

? Lundi 15 juin 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°11 (1) – Corrigé

Exercice n°0 L'induction dans la vie de tous les jours (Durée MAX 10 min)



Remarque –

Qualitatif ne veut pas dire "sans rigueur" et "vocabulaire approximatif". Il faut être très précis sur la cause de l'induction, et ses effets.

Un champ permanent, en l'absence de mouvement, ne génère pas un phénomène d'induction.

Répondre en quelques phrases aux questions suivantes.

R1. Comment fonctionne les détecteurs, placés sous la route, de voiture à certains feux rouges? Pourquoi les vélos ne sont pas bien détectés? Pourquoi sont-ils bien détectés si la ou le cycliste incline son vélo et le déplace au-dessus du détecteur?

Solution: Le détecteur sous la route est constitué, notamment d'une bobine, alimentée en **régime sinusoïdal (variable)**, qui crée un champ magnétique variable dont les lignes de champ traversent la masse métallique de la voiture. Le **flux de ce champ est variable**, et il se produit alors un **phénomène d'induction** au sein du métal de la voiture qui se traduit par l'apparition d'un courant qui crée un champ magnétique dont les lignes de champ traversent la bobine du circuit détecteur, dont le courant est perturbé. C'est la modification du courant qui est détectée.

Le problème du vélo vient du cadre qui est vertical, alors le flux du champ magnétique de la bobine du détecteur à travers le cadre est nul, et ne permet pas le phénomène d'induction. En couchant un peu le vélo, on augmente le flux et favorise l'induction. Le déplacement permet d'accroître l'effet également.

R2. Comment fonctionnent les plaques à induction?

Solution: La bobine dans la plaque à induction est alimentée en **régime sinusoïdal**, et crée donc un champ magnétique sinusoïdal dont les lignes de champ traversent le fond de la casserole posée dessus. Le **flux de ce champ à travers la casserole varie** et provoque un **phénomène d'induction** qui se traduit par l'apparition d'un courant (dit de Foucault) dans le fond de la casserole. De l'effet Joule a lieu qui chauffe le fond de la casserole, puis par diffusion l'eau, les aliments, ...

R3. Comment fonctionne un haut-parleur électrodynamique?

Solution: Le haut-parleur est constitué d'une **bobine placée sur un aimant permanent**. La bobine est alimentée par un générateur qui délivre une tension image du son que l'on souhaite émettre. La **bobine traversée par un courant et plongée dans un champ magnétique est alors soumise à la force de Laplace qui met en mouvement la bobine et la membrane** qui y est attachée. La vibration de la membrane **émet une onde acoustique**, image de la tension qui alimente la bobine.

Exercice n°1 Récupération de l'énergie de vibration (ATS 2023)

Pour illustrer le principe de fonctionnement d'une génératrice, nous étudions une géométrie simplifiée qui correspond à la configuration des rails de Laplace.

On considère une tige qui peut glisser sans frottement sur deux rails parallèles (distants de L). La tige et les rails sont conducteurs, parcourus par un courant induit i et reliés à un dipôle résistif R (qui symbolise le dipôle vers lequel la puissance électrique est envoyée). Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ tel qu'indiqué sur le document 1.

On néglige la résistance de la tige et des rails, ainsi que tout phénomène d'autoinduction.

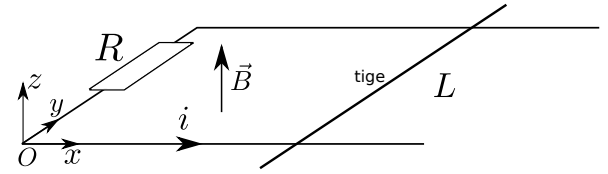


FIGURE 1 – Rails de Laplace.

On note $\vec{v} = v\vec{e}_x$ la vitesse de la tige.

R1. **Décrire** qualitativement les phénomènes physiques mis en jeu dans ce dispositif.

Solution: La tige est en mouvement, la surface du circuit varie, donc le flux du champ magnétique à travers la surface varie. Par induction, un courant apparaît. La tige, traversée par i plongée dans $\vec{B}$ est soumise à la force de Laplace. Celle-ci s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : elle ralentit le mouvement.

R2. **Établir** l'expression de la résultante des forces de Laplace agissant sur la tige, en fonction de L , B_0 , du courant induit i , et d'un vecteur unitaire bien choisi.

Solution: Force de Laplace :

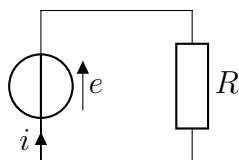
$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathcal{L}} &= \int_0^L i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= \int_0^L i dy \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z \\ &= \int_0^L i B_0 \vec{e}_x \\ &= i L B_0 \vec{e}_x\end{aligned}$$

R3. **Établir** l'expression de la force électromotrice induite (ou tension induite) e dans le circuit.

Solution: Force électromotrice induite :

$$\begin{aligned}e &= -\frac{d\phi}{dt} \\ &= -\frac{d(xLB_0)}{dt} \\ &= -LB_0 \frac{dx}{dt} \\ &= -LB_0 v\end{aligned}$$

R4. **En déduire** une expression du courant induit i en fonction de L , B_0 , v et R .



Solution: Circuit équivalent :

D'après la loi des mailles et d'Ohm :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{LB_0}{R}v$$

R5. **En déduire** que la résultante des forces de Laplace peut s'écrire $-\alpha \vec{v}$ avec α une constante dont on donnera l'expression en fonction de L , B_0 et R .
Quelle est la loi qui garantit que $\alpha > 0$?

Solution:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathcal{L}} &= iLB_0\vec{e}_x \\ &= -\frac{(LB_0)^2}{R}v\vec{e}_x \\ &= -\frac{(LB_0)^2}{R}\vec{v} \\ &= -\alpha\vec{v}\end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{(LB_0)^2}{R}$

La loi de Lenz stipule que les effets de l'induction s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance. La force de Laplace s'oppose donc au moment, dont $\vec{F}_{\mathcal{L}}$ doit être de sens opposé à $\vec{v}$, donc $\alpha > 0$.



Remarque –

Faire référence au signe de v , c'est-à-dire au sens de $\vec{v}$, et au signe de i est inutile. Quoiqu'il arrive $\alpha > 0$.

R6. **Établir** l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

Identifier l'expression de τ .

Solution:

Système : tige

Référentiel : terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des forces :

- poids
- réaction normale
- force de Laplace

D'après le principe fondamental de la dynamique à la tige :

$$\begin{aligned}m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{F}_{\mathcal{L}} \\ \text{Selon } \vec{e}_x \quad m\frac{dv}{dt} &= -\frac{(LB_0)^2}{R}v \\ \frac{dv}{dt} + \frac{(LB_0)^2}{Rm}v &= 0\end{aligned}$$

R7. **La résoudre** si à $t = 0$, $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_x$.

Commenter l'évolution de $v(t)$.

Solution: Résolution : $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = \frac{mR}{(LB_0)^2}$

Avec $v(0) = v_0$: $v(t) = v_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

La force de Laplace, seule force qui s'exerce sur la tige, agit comme une force de frottement, donc la vitesse va diminuer.



Remarque –

Écrire « La vitesse décroît exponentiellement » ne répond pas à « Commenter » : ce n'est pas un commentaire mais une traduction en français de l'expression mathématique obtenue.

R8. **Montrer que** la puissance électrique reçue par le dipôle R est égale à l'opposée de la puissance des forces de Laplace. De quels signes sont ces deux puissances ?

Solution:



Remarque – Lecture de l'énoncé

L'énoncé ne demandait pas d'effectuer un bilan de puissance, mais seulement d'en exprimer deux pour les comparer.

Distinguer ces deux questions.

Puissance reçue par la résistance : $\mathcal{P}_J = Ri^2 = \frac{(LB_0v)^2}{R} > 0$

Puissance des forces de Laplace : $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \vec{F}_{\mathcal{L}} \cdot \vec{v} = -\frac{(LB_0)^2}{R}v^2 = -\mathcal{P}_J < 0$

Ce qui précède peut être généralisé : la puissance électrique produite par le dispositif est, en régime sinusoïdal forcé et en moyenne sur une période, donnée par $\mathcal{P}_{\text{élec}} = \langle \alpha v^2 \rangle$.

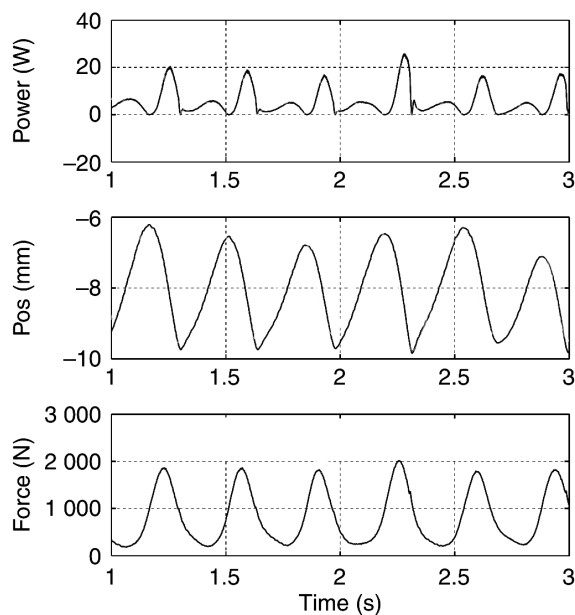


FIGURE 2 – Expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur).

De bas en haut :

- enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle,
- de la position $z(t)$ de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire)
- et de la puissance électrique produite en sortie du dispositif.

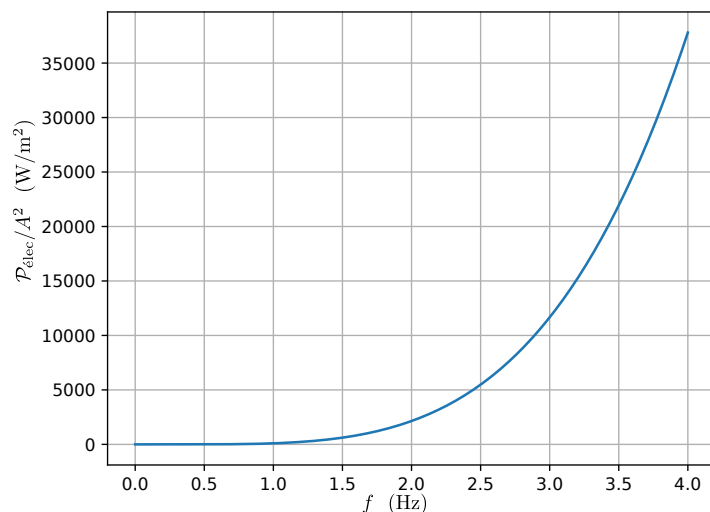


FIGURE 3 – Tracé de la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ produite par le dispositif, divisée par A^2 , où $A \approx 4,5$ cm est l'amplitude du mouvement de la dalle.

R9. **En déduire** une estimation de la puissance produite par le dispositif d'après notre modèle, si on se place dans les mêmes conditions que celles du document 2. Comparer aux valeurs mesurées par le constructeur dans le document 2.

Solution: Déterminons la période puis la fréquence de la figure 2 : $T = 0,4$ s, donc $f = 2,5$ Hz.

On lit $\frac{\mathcal{P}_{\text{élec}}}{A^2} = 5000$, donc $\mathcal{P}_{\text{élec}} = 10$ W, cohérent avec le graphe de la figure 2 sur la courbe Power.

Exercice n°2 Chauffage par induction dans les tokamaks (CCINP PC 2024)

Dans les tokamaks, une partie de l'échauffement est réalisé par induction. Un solénoïde situé au centre du tokamak produit un champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps. Le plasma, de géométrie torique, entoure ce solénoïde central : il est alors parcouru par un intense courant induit qui, par effet Joule, échauffe le plasma. On se propose de modéliser sommairement cette situation.

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Le solénoïde central d'axe (Oz) , de rayon a_1 , est parcouru par un courant $i_1(t)$ qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1(r, t)$, tel que $\vec{B}_1(r < a_1, t) = \beta i_1(t) \vec{e}_z$ (avec β constant) et $\vec{B}_1(r > a_1, t) = \vec{0}$. Le plasma est assimilé à une boucle de courant filiforme parcourue par $i_2(t)$, de même axe que le solénoïde central et de rayon $a_2 > a_1$ (figure 4).

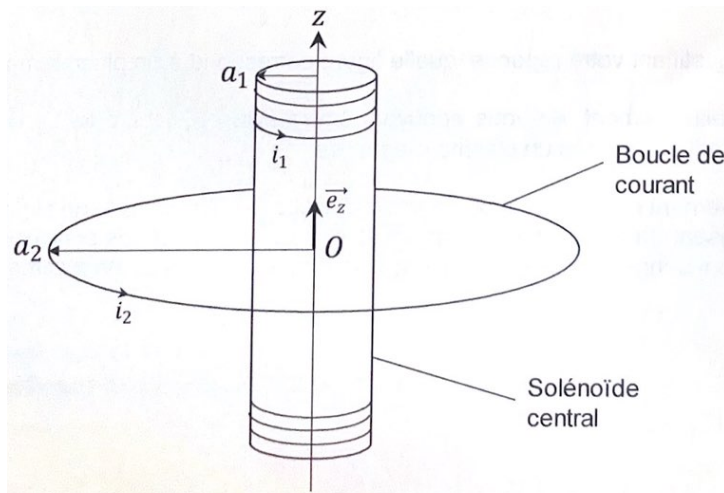


FIGURE 4 – Représentation schématique du système solénoïde central – plasma dans le tokamak

R1. **Donner** la définition de l'inductance mutuelle M .

Solution: L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers la boucle de courant $\mathcal{C}_2$ et l'intensité i_1 : $\varphi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = M i_1$

R2. En calculant le flux du champ $\vec{B}_1$ à travers la boucle de courant, **exprimer** l'inductance mutuelle M entre le solénoïde central et la boucle de courant, en fonction de β et a_1 .

Solution: L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers la boucle de courant $\mathcal{C}_2$ et l'intensité i_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_{1 \rightarrow 2} &= \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \iint_{r < a_1} \beta i_1 \vec{e}_z dS_2 \vec{e}_z + \iint_{r > a_1} \vec{0} dS_2 \vec{e}_z \\ &= \beta i_1(t) \pi a_1^2 \\ &= \pi \beta a_1^2 i_1 \\ &= M i_1 \end{aligned}$$

Ainsi $M = \pi \beta a_1^2$

⚠ Remarque –

Surface d'un disque de rayon r : $S = \pi r^2$

R3. **Calculer** M pour le tokamak ITER, sachant que $a_1 = 2$ m et que le champ magnétique au centre du solénoïde est de 13 T pour un courant maximal de 46 kA.

Solution: A.N. : $\beta = \frac{B_1}{I_{1m}} = \frac{13}{46 \cdot 10^3}$ et $M = 0,0036$ H = 3,6 mH

⚠ Remarque – Distinguez les lettres : $\beta \neq B_1$

On modélise l'interaction entre le solénoïde et le plasma par le circuit électrique représenté figure 5.

Le solénoïde central, d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 , est parcouru entre $t = 0$ et $t = t_1$ par le courant $i_1(t) = I_0 \times \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$ avec I_0 et t_1 des constantes.

La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance R_2 et pour inductance propre L_2 ; elle est parcourue par le courant $i_2(t)$.

À $t < 0$, le courant i_2 est nul.

M est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

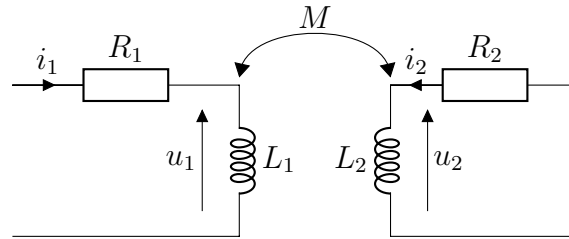


FIGURE 5 – Circuit équivalent au système solénoïde central – plasma

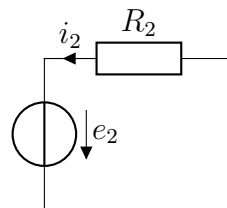
R4. **Exprimer** la force électromotrice induite dans la boucle de courant représentant le plasma.

Solution: La force électromotrice induite dans le circuit 2 est donnée par la loi de Faraday. On prend en compte l'auto-induction et l'induction mutuelle.

$$\begin{aligned} e_2 &= -\frac{d\varphi_{2,\text{tot}}}{dt} \\ e_2 &= -\frac{d(\varphi_{P2} + \varphi_{1 \rightarrow 2})}{dt} \\ e_2 &= -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

R5. Après avoir représenté le circuit électrique équivalent, **établir** une équation différentielle reliant i_2 , i_1 et des constantes du problème.

Solution: Circuit électrique équivalent au circuit 2 :



Loi des mailles dans le circuit 2 :

$$\begin{aligned} e_2 &= R_2 i_2 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2 \\ \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{L_2} i_2 &= -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

R6. **Montrer que** $i_2(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec τ_1 et τ_2 qui seront exprimés en fonction de L_2 , R_2 , M et de t_1 .

Solution: Or $i_1 = I_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$, donc $\frac{di_1}{dt} = -\frac{I_0}{t_1}$

 **Remarque – Dérivée élémentaire**

$$(ax + b)' = a \quad \text{donc} \quad \frac{d}{dt} \left(I_0 - I_0 \frac{t}{t_1} \right) = -\frac{I_0}{t_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{L_2} i_2 &= -\frac{M}{L_2} \times \frac{-I_0}{t_1} \\ \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} &= \frac{I_0}{\tau_1} \end{aligned}$$

On identifie $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$ et $\tau_1 = \frac{L_2 t_1}{M}$

R7. **En déduire** l'expression de $i_2(t)$.

Solution: Solution générale : $i_2(t) = K e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0$

Or $i_2(0) = 0$, par continuité du courant, $i_2(0) = K + \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 = 0$

Ainsi $i_2(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1} I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$

R8. En supposant $t \ll \tau_2$, **simplifier** cette expression par un développement limité au premier ordre en t/τ_2 , et **montrer que** $i_2(t) = \alpha t$, où on exprimera α en fonction de I_0 et t_1 .

Solution: Pour $t \ll \tau_2$, $e^{-\frac{t}{\tau_2}} \sim 1 - \frac{t}{\tau_2}$

Ainsi $i_2(t) \approx \frac{I_0 t}{\tau_1}$

On conserve cette expression pour la dernière question.

R9. **Exprimer** l'énergie reçue par R_2 entre $t = 0$ et $t = t_1$ en fonction de R_2 , L_2 , M , I_0 et de t_1 . Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?

Solution:

 **Remarque –**

La question ne demandait pas d'effectuer un bilan de puissance.

Énergie reçue par la résistance R_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{J2} &= \int_0^{t_1} R_2 i_2^2 dt \\ &= \int_0^{t_1} R_2 \frac{I_0^2 t^2}{\tau_1^2} dt \\ &= R_2 \frac{I_0^2 t_1^3}{\tau_1^2 3} \\ &= R_2 I_0^2 \frac{M^2 t_1^3}{L_2^2 t_1^2 3}\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_{J2} = \frac{M^2}{L_2^2} R_2 I_0^2 \frac{t_1}{3}$ Cette énergie électrique reçue par la résistance va être dissipée par effet Joule sous forme d'énergie thermique que va recevoir le plasma, qui va donc s'échauffer.

Exercice n°3 Recharge par induction ()

On s'intéresse à un système de transfert d'énergie électrique pour recharger la batterie d'une voiture (figure 6).

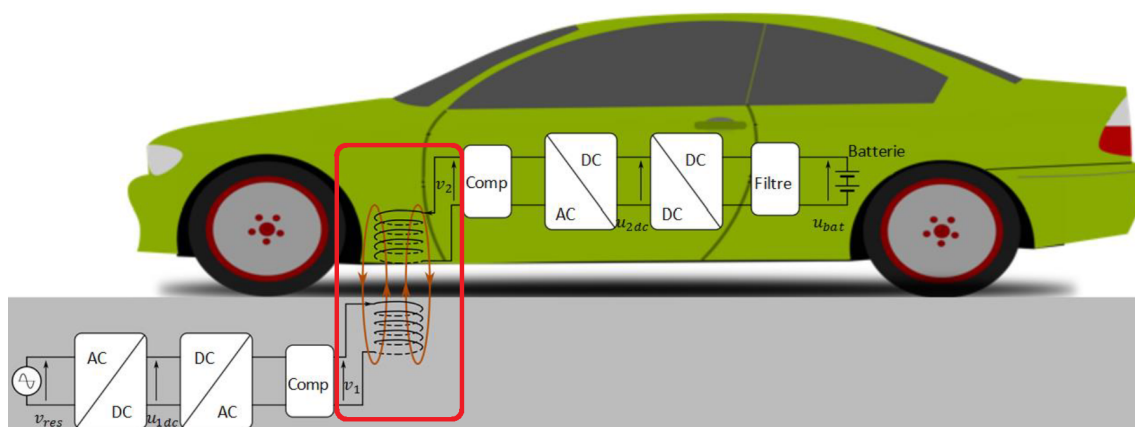


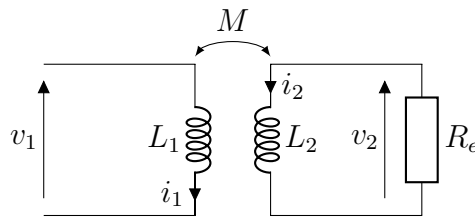
FIGURE 6 – Architecture d'un système de transfert d'énergie par induction

- L'énergie est prélevée sur le réseau alternatif ; La tension réseau est redressée afin de générer une tension continue ; Cette tension continue est convertie en une tension alternative à une fréquence d'environ 85 kHz ;
- Cette tension est appliquée à un circuit de compensation et à la bobine au sol qui émet un champ électromagnétique sinusoïdal à une fréquence d'environ 85 kHz ;
- La bobine secondaire capte ce champ électromagnétique et le convertit en tension ;
- Après passage dans un circuit de compensation, la tension est redressée ; Le niveau de cette tension DC est adapté pour permettre de recharger la batterie du véhicule à travers un filtre permettant d'éliminer les ondulations associées au fonctionnement des convertisseurs de la chaîne de conversion.

R1. **Expliquer** l'apparition d'un courant dans la bobine secondaire.

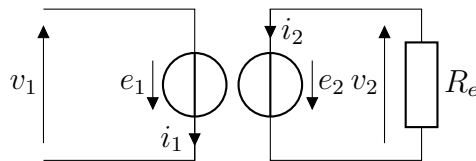
Solution: La bobine au sol est alimentée par une tension sinusoïdale, et est donc traversée par un courant sinusoïdal, et crée un champ magnétique sinusoïdal. Le flux de ce champ magnétique à travers la bobine secondaire varie au cours du temps. Un phénomène d'induction a lieu au sein de la bobine secondaire, et un courant apparaît à travers.

On propose le schéma électrique équivalent suivant, avec M le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines, et R_e la résistance équivalente au montage en sortie de la bobine secondaire. La résistance des bobinages est négligée.



R2. **Établir** le système de deux équations différentielles couplées vérifiées par i_1 et i_2 , faisant intervenir L_1 , L_2 , M , R_e et v_1 .*.

Solution: Circuit électrique équivalent :



1. Flux à travers la première bobine :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \varphi_{P1} + \varphi_{2 \rightarrow 1} \\ &= L_1 i_1 + M i_2\end{aligned}$$

Fem induite donnée par la loi de Faraday :

$$\begin{aligned}e_1 &= -\frac{d\phi_1}{dt} \\ &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

Loi des mailles : $v_1 = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

2. De la même façon, la fem induite donnée par la loi de Faraday : $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

La loi des mailles donne : $v_2 = -e_2$, or $v_2 = -R_e i_2$



Remarque – Attention : convention



R_e était placée en convention générateur dans l'énoncé, ne pas oublier le $-$ dans la loi de la résistance.

Soit $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_e i_2 = 0$

R3. En utilisant la représentation complexe, **établir** l'expression de l'intensité complexe $\underline{i_2}$ et montrer qu'elle s'exprime selon

$$\underline{i_2} = -\frac{\frac{M}{L_1}}{R_e + L_2 j\omega(1 - k^2)} v_1$$

où on exprimera k , appelé coefficient de couplage, en fonction de M , L_1 et L_2

*. flux, fem induites, circuits équivalents,...

Solution: En complexe :

$$\underline{v}_1 = L_1 j\omega \underline{i}_1 + M j\omega \underline{i}_2 \quad (1)$$

$$0 = L_2 j\omega \underline{i}_2 + M j\omega \underline{i}_1 + R_e \underline{i}_2 \quad (2)$$

On isole $\underline{i}_1$ dans (1) : $\underline{i}_1 = \frac{\underline{v}_1}{L_1 j\omega} - \frac{M}{L_1} \underline{i}_2$, que l'on injecte dans (2) :

$$\begin{aligned} 0 &= L_2 j\omega \underline{i}_2 + M j\omega \left(\frac{\underline{v}_1}{L_1 j\omega} - \frac{M}{L_1} \underline{i}_2 \right) + R_e \underline{i}_2 \\ \left(L_2 j\omega - \frac{M^2}{L_1} j\omega + R_e \right) \underline{i}_2 &= -\frac{M}{L_1} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 &= \frac{-\frac{M}{L_1}}{R_e + j\omega \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right)} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 &= \frac{-\frac{M}{L_1}}{R_e + L_2 j\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right)} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_2 &= \frac{-\frac{M}{L_1}}{R_e + L_2 j\omega (1 - k^2)} \underline{v}_1 \end{aligned}$$

avec $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$, soit $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$

R4. **En déduire** l'expression de $\underline{v}_2$, puis de l'amplitude V_{2m} en fonction des données du problème.

Solution: La loi d'Ohm donne $\underline{v}_2 = -R_e \underline{i}_2$, soit $\underline{v}_2 = \frac{R_e \frac{M}{L_1}}{R_e + L_2 j\omega (1 - k^2)} \underline{v}_1$.

L'amplitude vaut $V_{2m} = \frac{R_e M}{L_1} \times \frac{V_{1m}}{\sqrt{R_e^2 + L_2^2 \omega^2 (1 - k^2)^2}}$

Les bobines émettrices et réceptrices sont distantes l'une de l'autre et l'énergie électromagnétique doit traverser l'espace entre les deux bobines. Cependant, les fuites sont très importantes et le coefficient de couplage est faible (inférieur à 30% pour des distances usuelles entre bobines dans les applications de recharge de véhicule) alors qu'il est supérieur à 99% dans un transformateur.

R5. Quelle est la différence avec le transformateur qui explique cette différence de couplage ?

Solution: Les deux bobines d'un transformateur sont placées sur un matériau ferromagnétique (feuilleté pour limiter les pertes par courants de Foucault), qui a la propriété de canaliser les lignes de champ, ainsi la totalité (ou presque) des lignes de champ magnétique traversent l'autre bobine et assure un couplage presque parfait. Ce matériau ferromagnétique n'est pas présent dans le système de recharge des batteries de voiture présenté ici.

Exercice n°4 Jules Verne et la statique des fluides (Mme Valade 2025)

Dans les trois parties, nous nous intéressons à la pression dans un fluide. Dans un premier temps on s'intéresse à la loi de la statique des fluides, puis on s'intéressera successivement à la pression dans l'atmosphère et à celle dans l'océan.

On considère un fluide de masse volumique notée ρ , dont on cherche à étudier le champ de pression P . Le fluide est supposé au repos dans le référentiel terrestre d'étude considéré galiléen à l'échelle de l'étude.

Partie A Loi de la statique des fluides

R1. **Donner** l'expression de la résultante des forces de pression qui s'exerce sur une particule fluide (c'est-à-dire son équivalent volumique).

Solution: La résultante des forces de pression qui s'exerce sur une particule fluide est $d\vec{F}_P = - \overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau$, où $d\tau$ est le volume élémentaire de la particule fluide.

R2. En considérant un axe vertical ascendant (Oz), **écrire** l'équation de la statique des fluides projetée selon (Oz). On s'assurera physiquement du signe.

Solution: En projection selon l'axe (Oz) vertical ascendant : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

Partie B Cinq Semaines en ballon

Dans Cinq Semaines en ballon de Jules Verne, un savant et explorateur, le Docteur Samuel Fergusson, accompagné de son serviteur Joe et son ami chasseur professionnel Richard Kennedy, dit Dick, décident de survoler l'Afrique orientale, de Zanzibar aux sources du Nil – région alors non complètement explorée – à bord d'un ballon gonflé à l'hydrogène, le Victoria. Il a inventé un mécanisme qui, en éliminant la nécessité de libérer du gaz ou de jeter du lest pour contrôler son altitude, permet d'effectuer de très longs trajets en toute autonomie.

Partie B.1 Champ de pression dans l'atmosphère

On souhaite déterminer l'évolution de la pression dans l'atmosphère dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme : on assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire M_{air} , la température T_0 uniforme et le champ de pesanteur g uniforme.

L'axe (Oz) est choisi vertical ascendant, avec l'origine au niveau du sol.

R3. **Établir** la relation entre la masse volumique de l'air, la pression et des constantes.

Solution: Considérons une particule de fluide de masse m , de volume V , contenant n moles.

$$\text{Masse volumique : } \rho(z) = \frac{m}{V} = \frac{n \times M_{\text{air}}}{V}$$

$$\text{La loi des gaz parfaits donne : } P(z)V = nRT_0, \text{ soit } \frac{n}{V} = \frac{P}{RT_0}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\rho(z) = \frac{M_{\text{air}}P(z)}{RT_0}}$$

R4. À l'aide de **R2** et **R3**, **établir** l'équation différentielle vérifiée par la pression, sous la forme

$$\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0$$

Exprimer H en fonction de R , T_0 , M_{air} et g .

Déterminer sa valeur numérique (au moins en ordre de grandeur).

Solution: Équation de la statique des fluides : $\frac{dP}{dz} = -\rho(P(z))g$, car (Oz) ascendant.

ATTENTION : dans l'air N'est PAS un fluide incompressible, sa masse volumique dépend de la pression, qui elle-même dépend de l'altitude, donc ρ N'est PAS constante.

L'équation de la statique des fluides fait intervenir deux fonctions inconnues : $P(z)$ et $\rho(z)$, il faut donc une deuxième équation pour résoudre le problème. Elle est donnée par la loi des gaz parfaits (hypothèse du calcul) : $\rho(z) = \frac{M_{\text{air}}P(z)}{RT_0}g$.

$$\text{Ainsi : } \frac{dP}{dz} = -\frac{M_{\text{air}}P(z)}{RT_0}g \Leftrightarrow \boxed{\frac{dP}{dz} + \underbrace{\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0}}_{=\frac{1}{H}}P(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{P(z)}{H} = 0}$$

On reconnaît une équation différentielle du 1^{er} ordre à coefficient constant, du type de celle obtenue pour le circuit RC série. En effet, dans le cadre des hypothèses, g est uniforme (vrai à 1% jusqu'à plus de 10 km d'altitude) et la température T_0 est supposée la même en tout point, donc la grandeur $\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0}$ est une constante.

La grandeur $\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0}$ est homogène à l'inverse d'une distance, on introduit H la hauteur caractéristique,

$$\text{avec } \frac{1}{H} = \frac{M_{\text{air}}g}{RT_0}, \text{ soit } \boxed{H = \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g}}$$

$$\text{A.N. : } H = 8,5 \cdot 10^3 \text{ m} = 8,5 \text{ km}$$

R5. **En déduire** l'évolution de la pression dans l'atmosphère (c'est-à-dire l'expression de $P(z)$), en notant P_0 la pression au niveau du sol.

Solution: Solution générale : $P(z) = Ke^{-\frac{z}{H}}$, or $P(0) = P_0$, donc $\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}}$

Partie B.2 Décollage du ballon

Le ballon qui emmène les héros du roman au-dessus des contrées inexplorées de l'Afrique combine les techniques du ballon à gaz et de la montgolfière. Dans le premier cas, l'enceinte du ballon est fermée et gonflée d'un gaz plus léger que l'air (ici, l'hydrogène) ; la montée ou la descente se commandent respectivement par le lâcher de lest embarqué au départ de l'engin ou par l'ouverture d'une valve laissant échapper un peu de gaz : la perte progressive de gaz, qui impose de recharger de moins en moins de lest, limite la durée des voyages. Dans le second cas, le ballon est ouvert vers le bas et rempli d'air que l'on chauffe ou laisse refroidir selon qu'on veut monter ou descendre : là, le problème est de disposer d'une puissance de chauffe souple et puissante.

Le ballon du Dr Fergusson est un ballon à hydrogène que l'on va pouvoir manœuvrer en chauffant plus ou moins le gaz contenu dans l'enveloppe : à la différence du système avec valve, on ne doit – en théorie – perdre aucun gaz, ce qui va permettre les plus longs parcours aériens. Le chauffage du gaz est assuré par un système de tuyaux pénétrant dans le ballon et parcourus par un gaz qui passe dans un échangeur thermique chauffé par un chalumeau hydrogène/oxygène dont le débit est réglable. Ces deux gaz sont produits par l'électrolyse de l'eau grâce à l'électricité produite par une pile Bunsen. Cela, c'est la théorie, et il y a au moins un cas où le système est réputé avoir fonctionné, sans que l'ensemble explose : le voyage de cinq semaines en ballon décrit par Jules Verne...

D'après Wikipedia

Nous nous intéressons au vol d'un ballon à dihydrogène, de volume V supposé constant, fermé sans contact avec l'atmosphère. L'enveloppe du ballon, la nacelle dans laquelle se trouvent les explorateurs et les explorateurs eux-même est de masse m .

On note $T_0 = 27^\circ\text{C}$ la température constante de l'atmosphère, et $P_0 = 1 \text{ bar}$ la pression au niveau du sol.

R6. **Effectuer un bilan des forces** précis s'exerçant sur le ballon, et les représenter sur un schéma.

Solution: Système : ballon

Référentiel : Terrestre considéré galiléen

Bilan des forces :

- poids de l'enveloppe $m\vec{g}$
- poids du gaz : $m_{\text{H}_2}\vec{g} = \rho_{\text{H}_2}V\vec{g}$

— poussée d'Archimède due à l'air : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{air}} V \vec{g}$

 Remarque – Poussée d'Archimède

C'est la force de pression exercée par le fluide EXTÉRIEUR au système : H_2 est contenu DANS le système, donc il n'exerce pas de poussée d'Archimède, mais il faut le comptabiliser dans le poids du système.

R7. **Établir** la condition sur le volume V de dihydrogène permettant au ballon de décoller. On l'exprimera en fonction de $\rho_{\text{air},0}$ la masse volumique de l'air au niveau du sol, et ρ_{H_2} celle du dihydrogène, et de la masse $m = 300 \text{ kg}$.

Solution:

 Remarque –

Il n'est pas possible de passer de la traduction d'une situation d'équilibre à une situation où le ballon s'élève : on ne peut pas passer d'une égalité à une inégalité.

Le ballon s'élève si la résultante des forces est dirigée vers le haut, soit $(m + \rho_{\text{H}_2} V - \rho_{\text{air}} V) \vec{g}$ vers le haut. Or $\vec{g}$ est dirigé vers le bas, donc il faut que $m + \rho_{\text{H}_2} V - \rho_{\text{air}} V < 0$.

Soit $V > \frac{m}{\rho_{\text{air},0} - \rho_{\text{H}_2}}$

R8. **En déduire** que le volume minimal que doit avoir le ballon est

$$V_{\min} = \frac{mRT_0}{P_0(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2})}$$

Faire l'application numérique.

Solution: D'après la loi des gaz parfaits : $\rho = \frac{MP}{RT_0}$

Ainsi, au niveau du sol

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \frac{m}{\rho_{\text{air},0} - \rho_{\text{H}_2}} \\ &= \frac{m}{\frac{P_0 M_{\text{air}}}{RT_0} - \frac{P_0 M_{\text{H}_2}}{RT_0}} \\ &= \frac{mRT_0}{P_0(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2})} \\ &= \frac{300 \times 8,3 \times 300}{10^5 \times 27.10^{-3}} \\ &= \frac{9 \times 8,3.10^4}{27.10^2} \\ &= \frac{8,3}{3} \times 10^2 \\ &= 277 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

On gonfle le ballon avec un volume $V = 300 \text{ m}^3$ et le ballon s'élève dans l'atmosphère.

R9. **Exprimer** la masse de dihydrogène contenu dans le ballon.

Solution: D'après la loi des gaz parfaits : $m_{\text{H}_2} = \frac{M_{\text{H}_2} P_0 V}{RT_0} = \frac{2}{8,3} \times 10^2 = 25 \text{ kg}$

R10. En exploitant, notamment **R3** et **R4**, **déterminer** l'altitude maximale que peut atteindre le ballon (c'est-à-dire au-delà de laquelle il ne peut plus s'élever).

Solution:



Remarque –

Les ballons gonflés à l'hydrogène ne sont pas ouverts sur l'air, donc la pression n'est pas égale a priori entre l'intérieur et l'extérieur.

Le ballon peut s'élever, tant que $m + \rho_{\text{H}_2} V - \rho_{\text{air}}(z)V < 0$, or ρ_{air} décroît exponentielle ment avec z et donc arrivera une altitude où la condition ne sera plus respectée :

$$\begin{aligned} m + m_{\text{H}_2} - \rho_{\text{air}}(z_{\text{max}})V &= 0 \\ m + m_{\text{H}_2} V &= \rho_{\text{air}}(z_{\text{max}})V \\ m + m_{\text{H}_2} &= \frac{P(z_{\text{max}})M_{\text{air}}}{RT_0} V \\ m + m_{\text{H}_2} &= \frac{P_0 M_{\text{air}}}{RT_0} V e^{-\frac{z_{\text{max}}}{H}} \\ e^{-\frac{z_{\text{max}}}{H}} &= \frac{(m + m_{\text{H}_2})RT_0}{P_0 M_{\text{air}}} \\ -\frac{z_{\text{max}}}{H} &= \ln \left(\frac{(m + m_{\text{H}_2})RT_0}{P_0 M_{\text{air}}} \right) \end{aligned}$$

Soit $z_{\text{max}} = -H \ln \left(\frac{(m + m_{\text{H}_2})RT_0}{P_0 M_{\text{air}}} \right)$

Partie C 20 000 lieues sous les mers

On s'intéresse à la pression (**Partie C.1**) dans l'océan, puis au sous-marin (**Partie C.3** et **Partie C.2**) de 20 000 lieues sous les mers.

Partie C.1 Pression dans l'océan

On souhaite déterminer la pression au fond de la fosse des Mariannes, située à $h = 10 \text{ km}$ en-dessous de la surface de l'eau.

On choisit l'axe (Oz) ascendant, avec l'origine O située au fond de la fosse des Mariannes.

L'eau de l'océan est un fluide incompressible et homogène.

R11. Que signifient ces hypothèses sur la masse volumique de l'océan ?

Solution: La masse volumique est constante partout dans l'océan.

R12. **Déterminer** l'expression de la pression dans l'océan en fonction de P_0 (la pression à la surface de l'océan), ρ , g , h et z .

Solution: Par intégration : $P(z) = -\rho g z + K$

Or $P(z = h) = P_0 = -\rho g h + K$, soit $P(z) = P_0 + \rho g(h - z)$

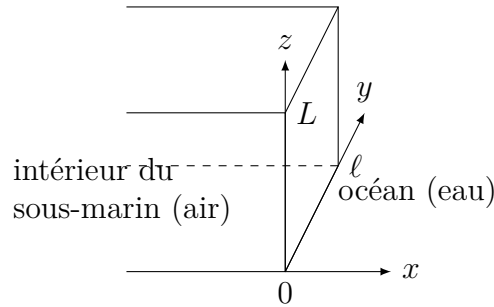
Partie C.2 Force de pression

Le Nautilus est au posé au fond de l'océan, à une profondeur H , et on admet que la pression s'exprime

$$P(z) = P_0 + \rho_{em}g(H - z)$$

où ρ_{em} est la masse volumique de l'eau de mer.

La sous-marin présente des vitres, que nous assimilons (par soucis de simplification) à des rectangles de largeur ℓ et de hauteur L , planes, et verticales.



Le sous-marin est pressurisé à la pression atmosphérique de $P_0 = 1$ bar.

R13. **Donner** l'expression de l'élément de surface sur la vitre.

Solution: La vitre est dans le plan Oyz , donc $dS = dydz$.

R14. **Exprimer** la force élémentaire de pression exercée par l'eau et l'air sur la vitre.

Solution: Force élémentaire exercée par l'eau et l'air

$$\begin{aligned} d\vec{F}_P &= d\vec{F}_{P,\text{eau}} + d\vec{F}_{P,\text{air}} \\ &= P_{\text{eau}}dS(-\vec{u}_x) + P_{\text{air}}dS\vec{u}_x \\ &= -(P_0 + \rho g(H - z) - P_0)dydz\vec{u}_x \end{aligned}$$

Soit $d\vec{F}_P = -\rho g(H - z)dydz\vec{u}_x$



Remarque – Sens des forces de pression : Sens physique

L'air est situé en $x < 0$, et pousse donc selon $+\vec{u}_x$, d'où $P_0dS(+\vec{u}_x)$.

L'air est située en $x > 0$, et pousse donc selon $-\vec{u}_x$, d'où $PdS(-\vec{u}_x)$.

R15. **Exprimer** la résultante des forces de pression s'exerçant sur la vitre.

Solution: La résultante des forces de pression exercées sur la vitre se calcule en intégrant la force

élémentaire de pression exprimée précédemment :

$$\begin{aligned}\vec{F}_P &= \iint_{\text{vitre}} d\vec{F}_P \\ &= - \int_{y=0}^{\ell} \int_{z=0}^L \left(\rho_{em} g (H - z) dy dz \vec{u}_x \right) \\ &= - \rho_{em} g \left(\int_{y=0}^{\ell} \int_{z=0}^L (H - z) dy dz \right) \vec{u}_x \\ &= - \rho_{em} g \int_0^{\ell} dy \times \int_0^L (H - z) dz \vec{u}_x \\ &= - \rho_{em} g \ell \left[H z - \frac{z^2}{2} \right]_0^L \vec{u}_x \\ &= - \rho_{em} g \ell \left(H L - \frac{L^2}{2} \right) \vec{u}_x\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\vec{F}_P = - \rho_{em} g \ell L \left(H - \frac{L}{2} \right) \vec{u}_x}$

On vérifie que cette force est bien dirigée selon $-\vec{u}_x$.



Remarque – Esprit critique

Il faut vérifier le sens de la force et l'homogénéité.

Partie C.3 L'équilibre du Nautilus

Le capitaine Nemo explique que « Lorsque j'ai fait les plans de ce navire destiné à une navigation sous-marine, j'ai voulu, qu'en équilibre dans l'eau il plongeât des neuf dixièmes, et qu'il émergeât d'un dixième seulement. Par conséquent, il ne devait déplacer dans ces conditions que les neuf dixièmes de son volume, soit treize cent cinquante-six mètres cubes et quarante-huit centièmes [...] »

R16. Quelles sont les forces qui s'exercent sur le sous-marin dans cette situation ?

Traduire le fait qu'il est à l'équilibre.

Solution: Système : Nautilus

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

— poids $m \vec{g}$

— poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{em} V_i \vec{g} - \rho_{air} V_e \vec{g} = -(0,9\rho_{eau} + 0,1\rho_{air}) V \vec{g}$

À l'équilibre : $m \vec{g} + \vec{\Pi}_A = \vec{0}$

Soit $\boxed{m = (0,9\rho_{em} + 0,1\rho_{air}) V}$

R17. **En déduire** la masse du Nautilus pour qu'il en soit ainsi.

Solution: On peut négliger $0,1\rho_{air}$ devant $0,9\rho_{em}$

A.N. : $m = 0,9V\rho_{em} = 1356,48 \times 1092 \approx 1400$ tonnes

Ainsi s'achève ce dernier DS de PCSI.

J'espère que ce dernier devoir, ainsi que tous les précédents, vous aura intéressé.e.

Merci pour l'année, et bonne continuation !
L'année n'est pas encore terminée, il reste deux semaines ;-) !