée de deux sous-parties indépendantes.

B.1 Filtrage mécanique

On modélise mécaniquement l'armature mobile par une masse ponctuelle M de masse m , suspendue à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O un point solide de l'appareil photographique. Le système d'amortissement est modélisé par une force de frottement de la forme

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse du point M par rapport au boîtier de l'appareil photographique.



On cherche à exprimer l'amplitude des vibrations, notée Z_M , engendrées par les tremblements de la main du photographe. Les tremblements de la main du photographe sont modélisés par un mouvement sinusoïdal vertical du point O avec une pulsation ω et une amplitude Z_O

$$z_O(t) = Z_O \cos(\omega t)$$

La position de la masse M est repérée dans le référentiel de l'appareil photographique par sa position verticale z .

R27. On note z_{eq} la position d'équilibre de la masse M dans le référentiel de l'appareil photographique. Déterminer son expression en fonction de la longueur à vide ℓ_0 du ressort, de la masse m de l'armature mobile, de l'intensité du champ de pesanteur terrestre g et la constante de raideur k .

Solution: Système : $M(m)$

Référentiel : Celui de l'appareil photographique

Bilan des forces :

- poids $m\vec{g} = mg\vec{u}_z$
- force de rappel élastique : $\vec{f}_{el} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$, avec $z = \ell$.

— force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$

À l'équilibre, la somme des forces est nulle et $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\ell_{\text{éq}} = z_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

R28. Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse M dans le référentiel de l'appareil photographique. L'équation fera apparaître le coefficient de frottement α , la constante de raideur k , la masse m , la position d'équilibre z_{eq} , la pulsation ω et l'amplitude Z_O .

Indication : Le référentiel de l'appareil photographique étant en mouvement dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, il n'est pas galiléen, et il faut ajouter au bilan des forces la force $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O/\mathcal{R}_T) = -m\ddot{z}_O\vec{u}_z$.

Solution: Principe fondamental de la dynamique à $M(m)$ dans le référentiel de l'appareil :

$$\begin{aligned} m\vec{a}(M/\mathcal{R}) &= m\vec{g} + \vec{f}_{\text{él}} + \vec{F}_f + \vec{f}_{ie} \\ m\ddot{z} &= mg - k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha\dot{z} - m\ddot{z}_O \\ m\ddot{z} &= mg - k(z - \ell_0) - \alpha\dot{z} - m\ddot{z}_O \\ m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= mg + k\ell_0 - m\ddot{z}_O \\ m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= kz_{\text{éq}} - m\ddot{z}_O \\ m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= kz_{\text{éq}} + mZ_O\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Dans la suite on note $Z = z - z_{\text{eq}}$ la position de la masse M par rapport à sa position d'équilibre.

R29. Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = Z_O\omega^2 \cos(\omega t)$$

Donner l'expression des paramètres ω_0 et Q .

Solution:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz(t) &= kz_{\text{éq}} + mZ_O\omega^2 \cos(\omega t) \\ m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z(t) - z_{\text{éq}}) &= mZ_O\omega^2 \cos(\omega t) \\ m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ &= mZ_O\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z &= Z_O\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

On identifie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre, et Q , le facteur de qualité, tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$.

On s'intéresse désormais au mouvement de la masse M en régime sinusoïdal permanent établi.

R30. Justifier que la quantité $Z(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$Z(t) = Z_M \cos(\omega t + \phi)$$

Que sont les quantités Z_M , ω et ϕ ?

Solution: L'équation différentielle est linéaire, donc la solution en régime permanent établi, c'est-à-dire une fois le régime transitoire terminé est de la forme du second membre, qui est ici sinusoïdal de pulsation ω . Z_M est l'amplitude du mouvement de M , ω sa pulsation, et ϕ la phase à l'origine des temps.

R31. À l'aide d'un passage aux complexes, exprimer Z_M en fonction de Z_O , Q et de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

Solution: On passe l'équation différentielle en complexe :, en introduisant l'amplitude complexe $\underline{Z}_M = Z_M e^{j\phi}$

$$-\omega^2 \underline{Z}_M + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{Z}_M + \omega_0^2 \underline{Z}_M = \omega^2 Z_O$$

$$\underline{Z}_M = \frac{\omega^2 Z_O}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

$$\underline{Z}_M = \frac{x^2 Z_O}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

Soit pour l'amplitude $Z_M = |\underline{Z}_M| = \frac{x^2 Z_O}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

R32. Quelle est la nature du filtre associé à $Z_M(x)$?

Solution: Calculons les limites : $\lim_{x \rightarrow 0} Z_M(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} Z_M(x) = Z_O$

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut

R33. Montrer que $Z_M(x)$ passe par un maximum en $x = x_r$ si $Q > 1/\sqrt{2}$ et préciser l'expression x_r .

Solution: Posons $y = \frac{1}{x}$, alors $Z_m(y) = \frac{Z_O}{\sqrt{(y^2 - 1)^2 + \frac{y^2}{Q^2}}}$

Étudions les variations de $g : y \mapsto (y^2 - 1)^2 + \frac{y^2}{Q^2}$

$\frac{dg}{dy} = 4y(y^2 - 1) + \frac{2y}{Q^2}$, qui s'annule en $y = 0$, ou $2y^2 - 1 + \frac{1}{Q^2} = 0$, soit en $y^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ qui n'existe que si $\frac{1}{2Q^2} < 1$, soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

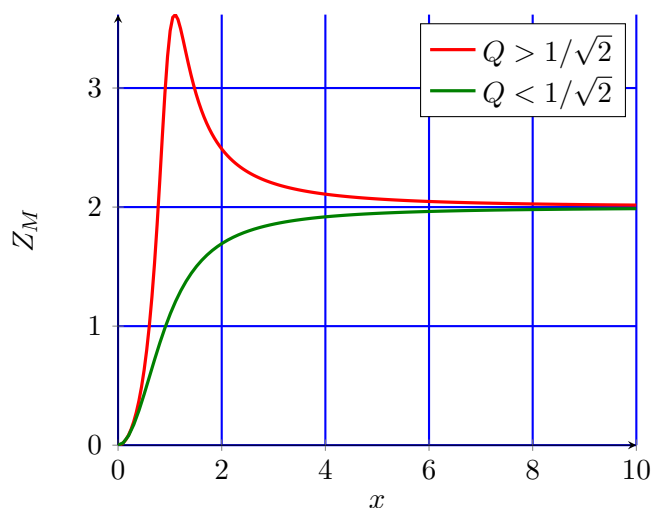
Z_M passe par un maximum en $x_r = \frac{1}{y_r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

R34. Étudier les asymptotes basse et haute fréquences de $Z_M(x)$ puis tracer sur un même graphique l'allure de la courbe $Z_M(x)$ pour $Q_1 < 1/\sqrt{2}$ et $Q_2 > 1/\sqrt{2}$.

Solution:

Pour $x \ll 1$, $Z_m \sim x^2 Z_O$: c'est une asymptote de pente +40 dB/dec

Pour $x \gg 1$, $Z_m \underset{+\infty}{\sim} Z_O$: c'est une asymptote horizontale



R35. La main d'un photographe vibre de 2 mm à une fréquence de 10 Hz, quelle est l'amplitude du mouvement du capteur Z_M dans ces conditions ? On prendra $\omega_0 = 2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $Q = 20$ pour l'application numérique.

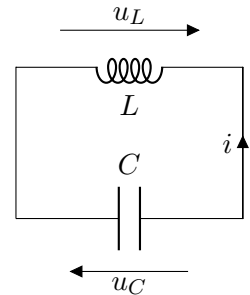
Solution: $\omega = 2\pi f = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \ll \omega_0$

Ainsi $Z_M \sim \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Z_O = \frac{63^2}{4 \cdot 10^6} \times 2 \text{ mm} = \frac{3,6 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^6} \times 2 \text{ mm}$, soit $Z_M \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$

L'effet de la vibration des mains du photographe est fortement atténué.

B.2 Mesure de la capacité

Une mesure directe de capacité n'est pas chose simple. Afin de mesurer la capacité de l'accéléromètre, ce dernier est associé à une bobine d'inductance L afin de former un oscillateur LC dont la fréquence des oscillations dépend de la capacité C de l'accéléromètre, capacité qui est elle-même liée aux vibrations du boîtier engendrés par les tremblements de la main du photographe.



R36. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

Solution: D'après la loi des mailles : $u_C + u_L = 0$, et $i = C \frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$

Ainsi $u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$, ainsi $\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0}$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

R37. Exprimer la fréquence des oscillations du signal u_C en fonction de la capacité C de l'accéléromètre.

Solution: La fréquence des oscillations est donc $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

R38. On suppose que, lors de l'utilisation de l'appareil photographique, la capacité varie faiblement autour de sa valeur en l'absence de vibration C_0 de telle façon que $C = C_0 + \Delta C$ avec $\Delta C \ll C_0$. Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut écrire

$$f = f_0 \left(1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \right)$$

en précisant l'expression de f_0 en fonction de L et C_0 .

Solution:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_0 + \Delta C)}} \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0 \left(1 + \frac{\Delta C}{C_0} \right)}} \\ f &\approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \left(1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \right) \\ f &\approx f_0 \left(1 - \frac{\Delta C}{2C_0} \right) \end{aligned}$$

avec $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$.