



? Lundi 15 juin 2026 – Durée : 4 heures
Devoir Surveillé n°11 (1) – Statique des fluides & Induction

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

Sur la forme :

- | | |
|--|--------------------------|
| Ma copie est rédigée sur des copies doubles. | ☐ |
| Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice. | ☐ |
| Ma copie est propre. | ☐ |
| Chaque réponse commence par une phrase / des mots. | ☐ |
| Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées. | ☐ |
| Un long trait horizontal est tiré entre chaque question. | ☐ |
| Les pages sont numérotées. | ☐ |

Sur le fond :

- | | |
|---|--------------------------|
| Les expressions littérales sont homogènes. | ☐ |
| Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée. | ☐ |

Ce sujet comporte 4 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de 8 pages.

Contenu du DS :

Exercice n°0	L'induction dans la vie de tous les jours (Durée MAX 10 min)	2
Exercice n°1	Récupération de l'énergie de vibration (Durée ~ 50 min)	2
Exercice n°2	Chauffage par induction dans les tokamaks (Durée ~ 50 min)	4
Exercice n°3	Recharge par induction (Durée ~ 30 min)	5
Exercice n°4	Jules Verne et la statique des fluides (Durée ~ 1h45)	6

Exercice n°0 L'induction dans la vie de tous les jours (Durée MAX 10 min)

Remarque –

- Qualitatif ne veut pas dire "sans rigueur" et "vocabulaire approximatif". Il faut être très précis sur la cause de l'induction, et ses effets.
Un champ permanent, en l'absence de mouvement, ne génère pas un phénomène d'induction.

Répondre en quelques phrases aux questions suivantes.

- Q1. Comment fonctionnent les détecteurs, placés sous la route, de voiture à certains feux rouges ? Pourquoi les vélos ne sont pas bien détectés ? Pourquoi sont-ils bien détectés si la ou le cycliste incline son vélo et le déplace au-dessus du détecteur ?
Q2. Comment fonctionnent les plaques à induction ?
Q3. Comment fonctionne un haut-parleur électrodynamique ?

Exercice n°1 Récupération de l'énergie de vibration (Durée ~ 50 min)

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).

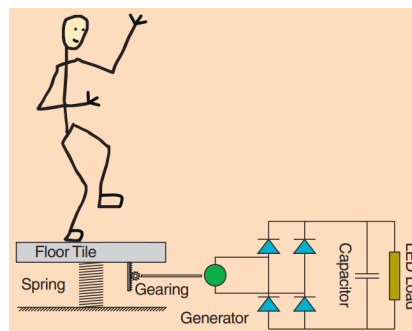
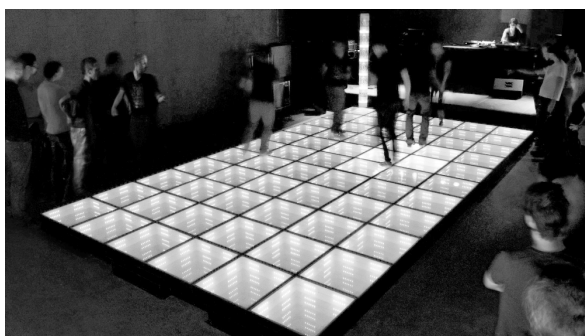


FIGURE 1 – Exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol. D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35W. Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article « Power from the people » de DOI 10.1109/MIAS.2010.939649.

Le mouvement de la dalle entraîne une génératrice électrique, qui est un dispositif qui permet de convertir une puissance mécanique en puissance électrique. Pour illustrer le principe de fonctionnement d'une génératrice, nous étudions une géométrie simplifiée qui correspond à la configuration des rails de Laplace.

On considère une tige qui peut glisser sans frottement sur deux rails parallèles (distants de L). La tige et les rails sont conducteurs, parcourus par un courant induit i et reliés à un dipôle résistif R (qui symbolise le dipôle vers lequel la puissance électrique est envoyée). Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ tel qu'indiqué sur le document 2.

On néglige la résistance de la tige et des rails, ainsi que tout phénomène d'autoinduction.

On note $\vec{v} = v \vec{e}_x$ la vitesse de la tige.

- Q1. **Décrire** qualitativement les phénomènes physiques mis en jeu dans ce dispositif.
Q2. **Établir** l'expression de la résultante des forces de Laplace agissant sur la tige, en fonction de L , B_0 , du courant induit i , et d'un vecteur unitaire bien choisi.

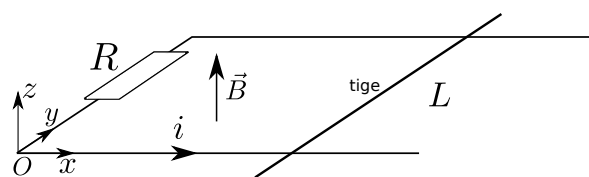


FIGURE 2 – Rails de Laplace.

- Q3. **Établir** l'expression de la force électromotrice induite (ou tension induite) e dans le circuit.
- Q4. **En déduire** une expression du courant induit i en fonction de L , B_0 , v et R .
- Q5. **En déduire** que la résultante des forces de Laplace peut s'écrire $-\alpha \vec{v}$ avec α une constante dont on donnera l'expression en fonction de L , B_0 et R .
Quelle est la loi qui garantit que $\alpha > 0$?
- Q6. **Établir** l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

Identifier l'expression de τ .

- Q7. **La résoudre** si à $t = 0$, $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_x$.

Commenter l'évolution de $v(t)$.

- Q8. **Montrer que** la puissance électrique reçue par le dipôle R est égale à l'opposée de la puissance des forces de Laplace. De quels signes sont ces deux puissances ?

Ce qui précède peut être généralisé : la puissance électrique produite par le dispositif est, en régime sinusoïdal forcé et en moyenne sur une période, donnée par $\mathcal{P}_{\text{elec}} = \langle \alpha v^2 \rangle$.

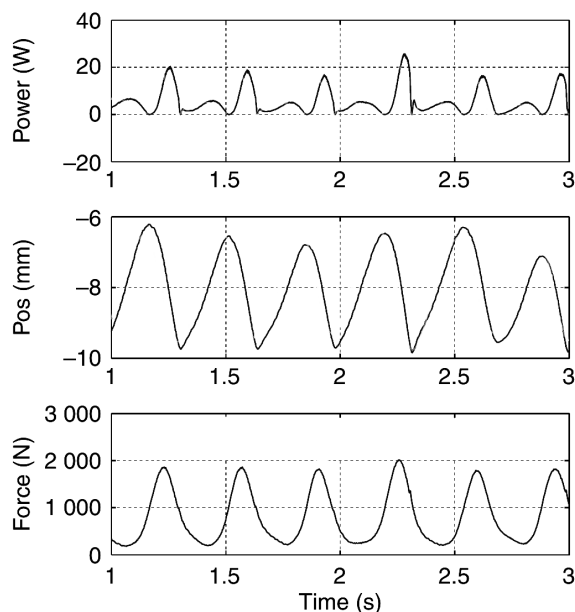


FIGURE 3 – Expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur).

De bas en haut :

- enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle,
- de la position $z(t)$ de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire)
- et de la puissance électrique produite en sortie du dispositif.

- Q9. **En déduire** une estimation de la puissance produite par le dispositif d'après notre modèle, si on se place dans les mêmes conditions que celles du document 3. Comparer aux valeurs mesurées par le constructeur dans le document 3.

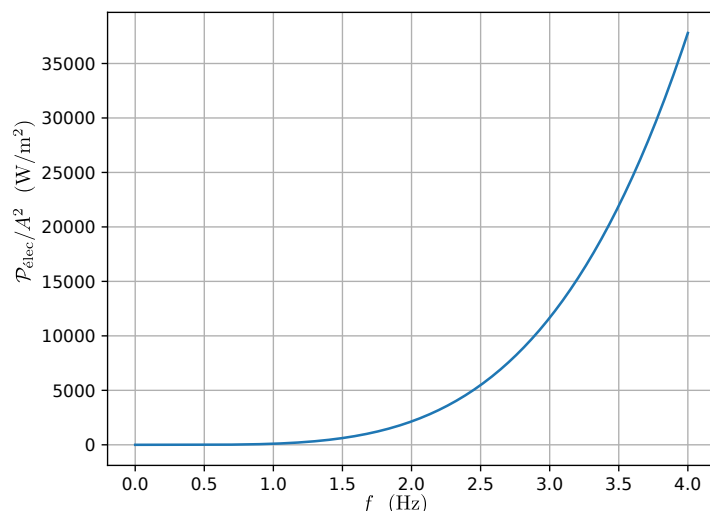


FIGURE 4 – Tracé de la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_{\text{elec}}$ produite par le dispositif, divisée par A^2 , où $A \approx 4,5$ cm est l'amplitude du mouvement de la dalle.

Exercice n°2 Chauffage par induction dans les tokamaks (Durée ~ 50 min)

Dans les tokamaks, une partie de l'échauffement est réalisé par induction. Un solénoïde situé au centre du tokamak produit un champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps. Le plasma, de géométrie torique, entoure ce solénoïde central : il est alors parcouru par un intense courant induit qui, par effet Joule, chauffe le plasma. On se propose de modéliser sommairement cette situation.

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Le solénoïde central d'axe (Oz) , de rayon a_1 , est parcouru par un courant $i_1(t)$ qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1(r, t)$, tel que $\vec{B}_1(r < a_1, t) = \beta i_1(t) \vec{e}_z$ (avec β constant) et $\vec{B}_1(r > a_1, t) = \vec{0}$. Le plasma est assimilé à une boucle de courant filiforme parcourue par $i_2(t)$, de même axe que le solénoïde central et de rayon $a_2 > a_1$ (figure 5).

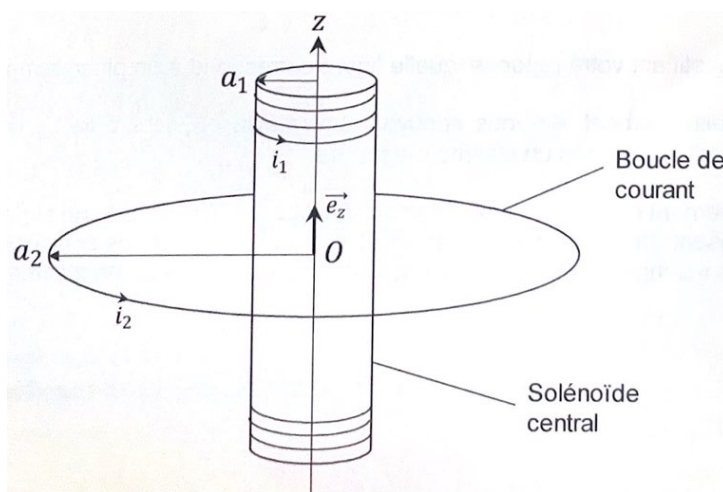


FIGURE 5 – Représentation schématique du système solénoïde central – plasma dans le tokamak

Q1. **Donner** la définition de l'inductance mutuelle M .

Q2. En calculant le flux du champ $\vec{B}_1$ à travers la boucle de courant, **exprimer** l'inductance mutuelle M entre le solénoïde central et la boucle de courant, en fonction de β et a_1 .

Q3. **Calculer** M pour le tokamak ITER, sachant que $a_1 = 2$ m et que le champ magnétique au centre du solénoïde est de 13 T pour un courant maximal de 46 kA.

On modélise l'interaction entre le solénoïde et le plasma par le circuit électrique représenté figure 6.

Le solénoïde central, d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 , est parcouru entre $t = 0$ et $t = t_1$ par le courant $i_1(t) = I_0 \times \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$ avec I_0 et t_1 des constantes.

La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance R_2 et pour inductance propre L_2 ; elle est parcourue par le courant $i_2(t)$.

À $t < 0$, le courant i_2 est nul.

M est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

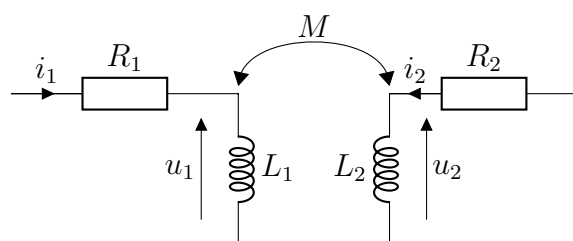


FIGURE 6 – Circuit équivalent au système solénoïde central – plasma

Q4. **Exprimer** la force électromotrice induite dans la boucle de courant représentant le plasma.

Q5. Après avoir représenté le circuit électrique équivalent, **établir** une équation différentielle reliant i_2 , i_1 et des constantes du problème.

Q6. **Montrer que** $i_2(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec τ_1 et τ_2 qui seront exprimés en fonction de L_2 , R_2 , M et de t_1 .

Q7. **En déduire** l'expression de $i_2(t)$.

Q8. En supposant $t \ll \tau_2$, **simplifier** cette expression par un développement limité au premier ordre en t/τ_2 , et **montrer que** $i_2(t) = \alpha t$, où on exprimera α en fonction de I_0 et t_1 .

On conserve cette expression pour la dernière question.

Q9. **Exprimer** l'énergie reçue par R_2 entre $t = 0$ et $t = t_1$ en fonction de R_2 , L_2 , M , I_0 et de t_1 . Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?

Exercice n°3 Recharge par induction (Durée ~ 30 min)

On s'intéresse à un système de transfert d'énergie électrique pour recharger la batterie d'une voiture (figure 7).

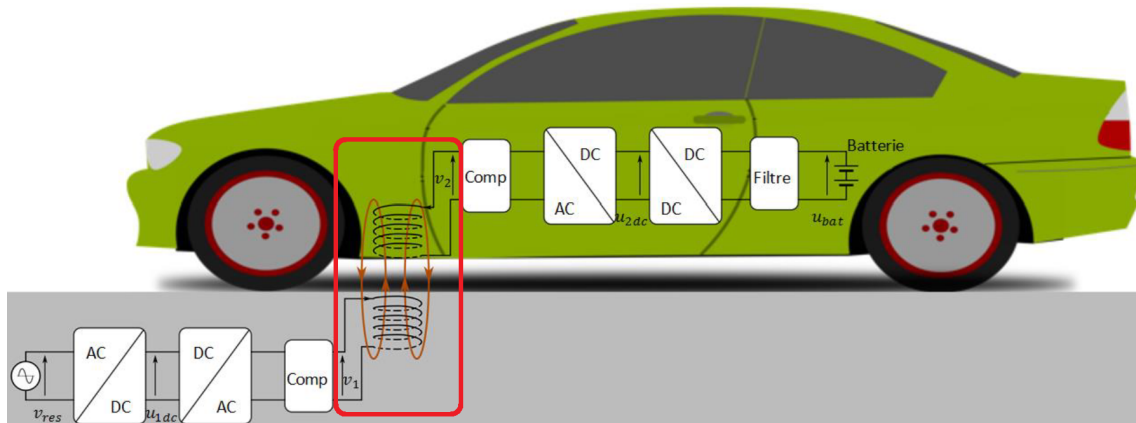
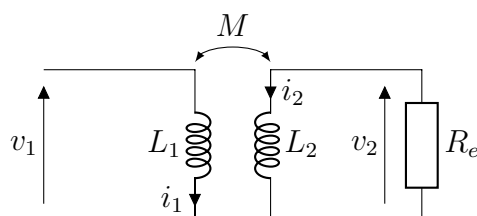


FIGURE 7 – Architecture d'un système de transfert d'énergie par induction

- L'énergie est prélevée sur le réseau alternatif ; La tension réseau est redressée afin de générer une tension continue ; Cette tension continue est convertie en une tension alternative à une fréquence d'environ 85 kHz ;
- Cette tension est appliquée à un circuit de compensation et à la bobine au sol qui émet un champ électromagnétique sinusoïdal à une fréquence d'environ 85 kHz ;
- La bobine secondaire capte ce champ électromagnétique et le convertit en tension ;
- Après passage dans un circuit de compensation, la tension est redressée ; Le niveau de cette tension DC est adapté pour permettre de recharger la batterie du véhicule à travers un filtre permettant d'éliminer les ondulations associées au fonctionnement des convertisseurs de la chaîne de conversion.

Q1. **Expliquer** l'apparition d'un courant dans la bobine secondaire.

On propose le schéma électrique équivalent suivant, avec M le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines, et R_e la résistance équivalente au montage en sortie de la bobine secondaire. La résistance des bobinages est négligée.



- Q2. **Établir** le système de deux équations différentielles couplées vérifiées par i_1 et i_2 , faisant intervenir L_1 , L_2 , M , R_e et v_1^* .
- Q3. En utilisant la représentation complexe, **établir** l'expression de l'intensité complexe $\underline{i}_2$ et montrer qu'elle s'exprime selon

$$\underline{i}_2 = -\frac{\frac{M}{L_1}}{R_e + L_2 j\omega(1 - k^2)} v_1$$

où on exprimera k , appelé coefficient de couplage, en fonction de M , L_1 et L_2

- Q4. **En déduire** l'expression de $\underline{v}_2$, puis de l'amplitude V_{2m} en fonction des données du problème.

Les bobines émettrices et réceptrices sont distantes l'une de l'autre et l'énergie électromagnétique doit traverser l'espace entre les deux bobines. Cependant, les fuites sont très importantes et le coefficient de couplage est faible (inférieur à 30% pour des distances usuelles entre bobines dans les applications de recharge de véhicule) alors qu'il est supérieur à 99% dans un transformateur.

- Q5. Quelle est la différence avec le transformateur qui explique cette différence de couplage ?

Exercice n°4 Jules Verne et la statique des fluides (Durée ~ 1h45)

Dans les trois parties, nous nous intéressons à la pression dans un fluide. Dans un premier temps on s'intéresse à la loi de la statique des fluides, puis on s'intéressera successivement à la pression dans l'atmosphère et à celle dans l'océan.

On considère un fluide de masse volumique notée ρ , dont on cherche à étudier le champ de pression P . Le fluide est supposé au repos dans le référentiel terrestre d'étude considéré galiléen à l'échelle de l'étude.

Partie A Loi de la statique des fluides

- Q1. **Donner** l'expression de la résultante des forces de pression qui s'exerce sur une particule fluide (c'est-à-dire son équivalent volumique).
- Q2. En considérant un axe vertical ascendant (Oz), **écrire** l'équation de la statique des fluides projetée selon (Oz). On s'assurera physiquement du signe.

Partie B Cinq Semaines en ballon

Dans Cinq Semaines en ballon de Jules Verne, un savant et explorateur, le Docteur Samuel Fergusson, accompagné de son serviteur Joe et son ami chasseur professionnel Richard Kennedy, dit Dick, décident de survoler l'Afrique orientale, de Zanzibar aux sources du Nil – région alors non complètement explorée – à bord d'un ballon gonflé à l'hydrogène, le Victoria. Il a inventé un mécanisme qui, en éliminant la nécessité de libérer du gaz ou de jeter du lest pour contrôler son altitude, permet d'effectuer de très longs trajets en toute autonomie.

Partie B.1 Champ de pression dans l'atmosphère

On souhaite déterminer l'évolution de la pression dans l'atmosphère dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme : on assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire M_{air} , la température T_0 uniforme et le champ de pesanteur g uniforme.

L'axe (Oz) est choisi vertical ascendant, avec l'origine au niveau du sol.

- Q3. **Établir** la relation entre la masse volumique de l'air, la pression et des constantes.
- Q4. À l'aide de Q2 et Q3, **établir** l'équation différentielle vérifiée par la pression, sous la forme

$$\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0$$

Exprimer H en fonction de R , T_0 , M_{air} et g .

Déterminer sa valeur numérique (au moins en ordre de grandeur).

- Q5. **En déduire** l'évolution de la pression dans l'atmosphère (c'est-à-dire l'expression de $P(z)$), en notant P_0 la pression au niveau du sol.

*. flux, fem induites, circuits équivalents,...

Partie B.2 Décollage du ballon

Le ballon qui emmène les héros du roman au-dessus des contrées inexplorées de l'Afrique combine les techniques du ballon à gaz et de la montgolfière. Dans le premier cas, l'enceinte du ballon est fermée et gonflée d'un gaz plus léger que l'air (ici, l'hydrogène) ; la montée ou la descente se commandent respectivement par le lâcher de lest embarqué au départ de l'engin ou par l'ouverture d'une valve laissant échapper un peu de gaz : la perte progressive de gaz, qui impose de recharger de moins en moins de lest, limite la durée des voyages. Dans le second cas, le ballon est ouvert vers le bas et rempli d'air que l'on chauffe ou laisse refroidir selon qu'on veut monter ou descendre : là, le problème est de disposer d'une puissance de chauffe souple et puissante.

Le ballon du Dr Fergusson est un ballon à hydrogène que l'on va pouvoir manœuvrer en chauffant plus ou moins le gaz contenu dans l'enveloppe : à la différence du système avec valve, on ne doit – en théorie – perdre aucun gaz, ce qui va permettre les plus longs parcours aériens. Le chauffage du gaz est assuré par un système de tuyaux pénétrant dans le ballon et parcourus par un gaz qui passe dans un échangeur thermique chauffé par un chalumeau hydrogène/oxygène dont le débit est réglable. Ces deux gaz sont produits par l'électrolyse de l'eau grâce à l'électricité produite par une pile Bunsen. Cela, c'est la théorie, et il y a au moins un cas où le système est réputé avoir fonctionné, sans que l'ensemble explose : le voyage de cinq semaines en ballon décrit par Jules Verne...

D'après Wikipedia

Nous nous intéressons au vol d'un ballon à dihydrogène, de volume V supposé constant, fermé sans contact avec l'atmosphère. L'enveloppe du ballon, la nacelle dans laquelle se trouvent les explorateurs et les explorateurs eux-même est de masse m .

On note $T_0 = 27\text{ °C}$ la température constante de l'atmosphère, et $P_0 = 1\text{ bar}$ la pression au niveau du sol.

Q6. Effectuer un bilan des forces précis s'exerçant sur le ballon, et les représenter sur un schéma.

Q7. Établir la condition sur le volume V de dihydrogène permettant au ballon de décoller. On l'exprimera en fonction de $\rho_{\text{air},0}$ la masse volumique de l'air au niveau du sol, et ρ_{H_2} celle du dihydrogène, et de la masse $m = 300\text{ kg}$.

Q8. En déduire que le volume minimal que doit avoir le ballon est

$$V_{\min} = \frac{mRT_0}{P_0(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2})}$$

Faire l'application numérique.

On gonfle le ballon avec un volume $V = 300\text{ m}^3$ et le ballon s'élève dans l'atmosphère.

Q9. Exprimer la masse de dihydrogène contenu dans le ballon.

Q10. En exploitant, notamment **Q3** et **Q4**, **déterminer** l'altitude maximale que peut atteindre le ballon (c'est-à-dire au-delà de laquelle il ne peut plus s'élever).

Partie C 20 000 lieues sous les mers

On s'intéresse à la pression (**Partie C.1**) dans l'océan, puis au sous-marin (**Partie C.3** et **Partie C.2**) de 20 000 lieues sous les mers.

Partie C.1 Pression dans l'océan

On souhaite déterminer la pression au fond de la fosse des Mariannes, située à $h = 10$ km en-dessous de la surface de l'eau.

On choisit l'axe (Oz) ascendant, avec l'origine O située au fond de la fosse des Mariannes.

L'eau de l'océan est un fluide incompressible et homogène.

Q11. Que signifient ces hypothèses sur la masse volumique de l'océan ?

Q12. **Déterminer** l'expression de la pression dans l'océan en fonction de P_0 (la pression à la surface de l'océan), ρ , g , h et z .

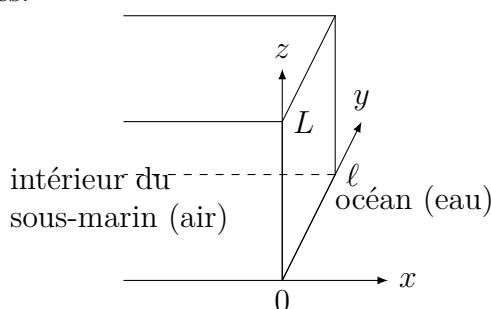
Partie C.2 Force de pression

Le Nautilus est au posé au fond de l'océan, à une profondeur H , et on admet que la pression s'exprime

$$P(z) = P_0 + \rho_{em}g(H - z)$$

où ρ_{em} est la masse volumique de l'eau de mer.

La sous-marin présente des vitres, que nous assimilons (par soucis de simplification) à des rectangles de largeur ℓ et de hauteur L , planes, et verticales.



Le sous-marin est pressurisé à la pression atmosphérique de $P_0 = 1$ bar.

Q13. **Donner** l'expression de l'élément de surface sur la vitre.

Q14. **Exprimer** la force élémentaire de pression exercée par l'eau et l'air sur la vitre.

Q15. **Exprimer** la résultante des forces de pression s'exerçant sur la vitre.

Partie C.3 L'équilibre du Nautilus

Le capitaine Nemo explique que « Lorsque j'ai fait les plans de ce navire destiné à une navigation sous-marine, j'ai voulu, qu'en équilibre dans l'eau il plongeât des neuf dixièmes, et qu'il émergeât d'un dixième seulement. Par conséquent, il ne devait déplacer dans ces conditions que les neuf dixièmes de son volume, soit treize cent cinquante-six mètres cubes et quarante-huit centièmes [...] »

Q16. Quelles sont les forces qui s'exercent sur le sous-marin dans cette situation ?

Traduire le fait qu'il est à l'équilibre.

Q17. **En déduire** la masse du Nautilus pour qu'il en soit ainsi.

Ainsi s'achève ce dernier DS de PCSI.

J'espère que ce dernier devoir, ainsi que tous les précédents, vous aura intéressé.e.

Merci pour l'année, et bonne continuation !

L'année n'est pas encore terminée, il reste deux semaines ;-)