

? Lundi 15 juin 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°11 (2) – Corrigé

Exercice n°0 L'induction dans la vie de tous les jours (Durée MAX 10 min)



Remarque –

Qualitatif ne veut pas dire "sans rigueur" et "vocabulaire approximatif". Il faut être très précis sur la cause de l'induction, et ses effets.

Un champ permanent, en l'absence de mouvement, ne génère pas un phénomène d'induction.

Répondre en quelques phrases aux questions suivantes.

R1. Comment fonctionne les détecteurs, placés sous la route, de voiture à certains feux rouges ? Pourquoi les vélos ne sont pas bien détectés ? Pourquoi sont-ils bien détectés si la ou le cycliste incline son vélo et le déplace au-dessus du détecteur ?

Solution: Le détecteur sous la route est constitué, notamment d'une bobine, alimentée en **régime sinusoïdal (variable)**, qui crée un champ magnétique variable dont les lignes de champ traversent la masse métallique de la voiture. Le **flux de ce champ est variable**, et il se produit alors un **phénomène d'induction** au sein du métal de la voiture qui se traduit par l'apparition d'un courant qui crée un champ magnétique dont les lignes de champ traversent la bobine du circuit détecteur, dont le courant est perturbé. C'est la modification du courant qui est détectée.

Le problème du vélo vient du cadre qui est vertical, alors le flux du champ magnétique de la bobine du détecteur à travers le cadre est nul, et ne permet pas le phénomène d'induction. En couchant un peu le vélo, on augmente le flux et favorise l'induction. Le déplacement permet d'accroître l'effet également.

R2. Comment fonctionnent les plaques à induction ?

Solution: La bobine dans la plaque à induction est alimentée en **régime sinusoïdal**, et crée donc un champ magnétique sinusoïdal dont les lignes de champ traversent le fond de la casserole posée dessus. Le **flux de ce champ à travers la casserole varie** et provoque un **phénomène d'induction** qui se traduit par l'apparition d'un courant (dit de Foucault) dans le fond de la casserole. De l'effet Joule a lieu qui chauffe le fond de la casserole, puis par diffusion l'eau, les aliments, ...

R3. Comment fonctionne un haut-parleur électrodynamique ?

Solution: Le haut-parleur est constitué d'une **bobine placée sur un aimant permanent**. La bobine est alimentée par un générateur qui délivre une tension image du son que l'on souhaite émettre. La **bobine traversée par un courant et plongée dans un champ magnétique est alors soumise à la force de Laplace qui met en mouvement la bobine et la membrane** qui y est attachée. La vibration de la membrane **émet une onde acoustique**, image de la tension qui alimente la bobine.

Exercice n°1 Le freinage du Blue-Fire (D'après Centrale-Supélec TSI Physique-chimie 1 2025)

Le Blue Fire est l'une des montagnes russes du parc d'attraction Europa-Park, situé à Rust, en Allemagne. Elle est en service depuis le 4 avril 2009. Le nom de l'attraction a été choisi en référence à la couleur de la flamme émise par la combustion du gaz naturel, vecteur énergétique important.

FIGURE 1 – Vue d'ensemble du Blue Fire

Cette montagne russe fait partie de la famille des montagnes russes lancées (launched coaster) : en effet, l'accélération principale du train a lieu dans la zone de départ, à l'aide d'une longue zone accélératrice rectiligne.

À la fin du trajet, le train doit être freiné. Pour éviter un freinage uniquement mécanique qui nécessiterait de fréquents remplacements des pièces en frottement, la solution adoptée par les concepteurs du Blue Fire est un freinage par induction.

Pour décrire ce freinage, on utilise la modélisation simplifiée suivante. Le mouvement du train sera étudié dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

On note m la masse totale du train.

Chaque **aimant du train** est supposé créer sur les spires du stator un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$ uniforme, dans une zone délimitée carrée de côté ℓ .

Des **spires carrées** en cuivre, de côté identique ℓ et de résistance électrique R , régulièrement espacées entre elles de cette même distance ℓ , sont placées perpendiculairement à $\vec{B}$ (figure 2). On suppose que le train comporte N aimants. Pour cette étude, on supposera pour simplifier que tous les aimants du train sont en interaction avec une spire dès le début du freinage, ce qui revient à négliger les phases d'entrée et de sortie progressive du train de la zone de freinage.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'**interaction entre un seul aimant du train et une seule spire, dont on négligera l'inductance propre**.

On note x la distance entre la gauche de cette spire et l'extrémité avant de l'aimant, et on note $v = \dot{x}$ (c.f. figure 2)

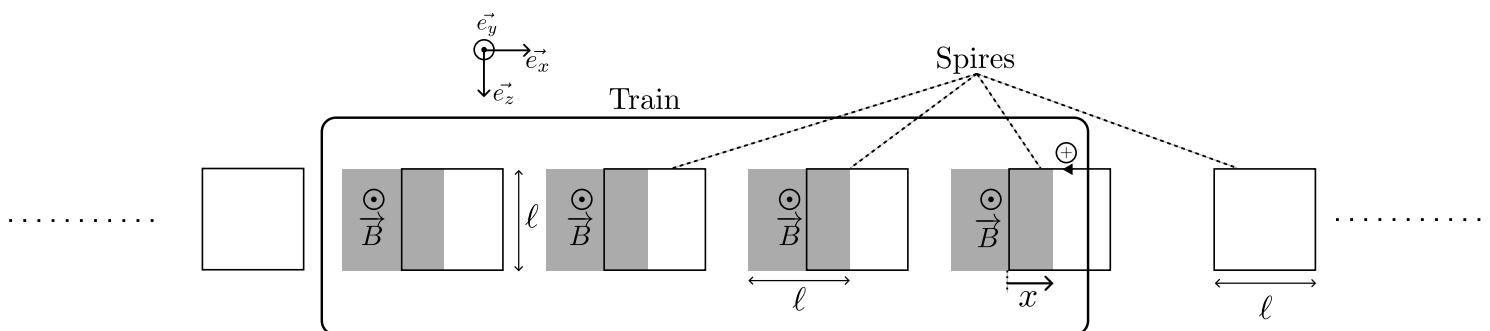


FIGURE 2 – Paramétrage du dispositif de freinage inductif. **Les spires sont fixes**, alors que les **aimants liés au train créent des zones de champ $\vec{B}$ mobiles**, représentées par des rectangles foncés. Seuls 4 aimants sont représentés ici.

R1. Décrire qualitativement mais précisément les phénomènes physiques qui se produisent permettant de freiner le train.

Solution:

Avant d'entrée dans la zone où règne $\vec{B}$, la luge a un mouvement rectiligne uniforme (en l'absence de frottements).

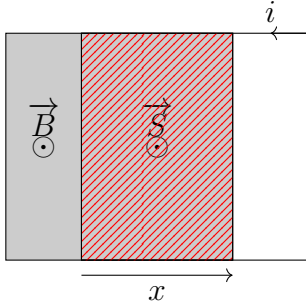
Quand le cadre commence à entrer dans la zone de $\vec{B}$, la surface traversée par les lignes de champ augmente, donc le flux également. Il se produit un phénomène d'induction qui se traduit par l'apparition d'un courant induit dans le circuit fermé. Le cadre traversé par i et plongé dans $\vec{B}$, est alors soumis aux actions des forces de Laplace. D'après la loi de Lenz, la force de Laplace s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, c'est-à-dire le mouvement. Le cadre va donc être freiné par ces forces de Laplace.

Une fois le cadre entièrement dans la zone de $\vec{B}$, la surface ne varie plus, le flux non plus. Aucun phénomène d'induction n'a lieu. La luge persévère alors dans un mouvement rectiligne uniforme à une vitesse inférieure à celle avec laquelle elle est entrée dans la zone de $\vec{B}$.

R2. Après avoir précisé son **orientation** sur un **schéma** représentant uniquement le premier aimant du train et la spire avec lequel il interagit, **déterminer l'expression** de la force électromotrice induite dans la spire e en fonction de B , v et ℓ .

En déduire l'équation électrique liant B , v , ℓ , R et l'intensité i dans la spire, dont on aura précisé l'orientation sur un schéma.

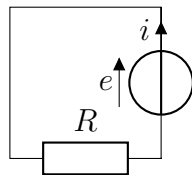
Solution:



Plus du champ $\vec{B}$ à travers le cadre : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bx\ell$

D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite est :

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\phi}{dt} \\ e &= -\frac{d(B\ell x)}{dt} \\ &= -B\ell \dot{x} \\ &= -B\ell v \end{aligned}$$



Circuit électrique équivalent :

D'après la loi des mailles : $e = Ri$, soit $-B\ell v = Ri$

R3. **Montrer** que tant que $0 < x < \ell$, la spire est soumise à une force qui se met sous la forme $\overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}} = \alpha v \vec{e}_x$ où l'on précisera l'expression de α en fonction de ℓ , B et R (vérifier que $\alpha > 0$).

Solution: La résultante de Laplace s'exerçant sur les deux côtés inférieurs et supérieurs se compense.

Le côté droit n'est pas plongé dans le champ magnétique tant que $z < b$, donc n'est pas soumis à la force de Laplace.

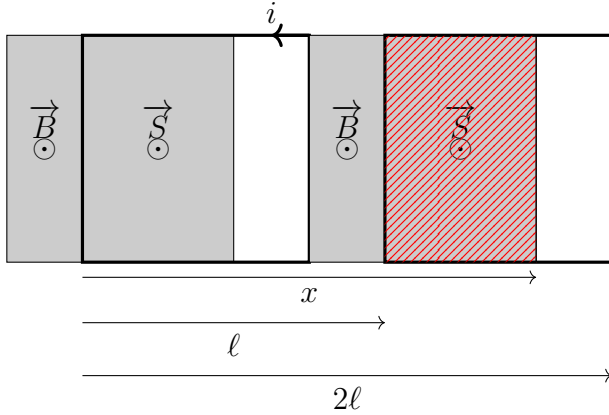
La force de Laplace s'exerçant sur le côté gauche vaut donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}} &= \int_0^\ell id \vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= \int_0^\ell idz \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_y \\ &= \int_0^\ell -iBdz \vec{e}_x \\ &= -\ell i B \vec{e}_x \\ &= -\ell B \times \frac{-B\ell v}{R} \vec{e}_x \\ &= +\frac{(\ell B)^2}{R} v \vec{e}_x \\ &= \alpha v \vec{e}_x \end{aligned}$$

On identifie $\alpha = \frac{(\ell B)^2}{R}$

R4. **Montrer** que pour $\ell < x < 2\ell$, $\overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}}$ possède la même expression.

Solution:



La bobine étudiée n'a pas bougée, mais c'est l'aimant a avancé, il se retrouve dans la bobine suivante, à une distance x plus importante.

Les spires étant régulièrement espacées de la distance ℓ , la même surface exactement de l'aimant est au niveau de la spire. La configuration est ici identique à la configuration précédente. Par conséquent, le même flux, la même force électromotrice est induite, le même courant circule dans la spire étudiée. La force est donc identique.

On considère maintenant l'interaction des N aimants du train avec les spires fixes.

R5. Quelle est alors la force totale $\overrightarrow{F_{\text{spires} \rightarrow \text{train}}}$ s'exerçant sur la totalité du train ?

Solution: D'après la troisième loi de Newton, $\overrightarrow{F_{\text{spire} \rightarrow \text{aimant}}} = -\overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}}$

De plus, il y a N aimants, donc $\overrightarrow{F_{\text{spires} \rightarrow \text{train}}} = N\overrightarrow{F_{\text{spire} \rightarrow \text{aimant}}} = -N\overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}} = -N\frac{(\ell B)^2}{R}v\vec{e}_x$

R6. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par v tout au long de la phase de freinage que l'on écrira sous la forme

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

exprimera la constante de temps τ (grandeur positive) en fonction des paramètres.

Solution:

On étudie le mouvement du train dans le référentiel terrestre.

Il est soumis à son poids, la réaction du support et à la force déterminée précédemment.

Lors du freinage, d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_{\text{spires} \rightarrow \text{train}} + m\vec{g} + \vec{R}_N \\ m\frac{dv}{dt}\vec{e}_x &= -N\alpha v\vec{e}_x - mg\vec{e}_y + R_N\vec{e}_y \\ \text{Selon } \vec{e}_x \quad m\frac{dv}{dt} &= -N\alpha v \\ \frac{dv}{dt} + \frac{N\alpha}{m}v &= 0 \\ \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Avec $\tau = \frac{m}{N\alpha}$

R7. Que devient l'énergie cinétique perdue par le train lors de ce freinage ? On justifiera la réponse à l'aide de l'établissement d'un **bilan de puissance** et l'**identification des différents termes**.

Solution:

$$\begin{aligned} (EM) \times v & : m \frac{dv}{dt} \times v = -N\alpha v^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) & = -N\alpha v^2 \\ (EE) \times i & : -B\ell v i = Ri^2 \\ Ri^2 & = -B\ell v \times i \\ Ri^2 & = -B\ell v \times \left(-\frac{-B\ell v}{R} \right) \\ Ri^2 & = \frac{(B\ell)^2}{R} v^2 \\ Ri^2 & = \alpha v^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) & = -NRi^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique perdue est dissipée par effet Joule.

R8. **Justifier** la nécessité d'un freinage mécanique d'appoint afin d'immobiliser complètement le train à la fin de son trajet.

Solution: Si on résout l'équation différentielle, la vitesse est de la forme $v = k \exp(-t/\tau)$. La vitesse n'atteindra donc jamais rigoureusement 0.

De plus, plus la vitesse diminue, plus la force de freinage est faible. Il est donc nécessaire d'apporter un freinage mécanique supplémentaire pour immobiliser complètement le train.

Exercice n°2 Flotteurs profileurs autonomes Argo (D'après Centrale-Supélec TSI Physique-chimie 2 2025)

Partie A Flottabilité des flotteurs Argo

Partie A.1 Modèle de l'océan isotherme compressible

On assimile dans un premier temps l'eau de l'océan à un liquide de température homogène et de masse volumique ρ_0 uniforme baignant dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ (L'axe (Oz) est donc vertical ascendant). On note $P(M)$ la pression en un point M de coordonnées (x, y, z) situé sous la surface libre de l'océan, elle-même en $z = 0$. La pression atmosphérique est supposée uniforme et notée P_{atm} .

R1. Démontrer qu'ici $\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g$.

Solution: Système : particule fluide

Référentiel : Terrestre galiléen à l'échelle de l'expérience

Bilan des actions mécaniques :

— poids : $\rho d\tau \vec{g}$

— force de pression : $-\vec{\text{grad}}(P)d\tau$

À l'équilibre : $\rho d\tau \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P)d\tau = \vec{0}$, soit $\vec{\text{grad}}(P) = \rho \vec{g}$

En projection selon (Pz) vertical ascendant : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

R2. En déduire la valeur numérique de la pression P_{4000} à une profondeur de $H = 4000$ m.

Solution: L'eau de mer est un fluide homogène et incompressible de masse volumique ρ_0 constante, donc $P(z) = -\rho_0 g z + K$, or $P(z=0) = P_{\text{atm}} = K$, soit $P(z) = P_{\text{atm}} - \rho_0 g z$

A.N. : $P(z = -H) = 10^5 + 1025 \times 10 \times 4000 = 4,1 \cdot 10^7$ Pa

L'eau de mer est en réalité un liquide compressible dont la masse volumique varie avec la pression suivant une relation de la forme

$$\rho_e = \rho_0 (1 + \chi_e (P - P_{\text{atm}}))$$

où $\chi_e = 4,5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ est la compressibilité isotherme de l'eau de mer. On considère en revanche toujours que la température de l'océan est uniforme.

R3. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par P et en déduire la nouvelle valeur P'_{4000} de la pression à une profondeur de $H = 4000$ m. Commenter.

Solution: D'après l'équation R1

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\rho_0 (1 + \chi_e (P - P_{\text{atm}})) g \\ \frac{dP}{dz} + \rho_0 g \chi_e P &= \rho_0 g (\chi_e P_{\text{atm}} - 1) \end{aligned}$$

Solution générale : $P(z) = P_{\text{atm}} - \frac{1}{\chi_e} + K e^{-\rho_0 \chi_e g z}$

or $P(z=0) = P_{\text{atm}} = P_{\text{atm}} - \frac{1}{\chi_e} + K$, donc $K = \frac{1}{\chi_e}$

Soit $P(z) = P_{\text{atm}} + \frac{1}{\chi_e} (e^{-\rho_0 \chi_e g z} - 1)$

$$\begin{aligned} P'_{4000} &= 10^5 + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-10}} (e^{+1025 \times 4,5 \cdot 10^{-10} \times 10 \times 4000} - 1) \\ &= 10^5 + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-10}} (e^{4,1 \cdot 10^7 \times 4,5 \cdot 10^{-10}} - 1) \\ &= 10^5 + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-10}} (e^{4,1 \times 4,5 \cdot 10^{-3}} - 1) \\ &\approx 10^5 + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-10}} (1 + 4,1 \times 4,5 \cdot 10^{-3} - 1) \\ &\approx 10^5 + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-10}} \times 4,1 \times 4,5 \cdot 10^{-3} \\ &= 10^5 + 4,1 \cdot 10^7 \\ &= 4,1 \cdot 10^7 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Aux approximations faites, la pression est la même à 4000 m de profondeur.

R4. Dans ce modèle, vérifier que la masse volumique de l'eau de mer à la profondeur H est $\rho_{e,4000} \simeq 1045 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Solution: Masse volumique de l'eau :

$$\begin{aligned}\rho_{e,4000} &= \rho_0 (1 + \chi_e (P - P_{\text{atm}})) \\ &= 1025(1 + 4,5 \cdot 10^{-10} \times (4,1 \cdot 10^7 - 10^5)) \\ &= 1025(1 + 4,5 \times 4,1 \cdot 10^{-3}) \\ &= 1025 \times (1 + 20 \cdot 10^{-3}) \\ &= 1025 \times 1,02 \\ &= 1045 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}\end{aligned}$$

On conservera ce deuxième modèle de l'eau compressible dans la suite de cette partie.

Partie A.2 Contrôle de la dérive en profondeur

Les flotteurs actuels se présentent sous la forme d'un cylindre de volume V_0 , que l'on considérera indéformable mais sous lequel est positionnée une poche, appelée vessie. Un vérin permet de faire varier le volume V_p de cette poche en y déplaçant de l'huile incompressible depuis ou vers le cylindre. Ainsi, la masse totale $m_f = 26,0 \text{ kg}$ du flotteur reste constante, quelle que soit la configuration, mais son volume $V_0 + V_p$ est variable.

R5. Quel doit-être la valeur de V_0 pour que le flotteur soit à l'équilibre dans l'eau de mer à une profondeur $H = 4000 \text{ m}$ avec une vessie vide ($V_p = 0 \text{ L}$) ?

Solution:

Système : flotteur

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids $m_f \vec{g}$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -\rho_e V_0 \vec{g}$

À l'équilibre : $-m_f g + \rho_{e,4000} V_0 g = 0$ soit $V_0 = \frac{m_f}{\rho_{e,4000}}$ soit numériquement $V_0 = 24,9 \text{ L}$.

R6. Calculer le volume $V_{p,\text{max}}$ de la vessie nécessaire pour faire émerger 2,0% du volume V_0 du flotteur lorsque celui-ci se trouve en surface.

Solution: On souhaite avoir 2% du volume du flotteur émergé à l'équilibre. On aura donc 98% du volume du flotteur ainsi que la vessie immergés en surface (où $\rho_{e,0} = \rho_0$) donc :

$$-m_f g + \rho_0 (0,98 V_0 + V_{p,\text{max}}) g = 0 \iff V_{p,\text{max}} = \frac{m_f}{\rho_0} - 0,98 V_0 \text{ A.N. } \underline{V_{p,\text{max}}} = 0,960 \text{ L}$$

On doit prévoir une vessie d'environ 1 litre.

R7. Estimer l'énergie consommée par le vérin du flotteur pour remonter à la surface depuis une profondeur $H = 4000 \text{ m}$.

Solution: On considère que le vérin fait varier le volume de la vessie suffisamment vite pour que le flotteur n'ait pas le temps de trop remonter, de sorte qu'on puisse considérer la pression extérieure constante égale à P'_{4000} .

Le vérin doit faire varier le volume de l'ensemble de V_0 à $V_0 + V_{p,\text{max}}$ alors que la pression extérieure reste constante.

L'énergie à fournir par le vérin est donc au moins l'opposé des forces de pression soit $\delta W = P'_{4000} dV$ ce qui donne : $W = P'_{4000} V_{p,\text{max}}$ soit numériquement $W = 39,1 \text{ kJ}$.

Partie B Conductimètre embarqué

Si différents modèles de flotteurs Argo coexistent aujourd'hui au sein d'une flotte composée de plusieurs milliers d'appareils autonomes, tous embarquent au moins un conductimètre permettant de mesurer, indirectement, la salinité de l'eau.

Les flotteurs Argo sont ainsi équipés de conductimètres inductifs, dont le principe est schématisé en figure ?? . Ce capteur est composé de deux bobines toroïdales placées côte à côte. La première bobine, appelée bobine d'excitation, est alimentée par une tension sinusoïdale $u_1(t)$. Sa résistance interne est négligeable et son inductance propre est L_1 . Elle se comporte comme le primaire d'un transformateur dont le circuit secondaire est l'eau qui baigne l'ensemble et que l'on peut assimiler à une boucle conductrice de résistance R_e , proportionnelle à l'inverse de la conductivité σ de l'eau. Cette boucle se comporte à son tour comme le circuit primaire d'un transformateur dont le secondaire est la seconde bobine, appelée bobine de mesure, de résistance interne négligeable et d'inductance propre L_4 . D'un point de vue électrique, l'ensemble est donc modélisable par le circuit représenté en figure 3, où figurent également le circuit d'alimentation et celui, modélisé par une résistance R_m , permettant la mesure de la tension $u_4(t)$ en sortie.

FIGURE 3 – Schéma électrique équivalent du conductimètre

On admet que le circuit d'alimentation permet de générer une tension u_1 sinusoïdale à la pulsation ω_0 . Toutes les intensités et tensions du circuit sont sinusoïdales à cette pulsation ω_0 .

Partie B.1 Préliminaire : inductance propre et inductance mutuelle entre deux circuits

On cherche dans cette sous-partie à établir quelques résultats utiles par la suite en considérant deux solénoïdes cylindriques coaxiaux $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$, de même longueur ℓ , de rayons respectifs r_a et r_b , comportant respectivement N_a et N_b spires. $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ sont parcourus par des courants notés respectivement i_a et i_b et orientés comme indiqué en figure 4. On admet que les effets de bord sont négligeables, ce qui revient à considérer que $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ se comportent comme des solénoïdes infinis. L'ensemble baigne dans l'air assimilé à du vide de perméabilité magnétique μ_0 .

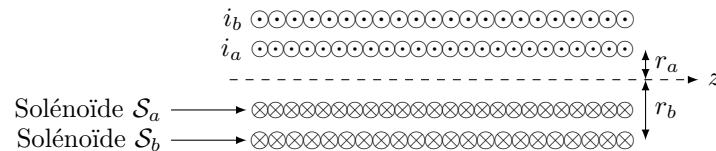


FIGURE 4 – Schéma en coupe des solénoïdes coaxiaux

On admet que le champ magnétique créé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant i s'écrit $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ avec n le nombre de spires par unité de longueur, et que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

R8. Rappeler la définition générale de l'inductance propre L d'un circuit et de l'inductance mutuelle M entre deux circuits.

Solution: Soit Φ_a le flux magnétique total traversant le circuit a . Il peut être décomposé en flux propre $\Phi_{a/a}$ et en flux externe engendré par le champ magnétique créé par le circuit b , $\Phi_{b/a}$: $\Phi_a = \Phi_{a/a} + \Phi_{b/a}$. Par définition, l'auto-inductance est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité du courant parcourant le circuit : $\Phi_{a/a} = L_a i_a$. L_a est toujours positif et s'exprime en Henry. L'inductance mutuelle est le coefficient de proportionnalité entre le flux externe et l'intensité du courant parcourant l'autre circuit : $\Phi_{b/a} = M i_b$. M est algébrique et son signe dépend de l'orientation relative des deux circuits. ($M = M_a = M_b$).

R9. Établir l'expression des inductances propres L_a et L_b des solénoïdes $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ en fonction de N_a , N_b , r_a , r_b , μ_0 et ℓ .

Solution: Flux du champ magnétique créé par le circuit a à travers lui-même :

$$\begin{aligned}\Phi_{a/a} &= \iint_{S_a} \vec{B}_a \cdot \vec{dS} \\ &= N_a \iint_{\text{spire}} \mu_0 \frac{N_a}{\ell} i_a \vec{u}_z \cdot d^2 S \vec{u}_z \\ &= \mu_0 N_a^2 \frac{\pi r_a^2}{\ell} i_a\end{aligned}$$

donc $L_a = \mu_0 N_a^2 \frac{\pi r_a^2}{\ell}$.

De même $L_b = \mu_0 N_b^2 \frac{\pi r_b^2}{\ell}$.

R10. En admettant qu'il n'y a aucune forme de perte magnétique, établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les solénoïdes $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$.

Solution: En négligeant les pertes magnétiques, on trouve alors M en calculant le flux de b à travers a (ou de a à travers b) :

$$\Phi_{b/a} = \iint_{S_a} \vec{B}_b \cdot \vec{dS} = N_a \iint_{\text{spire}} \mu_0 \frac{N_b}{\ell} i_b \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z$$

Comme $r_a < r_b$, on trouve $M = \mu_0 N_a N_b \frac{\pi r_a^2}{\ell}$

R11. Montrer que l'on a $M = k\sqrt{L_a L_b}$ en donnant l'expression de k en fonction de r_a et r_b .

Solution: Calculons $\sqrt{L_a L_b}$: $L_a L_b = \mu_0^2 N_a^2 N_b^2 \pi^2 \frac{r_a^2 r_b^2}{\ell^2} \iff \sqrt{L_a L_b} = \mu_0 N_a N_b \pi \frac{r_a r_b}{\ell} = M \frac{r_a}{r_b}$.

On obtient bien $M = k\sqrt{L_a L_b}$ en posant $k = \frac{r_a}{r_b}$. (et on retrouve bien $k = 1$ si $r_a = r_b \dots$)

On considère pour la suite le cas où $r_a = r_b$ pour lequel $k = 1$.

R12. Montrer que $\frac{L_a}{N_a^2} = \frac{L_b}{N_b^2}$.

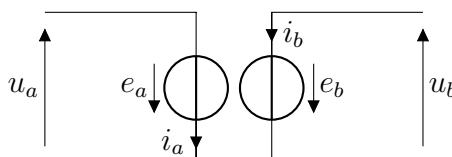
Solution: Si $r_a = r_b = r$ alors $\frac{L_a}{N_a^2} = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\ell} = \frac{L_b}{N_b^2}$

Les deux solénoïdes $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ forment le primaire et le secondaire d'un transformateur. On note $u_a(t)$ la tension aux bornes du primaire et $u_b(t)$ la tension aux bornes du secondaire. Les deux tensions sont orientées en convention récepteur.

R13. En écrivant les équations électriques pour le primaire et le secondaire, montrer que

$$\frac{u_a(t)}{N_a} = \frac{u_b(t)}{N_b}$$

Solution: Circuit électrique équivalent :



D'après la loi de Faraday au primaire : $e_a = -\frac{d\varphi_a}{dt} = -L_a \frac{di_a}{dt} - M \frac{di_b}{dt}$

Ainsi, $\boxed{u_a = -e_a = L_a \frac{di_a}{dt} + M \frac{di_b}{dt}}$

De même : $u_b = L_b \frac{di_b}{dt} + M \frac{di_a}{dt}$

Avec $M = \sqrt{L_a L_b}$ et $L_b = \frac{N_b^2}{N_a^2} L_a$, donc $M = \frac{N_b}{N_a} L_a$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{u_b}{u_a} &= \frac{L_b \frac{di_b}{dt} + M \frac{di_a}{dt}}{L_a \frac{di_a}{dt} + M \frac{di_b}{dt}} \\ &= \frac{\frac{N_b^2}{N_a^2} L_a \frac{di_b}{dt} + \frac{N_b}{N_a} L_a \frac{di_a}{dt}}{L_a \frac{di_a}{dt} + \frac{N_b}{N_a} L_a \frac{di_b}{dt}} \\ &= \frac{\frac{N_b^2}{N_a^2} \frac{di_b}{dt} + \frac{N_b}{N_a} \frac{di_a}{dt}}{\frac{di_a}{dt} + \frac{N_b}{N_a} \frac{di_b}{dt}} \\ &= \frac{\frac{N_b}{N_a} \frac{di_b}{dt} + \frac{di_a}{dt}}{\frac{di_a}{dt} + \frac{N_b}{N_a} \frac{di_b}{dt}} \\ &= \frac{N_b}{N_a} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\frac{u_a(t)}{N_a} = \frac{u_b(t)}{N_b}}$

On admet que les relations démontrées dans cette première sous-partie sont applicables à tous les transformateurs rencontrés par la suite.

Partie B.2 Étude de la partie terminale du circuit de mesure

On considère ici la partie terminale du circuit représentée en figure 5.

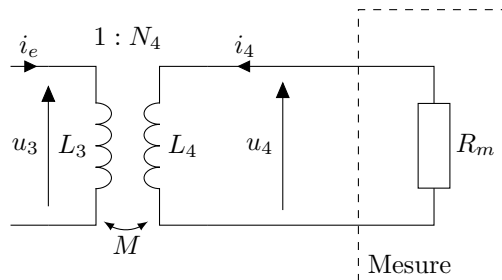


FIGURE 5 – Schéma électrique de la partie terminale du circuit

R14. Écrire, en notation complexe, l'expression de $\underline{u}_3$ en fonction de L_3 , M , ω_0 , $\underline{i}_e$ et $\underline{i}_4$.

Solution: De la même façon que précédemment, $u_3 = L_3 \frac{di_e}{dt} + M \frac{di_4}{dt}$

En complexe : $\underline{u_3} = (L_3 \underline{i_e} + M \underline{i_4}) j \omega_0$

R15. En déduire la relation $\underline{i_e} = \underline{Y} \cdot \underline{u_3}$ en donnant l'expression de $\underline{Y}$ en fonction de L_3 , N_4 , R_m , M et ω_0 . On utilisera un résultat de **Partie B.1**.

Solution: D'après la loi d'Ohm : $u_4 = -R_m i_4$

De plus, d'après **R13**, $\frac{u_3}{1} = \frac{u_4}{N_4}$, donc $u_4 = N_4 u_3 = -R_m i_4$, donc $i_4 = -\frac{N_4}{R_m} u_3$

Ainsi, $\underline{u_3} = L_3 j \omega_0 \underline{i_e} + M j \omega_0 \times -\frac{N_4}{R_m} \underline{u_3}$

Soit $\underline{i_e} = \frac{1 + M j \omega_0 \frac{N_4}{R_m}}{L_3 j \omega_0} \underline{u_3}$, soit $\underline{i_e} = \left(\frac{1}{L_3 j \omega_0} + \frac{M N_4}{L_3 R_m} \right) \underline{u_3}$

On identifie $\underline{Y} = \frac{1}{L_3 j \omega_0} + \frac{M N_4}{L_3 R_m}$

R16. En utilisant les résultats établis dans la partie **Partie B.1**, montrer qu'on peut réécrire

$$\underline{Y} = \frac{1}{j L_3 \omega_0} + \frac{N_4^2}{R_m}$$

Solution: Or $M = \sqrt{L_3 L_4}$, et $\frac{L_3}{1} = \frac{L_4}{N_4^2}$, soit $M = L_3 N_4$

Ainsi $\underline{Y} = \frac{1}{L_3 j \omega_0} + \frac{L_3 N_4^2}{L_3 R_m}$, soit $\underline{Y} = \frac{1}{j L_3 \omega_0} + \frac{N_4^2}{R_m}$

Partie B.3 Étude du circuit de mesure complet

D'après la relation $\underline{i_e} = \underline{Y} \cdot \underline{u_3}$ établie précédemment, le circuit de mesure complet est équivalent au schéma représenté figure 6 dans lequel $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$.

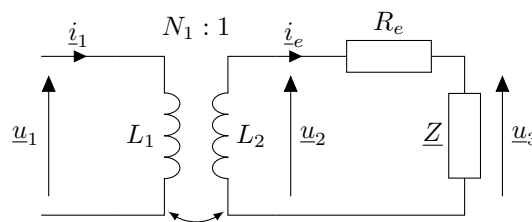


FIGURE 6 – Schéma électrique équivalent du circuit de mesure complet

R17. Déterminer la relation entre $\underline{u_2}$, $\underline{u_3}$, R_e et $\underline{Y}$.

Solution: D'après la relation du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{u_3} &= \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_e} \underline{u_2} \\ \underline{u_3} &= \frac{1}{1 + R_e \underline{Y}} \underline{u_2} \end{aligned}$$

R18. Montrer à l'aide des résultats précédents que

$$\underline{u}_1 = -\frac{N_1}{N_4} (1 + R_e \underline{Y}) R_m \underline{i}_4$$

Solution: D'après **Partie B.1** : $\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{1}$

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= N_1 \underline{u}_2 \\ &= N_1 \times (1 + R_e \underline{Y}) \underline{u}_3 \\ &= N_1 \times (1 + R_e \underline{Y}) \times \frac{\underline{u}_4}{N_4} \\ &= N_1 \times (1 + R_e \underline{Y}) \times \frac{-R_m \underline{i}_4}{N_4} \\ &= -\frac{N_1}{N_4} (1 + R_e \underline{Y}) R_m \underline{i}_4 \end{aligned}$$

R19. Dans la limite où R_m tend vers 0, montrer que l'intensité $i_4(t)$ tend vers

$$i_{4,\text{lim}}(t) = -\frac{1}{N_1 N_4 R_e} u_1(t)$$

Commenter.

Solution:

$$\begin{aligned} \underline{i}_4 &= -\frac{N_4}{N_1} \times \frac{1}{R_m (1 + R_e \underline{Y})} \underline{u}_1 \\ &= -\frac{N_4}{N_1} \times \frac{1}{R_m \left(1 + R_e \left(\frac{1}{j L_3 \omega_0} + \frac{N_4^2}{R_m} \right) \right)} \underline{u}_1 \\ &= -\frac{N_4}{N_1} \times \frac{1}{R_m \left(1 + \frac{R_e}{L_3 j \omega_0} \right) + N_4^2 R_e} \underline{u}_1 \\ &\underset{R_m \rightarrow 0}{\approx} -\frac{N_4}{N_1} \frac{1}{R_e N_4^2} \underline{u}_1 \end{aligned}$$

Soit, en réel : $\boxed{i_{4,\text{lim}}(t) = -\frac{1}{N_1 N_4 R_e} u_1(t)}$

La mesure de $i_{4,\text{lim}}$, connaissant les autres grandeurs fixées lors de la conception, permet alors d'avoir accès à $1/R_e$, directement reliée à la conductivité de l'eau de mer, et donc à la salinité.

Exercice n°3 Atmosphère terrestre et ballons-sondes (D'après Mines-Pont PC 2025)

L'atmosphère sera décrite comme un mélange idéal de gaz parfaits de masse molaire moyenne $\mathcal{M}_{\text{air}}$ et de rapport adiabatique γ_{air} , en équilibre dans le champ de pesanteur. L'étude sera limitée aux couches les plus basses (la troposphère) dans lesquels la température décroît linéairement de sa valeur $T_0 = 27^\circ\text{C}$ au sol à la valeur minimale $T_h = -64^\circ\text{C}$ à l'altitude maximale $h = 14$ km. Les ballons eux-mêmes seront emplis d'hélium (sauf à la dernière question de la sous-partie C, qui étudie un ballon historique employant un mélange contenant du dihydrogène). L'hélium sera également décrit comme un gaz parfait de masse molaire $\mathcal{M}_{\text{He}}$ et de rapport adiabatique γ_{He} .

Les sous-parties A (modèles pour l'atmosphère terrestre), B (stabilité verticale de celle-ci), C (forces exercées sur un ballon lors de sa montée) et D (modèle décrivant les ballons à enveloppe élastique) peuvent être abordées indépendamment.

Partie A Pesanteur et pression en altitude

Dans la suite on négligera les variations de g mais aussi la courbure de la Terre et le sol est le plan $z = 0$ où l'axe (Oz) est vertical ascendant.

La pression $P(z)$, la température $T(z) = T_0(1 - \Gamma z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ ne dépendent que de z . On suppose l'équilibre mécanique de la colonne d'air (figure 7) située au-dessus de l'altitude z .

Les paramètres T_0 et Γ sont constants.

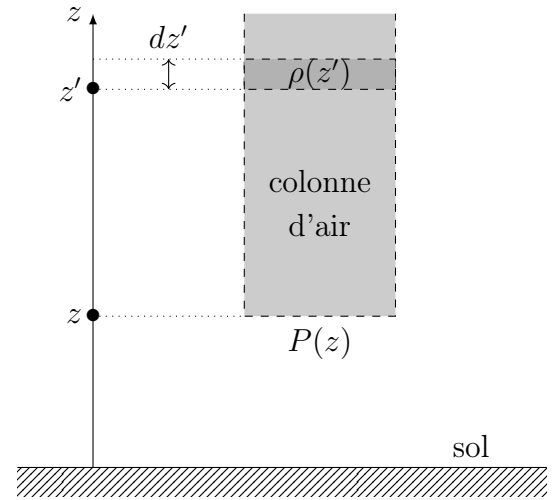


FIGURE 7 – Équilibre d'une colonne d'air

R1. Dédurre des indications précédentes une relation intégrale liant $P(z)$ et la fonction $\rho(z)$ puis l'équation différentielle :

$$\frac{dP}{P} = - \frac{1}{1 - \frac{z}{H_0}} \frac{dz}{H_1}$$

et exprimer les altitudes caractéristiques H_0 et H_1 en fonction de $\mathcal{M}_{\text{air}}$, g , $\mathcal{R}$, T_0 et de Γ respectivement, puis calculer numériquement H_0 et H_1 .

Solution: D'après la relation fondamentale de la statique des fluides, $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. Comme l'atmosphère est considérée comme un gaz parfait, $\rho = \frac{P\mathcal{M}_{\text{air}}}{RT}$, d'où $\frac{dP}{dz} = -\frac{P\mathcal{M}_{\text{air}}}{RT}g$.

On en déduit que $\frac{dP}{P} = -\frac{\mathcal{M}_{\text{air}}g}{RT_0(1 - \Gamma z)}dz$.

En posant $H_0 = \frac{RT_0}{\mathcal{M}_{\text{air}}g}$ et $H_1 = \frac{1}{\Gamma}$, on obtient bien $\frac{dP}{P} = -\frac{1}{1 - z/H_1} \frac{dz}{H_0}$

Or $T_h = T_0(1 - \Gamma h)$, d'où $\Gamma = \frac{1}{h} \left(1 - \frac{T_h}{T_0}\right)$ et $H_1 = \frac{h}{1 - \frac{T_h}{T_0}} = 46 \text{ km}$

Par ailleurs, $H_0 = 8,8 \text{ km}$

R2. Montrer que $P(z) = P_0 (1 - z/H_1)^k$ et déterminer k puis la valeur numérique $P(h)$ de la pression au sommet de la troposphère.

Solution: En intégrant, $\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = - \int_0^z \frac{1}{1 - z/H_1} \frac{dz}{H_0}$, soit $\ln \left(\frac{P}{P_0} \right) = \frac{H_1}{H_0} \ln (1 - z/H_1)$.

On en déduit que $P(z) = P_0 (1 - z/H_1)^k$ avec $k = \frac{H_1}{H_0} = 5,3$.

Au sommet de la troposphère, $P(h) = P_0 (1 - h/H_1)^k = 0,15 \text{ bar}$

Partie B Stabilité d'une atmosphère sans vent

On étudie ici en l'absence de vent, un modèle d'atmosphère stratifié : la pression $P(z)$, la température $T(z)$ et donc la masse volumique $\rho(z)$ du gaz ne dépendent que de l'altitude. Une certaine quantité d'air, de volume V_0 , prise à l'altitude z_0 sous la pression $P(z_0)$, subit, pour des raisons qu'on ne précisera pas ici, un déplacement rapide jusqu'à une altitude $z > z_0$ et y acquiert presque instantanément la pression d'équilibre $P(z)$ environnante (cf. figure 8).

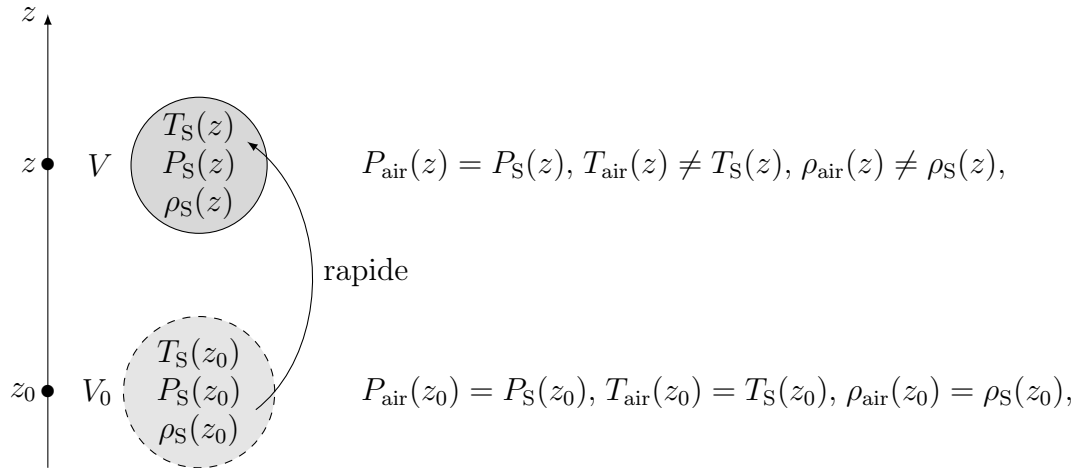


FIGURE 8 – Évolution rapide d'une certaine quantité d'air

Cette évolution sera supposée assez rapide pour être décrite comme adiabatique et cependant réversible; on notera respectivement $\frac{1}{h_{\text{air}}} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{air}}$ la décroissance relative de la masse volumique de l'air atmosphérique et $\frac{1}{h_S} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_S$ la grandeur analogue pour les variations adiabatiques et réversibles d'altitude de l'air du volume V .

R3. Écrire, en fonction de la masse volumique $\rho_{\text{air}}(z)$ de l'air atmosphérique et de celle $\rho_S(z)$ de l'air dans le volume V , la résultante des forces de pesanteur et de pression exercées sur le volume V d'air.

Solution: On étudie le système du ballon, dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Bilan des forces :

— poids : $+\rho_S(z)V\vec{g}$

— La résultante des forces de pression correspond à la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{air}}(z)V\vec{g}$

Résultante des forces de pesanteur et de pression exercées sur le volume d'air : $\vec{F} = (\rho_S(z) - \rho_{\text{air}}(z))V\vec{g}$

R4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z(t)$ du volume V d'air. Si l'air est, à l'arrivée, plus froid que l'air environnant, va-t-il redescendre ou continuer à monter? Que dire dans ce cas de la stabilité de l'atmosphère?

Solution: On applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen au volume V d'air : $\rho_S(z)V\vec{a} = \vec{F}$

Projeté sur un axe vertical (Oz) dirigé vers le haut : $\rho_S(z)V\ddot{z} = (\rho_{\text{air}}(z) - \rho_S(z))Vg$.

On obtient l'équation différentielle suivante : $\ddot{z} = \frac{\rho_{\text{air}}(z) - \rho_S(z)}{\rho_S(z)}g$

Si l'air est plus froid que l'air environnant, $\rho_S > \rho_{\text{air}}$, donc $\ddot{z} < 0$ et l'air va redescendre. L'atmosphère est donc stable.

R5. On considère que $z - z_0$ est assez faible pour qu'on puisse se contenter d'un développement au premier ordre en $z - z_0$. Montrer l'équation de Brunt-Väisälä :

$$\ddot{z} + N^2 z = \text{cte avec } N^2 = g \left[\frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_S} \right]$$

Solution: Avec un développement limité à l'ordre 1, on peut écrire $\rho_{\text{air}}(z) \simeq \rho_{\text{air}}(z_0) + (z - z_0) \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{air}}$
et $\rho_S(z) \simeq \rho_S(z_0) + (z - z_0) \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_S$.

Or $\rho_S(z_0) = \rho_{\text{air}}(z_0)$, on en déduit que $\ddot{z} = (z - z_0) g \left(\left. \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{air}} - \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right|_S \right)$.

On obtient bien $\ddot{z} + N^2 z = N^2 z_0$ avec $N^2 = g \left(\frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_S} \right)$

Ici et dans toute la suite on adoptera pour la description de l'air atmosphérique les expressions de la pression $P(z)$ et de la température $T(z)$ dans l'atmosphère :

$$T(z) = T_0 \cdot [1 - \Gamma z] \quad \text{et} \quad P(z) = P_0 \cdot [1 - \Gamma z]^k$$

avec $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$, $1/\Gamma = 48 \text{ km}$ et $k = 5$.

R6. Exprimer h_{air} en fonction de k , Γ et $T(z)/T_0$ *.

Solution: D'après la loi des gaz parfaits, $\rho_{\text{air}} = \frac{P \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT} = \frac{P_0 \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT_0} (1 - \Gamma z)^{k-1}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{\text{air}}} &= - \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{air}} \\ &= - \frac{RT_0}{P_0 \mathcal{M}_{\text{air}}} (1 - \Gamma z)^{1-k} \times (-\Gamma)(k-1) \frac{P_0 \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT_0} (1 - \Gamma z)^{k-2} \\ \frac{1}{h_{\text{air}}} &= \Gamma(k-1)(1 - \Gamma z)^{-1} \end{aligned}$$

Soit
$$h_{\text{air}} = \frac{1}{\Gamma(k-1)} \frac{T(z)}{T_0}$$

R7. Dans le cas d'une évolution adiabatique réversible, rappeler la relation qui lie $P(z)$, $\rho(z)$ et leurs valeurs initiales P_0 et ρ_0 en fonction du rapport adiabatique $\gamma = C_P/C_V$.

En déduire l'expression de h_S en fonction de γ , k , Γ et $T(z)/T_0$ †.

Solution:

Dans le cas d'une évolution adiabatique et réversible, d'après les lois de Laplace, $P(z)\rho(z)^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$

On en déduit que $\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{P(z)}{P_0} \right)^{1/\gamma}$, soit $\rho(z) = \rho_0 (1 - \Gamma z)^{k/\gamma}$.

*. Il s'agit de la calculer en partant de sa définition.

†. même principe que la question précédente.

Par définition :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_S} &= \frac{1}{h_S} = - \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right|_S \\ &= - \frac{1}{\rho_0(1-\Gamma z)^{k/\gamma}} \times (-\Gamma) \frac{k}{\gamma} \rho_0(1-\Gamma z)^{k/\gamma-1} \\ \frac{1}{h_S} &= \Gamma \frac{k}{\gamma} \frac{T_0}{T(z)}\end{aligned}$$

Soit :
$$h_S = \frac{\gamma}{\Gamma k} \frac{T(z)}{T_0}$$

R8. Conclure quant à la stabilité de l'atmosphère relativement aux mouvements verticaux de l'air.

Solution: D'après l'énoncé $k - 1 = 4$ et $k/\gamma = 3,6$, donc $h_{\text{air}} < h_S$, donc $(1/h_{\text{air}}) > (1/h_S)$ et $N^2 > 0$. L'atmosphère est donc bien stable.

Partie C Forces exercées sur un ballon

En haute atmosphère des vents de vitesse allant jusqu'à $v = 120$ km/h ne sont pas rares. La force $\vec{F}_v$ exercée dans ces conditions par le vent sur un ballon sphérique de rayon R ne dépend que de la masse volumique ρ_{air} de l'air, de v et de R .

R9. Proposer, par exemple par analyse dimensionnelle, une expression $F_v = \|\vec{F}_v\|$ de cette force due au vent.

Solution: On veut exprimer F_v en fonction de ρ_{air} de l'air, de v et de R . Les dimensions sont : $[F_v] = M.L.T^{-2}$; $[\rho_{\text{air}}] = M.L^{-3}$; $[v] = L.T^{-1}$; $[R] = L$.

On peut proposer :
$$F_v = \rho_{\text{air}} v^2 R^2$$

R10. On note Π le poids du ballon, qu'on supposera en équilibre thermique et mécanique avec l'air environnant.

Expliciter le rapport $x = F_v/\Pi$ en fonction de R , v , g et de la densité $d = \mathcal{M}_{\text{He}}/\mathcal{M}_{\text{air}}$ de l'hélium.

À quelle condition (portant sur R) la force exercée par le vent est-elle prépondérante ? On calculera un ordre de grandeur du rayon critique R_c avant de conclure.

Solution: Rapport :
$$x = \frac{\rho_{\text{air}} R^2 v^2}{\frac{4}{\rho_{\text{He}}} \pi R^3 g} = \frac{3 \mathcal{M}_{\text{air}} v^2}{4 \pi \mathcal{M}_{\text{He}} R g}, \text{ soit } x = \frac{3 v^2}{4 \pi d R g}$$

La force du vent est prépondérante si $x > 1$, soit
$$R < \frac{3 v^2}{4 \pi d g}$$

Le rayon critique minimal pour que la force du vent soit prépondérante, est $R_c = 196$ m. Il est par conséquent raisonnable de négliger la force du vent devant le poids du ballon.

Le 17 novembre 1892, par une journée sans vent notable, un ballon à enveloppe rigide de volume $V = 4 \text{ m}^3$ est complètement gonflé au gaz d'éclairage (qu'on assimilera à du dihydrogène) par Gustave Hermite et Georges Besançon. Il embarque un manomètre et un thermomètre à minima, capables d'enregistrer les valeurs les plus basses de la pression et de la température avant l'éclatement du ballon et la récupération au sol des instruments. Dans ce cas les instruments indiquent une pression minimale $P_{\text{min}} = 0,35$ bar et une température minimale $T_{\text{min}} = -18^\circ\text{C}$.

R11. Calculer la masse maximale de l'enveloppe et des instruments.

Solution: On note M_{ei} la masse de l'enveloppe et des instruments.

Lorsque le poids du ballon est compensé par la poussée d'Archimède de l'air, il plafonne et finit par exploser.

À l'équilibre : $(M_{ei} + \rho_{H_2} V) g = \rho_{\text{air}} V g$.

On en déduit que $M_{ei} = (\rho_{\text{air}} - \rho_{H_2}) V$, d'où $M_{ei} = (\mathcal{M}_{\text{air}} - \mathcal{M}_{H_2}) \frac{P_{\min} V}{RT_{\min}} = 1,8 \text{ kg}$

Partie D Ballons à enveloppe élastique (*Ne pas traiter*)

Dans toute la suite on ne tiendra plus compte des vents pour l'étude de l'équilibre du ballon. Le ballon est formé d'un matériau élastique qui doit rester tendu, ce qui explique que la pression intérieure P_i de l'hélium doit rester supérieure à la pression extérieure P_e de l'air atmosphérique. Considérant le cas (figure 9) d'un ballon sphérique de rayon (variable) R , on en isole par la pensée une partie basse et une partie haute, séparées par un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $r = R \sin \theta$, parallèle au plan (Oxy) avec $\theta < \pi/2$.

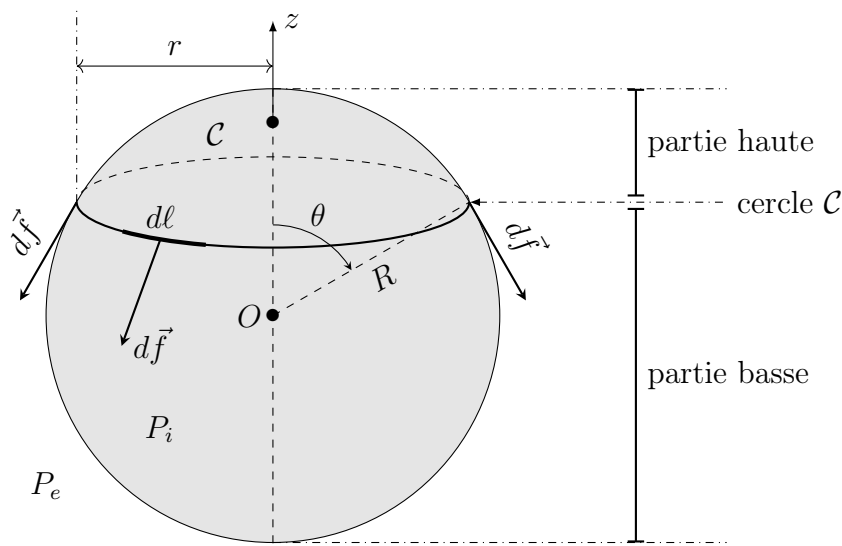


FIGURE 9 – Forces de tension au sein de la membrane du ballon

La force de tension (ou de traction) exercée par la partie basse du ballon sur l'autre partie est uniformément répartie le long de ce cercle ($\mathcal{C}$) avec une force par unité de longueur de norme $\left\| \frac{d\vec{f}}{d\ell} \right\| = \xi$ constante, tangente au ballon et perpendiculaire à ($\mathcal{C}$). Ici et dans toute la suite on négligera la masse de la membrane.

R12. Exprimer la résultante $\vec{f}$ des forces de traction exercées par la partie basse du ballon sur la partie haute en fonction de R , ξ et θ puis la résultante $\vec{F}_p$ des forces de pression exercées sur la partie haute du ballon en fonction de $P_i - P_e$ et r uniquement[‡].

[‡]. Calculs d'intégrales, simple pour l'une, double pour l'autre. Déterminer la direction de la résultante pour finir le calcul.

Solution: Résultante de la force de traction :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \int_0^{2\pi} d\vec{f} \\ &= \int_0^{2\pi} (\xi d\ell \vec{u}_\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} (\xi R d\varphi \vec{u}_\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} (\xi R \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\theta)\end{aligned}$$

Compte-tenu des symétries, seule la composante de $\vec{f}$ selon $\vec{u}_z$ n'est pas nulle.

$$\begin{aligned}\vec{f} \cdot \vec{u}_z &= \int_0^{2\pi} (\xi R \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z) \\ &= \int_0^{2\pi} (\xi R \sin(\theta) d\varphi (-\sin(\theta))) \\ &= -\xi R \sin^2(\theta) \times 2\pi\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\vec{f} = -2\pi\xi R \sin^2(\theta) \vec{u}_z}$

Résultante des forces de pression exercées sur la partie haute du ballon :

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= \iint_{\text{partie haute}} ((P_i - P_e) dS \vec{u}_r) \\ &= \iint_{\text{partie haute}} ((P_i - P_e) R^2 d\theta' \sin(\theta') d\varphi \vec{u}_r) \\ &= (P_i - P_e) R^2 \int_{\theta'=0}^{\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\sin(\theta') d\theta' d\varphi \vec{u}_r)\end{aligned}$$

Par symétrie, $\vec{F}_p$ a une composante non nulle uniquement selon $\vec{u}_z$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_p \cdot \vec{u}_z &= (P_i - P_e) R^2 \int_{\theta'=0}^{\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\sin(\theta') d\theta' (d\varphi \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z)) \\ \vec{F}_p \cdot \vec{u}_z &= (P_i - P_e) R^2 \int_{\theta'=0}^{\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\sin(\theta') d\theta' d\varphi \cos(\theta')) \\ &= (P_i - P_e) R^2 \int_{\theta'=0}^{\theta} \cos(\theta') \sin(\theta') d\theta' \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi (P_i - P_e) R^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2(\theta') \right]_0^{\theta} \\ &= \pi (P_i - P_e) R^2 \sin^2(\theta)\end{aligned}$$

Soit $\boxed{\vec{F}_p = \pi (P_i - P_e) R^2 \sin^2(\theta) \vec{u}_z}$

R13. Établir la loi de Jurin-Laplace, $P_i = P_e + \frac{2\xi}{R}$.

Dans la suite on admettra qu'elle est constamment vérifiée avec pour P_e la pression atmosphérique à l'altitude z du ballon.

Solution: À l'équilibre, les deux forces précédentes se compensent :

$$\begin{aligned} -2\pi\xi R \sin^2(\theta) \vec{u}_z + \pi(P_i - P_e)R^2 \sin^2(\theta) \vec{u}_z &= \vec{0} \\ 2\xi &= (P_i - P_e)R \\ P_i &= P_e + \frac{2\xi}{R} \end{aligned}$$

R14. Le ballon est assemblé au sol, où $P_e(z=0) = P_0 = 1$ bar avec un rayon d'équilibre $R_1 = 2$ m et une pression intérieure d'équilibre $P_i = P_1 = 2$ bar. Calculer ξ et $\beta = 2\xi/P_0 R_1$. On considérera que ces valeurs restent constantes dans toute la suite.

Solution: $\xi = \frac{R(P_i - P_e)}{2} = 1.10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\beta = 1$

Le ballon monte à l'altitude $z > 0$ et acquiert alors instantanément le rayon d'équilibre R ; on note $x = R_1/R$ et $\delta(z) = P_e(z)/P_0$. Au cours de cette montée on admet que l'évolution de l'hélium intérieur au ballon est adiabatique et réversible.

R15. Établir une relation de la forme $\psi(x) = \delta(z)$ en précisant l'expression de $\psi(x)$ en fonction de x , β et γ_{He} . Montrer que $R > R_1$.

Solution: La transformation étant adiabatique et réversible, on peut utiliser les lois de Laplace pour l'hélium dans le ballon : $P_1 \left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)^{\gamma_{\text{He}}} = P_i(z) \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{\gamma_{\text{He}}}$ soit $\left(P_0 + \frac{2\xi}{R_1}\right) x^{3\gamma_{\text{He}}} = P_e(z) + \frac{2\xi}{R}$.

On en déduit que $\delta(z) = \frac{P_e(z)}{P_0} = \left(1 + \frac{2\xi}{R_1 P_0}\right) x^{3\gamma_{\text{He}}} - \frac{2\xi}{R P_0}$, soit $\delta(z) = (1 + \beta)x^{3\gamma_{\text{He}}} - \beta x$ et $\psi(x) = (1 + \beta)x^{3\gamma_{\text{He}}} - \beta x$.

$\delta(z) < 1$ car la pression diminue lorsque l'altitude augmente, donc $\psi(x) < 1$.

Comme $\beta = 1$, on obtient $2x^{3\gamma_{\text{He}}} - x < 1$, soit $x^{3\gamma_{\text{He}}} < \frac{x+1}{2}$.

Étant donné que $3\gamma_{\text{He}} > 1$, nécessairement $x < 1$, donc $R_1 < R$

R16. Les courbes proposées figure 10 sont celles représentatives de $\psi(x)$ et de $\delta(z)$. En déduire les valeurs numériques de R aux altitudes 3 km, 9 km et 15 km.

Solution: A 3 km, $\delta = \psi = 0,68$ et $x = 0,96$, soit $R = 2,1$ m.

A 9 km, $\delta = \psi = 0,28$ et $x = 0,90$, soit $R = 2,2$ m.

A 15 km, $\delta = \psi = 0,10$ et $x = 0,865$, soit $R = 2,3$ m.

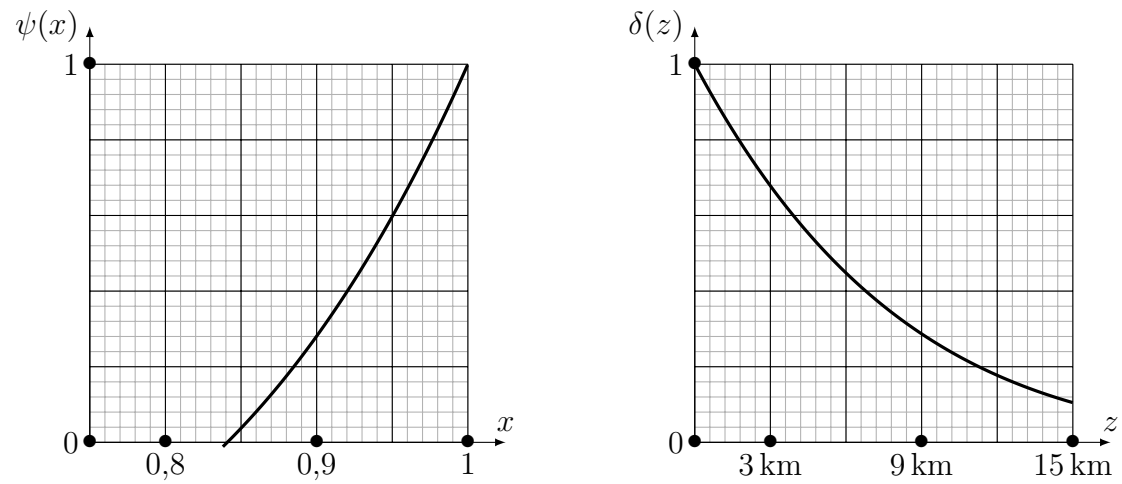


FIGURE 10 – Courbes représentatives de $\psi(x)$ et $\delta(z)$

Ainsi s'achève ce dernier DS de PCSI.

J'espère que ce dernier devoir, ainsi que tous les précédents, vous aura intéressé.e.

Merci pour l'année, et bonne continuation !

L'année n'est pas encore terminée, il reste deux semaines ;-) !