



Tu peux le faire
Ne doute pas de tes capacités
N'abandonne pas et reste concentré.e
Crois en toi
Tu as les ressources en toi pour réussir
Fais de ton mieux.
Ne lâche rien

? **Lundi 15 juin 2026 – Durée : 4 heures**
Devoir Surveillé n°11 (2) – Statique des fluides & Induction

La calculatrice est INTERDITE

Check-list à cocher !

Sur la forme :

- | | |
|--|--------------------------|
| Ma copie est rédigée sur des copies doubles. | ☐ |
| Prendre une nouvelle copie double pour chaque exercice. | ☐ |
| Ma copie est propre. | ☐ |
| Chaque réponse commence par une phrase / des mots. | ☐ |
| Les résultats littéraux sont encadrés, les applications numériques soulignées. | ☐ |
| Un long trait horizontal est tiré entre chaque question. | ☐ |
| Les pages sont numérotées. | ☐ |

Sur le fond :

- | | |
|---|--------------------------|
| Les expressions littérales sont homogènes. | ☐ |
| Les applications numériques sont suivies d'une unité adaptée. | ☐ |

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'énoncé est constitué de **11** pages.

Contenu du DS :

Exercice n°0	L'induction dans la vie de tous les jours (Durée MAX 10 min)	2
Exercice n°1	Le freinage du Blue-Fire (Durée ~ 50 min)	2
Exercice n°2	Flotteurs profileurs autonomes Argo (Durée ~ 2 heures)	4
Exercice n°3	Atmosphère terrestre et ballons-sondes (Durée ~ 1 heure)	8
A	Données	12

Exercice n°0 L'induction dans la vie de tous les jours (Durée MAX 10 min)

⚠ Remarque –

- Qualitatif ne veut pas dire "sans rigueur" et "vocabulaire approximatif". Il faut être très précis sur la cause de l'induction, et ses effets.
- Un champ permanent, en l'absence de mouvement, ne génère pas un phénomène d'induction.

Répondre en quelques phrases aux questions suivantes.

- Q1. Comment fonctionnent les détecteurs, placés sous la route, de voiture à certains feux rouges ? Pourquoi les vélos ne sont pas bien détectés ? Pourquoi sont-ils bien détectés si la ou le cycliste incline son vélo et le déplace au-dessus du détecteur ?
- Q2. Comment fonctionnent les plaques à induction ?
- Q3. Comment fonctionne un haut-parleur électrodynamique ?

Exercice n°1 Le freinage du Blue-Fire (Durée ~ 50 min)

Le Blue Fire est l'une des montagnes russes du parc d'attraction Europa-Park, situé à Rust, en Allemagne. Elle est en service depuis le 4 avril 2009. Le nom de l'attraction a été choisi en référence à la couleur de la flamme émise par la combustion du gaz naturel, vecteur énergétique important.



FIGURE 1 – Vue d'ensemble du Blue Fire

Cette montagne russe fait partie de la famille des montagnes russes lancées (launched coaster) : en effet, l'accélération principale du train a lieu dans la zone de départ, à l'aide d'une longue zone accélératrice rectiligne.

À la fin du trajet, le train doit être freiné. Pour éviter un freinage uniquement mécanique qui nécessiterait de fréquents remplacements des pièces en frottement, la solution adoptée par les concepteurs du Blue Fire est un freinage par induction.

Pour décrire ce freinage, on utilise la modélisation simplifiée suivante. Le mouvement du train sera étudié dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

On note m la masse totale du train.

Chaque **aimant du train** est supposé créer sur les spires du stator un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$ uniforme, dans une zone délimitée carrée de côté ℓ .

Des **spires carrées** en cuivre, de côté identique ℓ et de résistance électrique R , régulièrement espacées entre elles de cette même distance ℓ , sont placées perpendiculairement à $\vec{B}$ (figure 2). On suppose que le train comporte N aimants. Pour cette étude, on supposera pour simplifier que tous les aimants du train sont en interaction avec une spire dès le début du freinage, ce qui revient à négliger les phases d'entrée et de sortie

progressive du train de la zone de freinage.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'interaction entre un seul aimant du train et une seule spire, dont on négligera l'inductance propre.

On note x la distance entre la gauche de cette spire et l'extrémité avant de l'aimant, et on note $v = \dot{x}$ (c.f. figure 2)

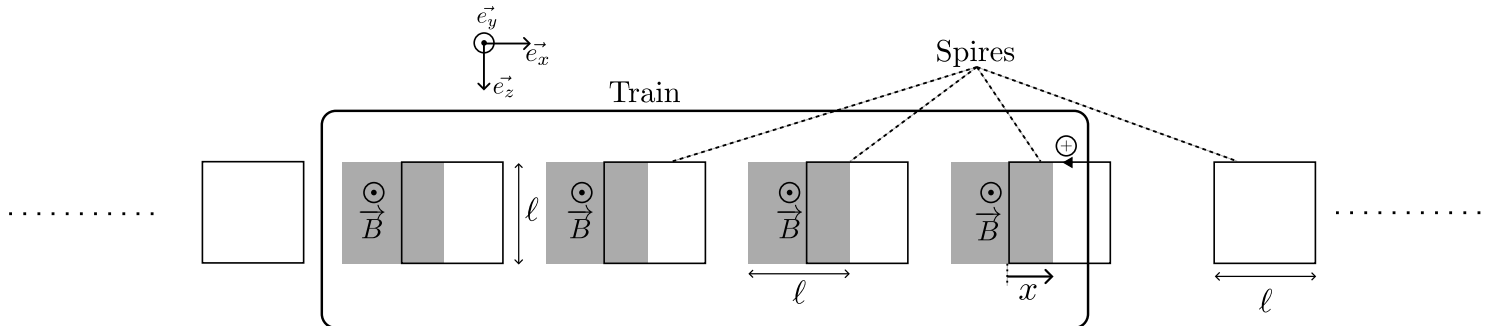


FIGURE 2 – Paramétrage du dispositif de freinage inductif. Les spires sont fixes, alors que les aimants liés au train créent des zones de champ $\vec{B}$ mobiles, représentées par des rectangles foncés. Seuls 4 aimants sont représentés ici.

- Q1. Décrire qualitativement mais précisément les phénomènes physiques qui se produisent permettant de freiner le train.
- Q2. Après avoir précisé son orientation sur un schéma représentant uniquement le premier aimant du train et la spire avec lequel il interagit, déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire e en fonction de B , v et ℓ .
- En déduire l'équation électrique liant B , v , ℓ , R et l'intensité i dans la spire, dont on aura précisé l'orientation sur un schéma.
- Q3. Montrer que tant que $0 < x < \ell$, la spire est soumise à une force qui se met sous la forme $\overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}} = \alpha v \vec{e}_x$ où l'on précisera l'expression de α en fonction de ℓ , B et R (vérifier que $\alpha > 0$).
- Q4. Montrer que pour $\ell < x < 2\ell$, $\overrightarrow{F_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}}$ possède la même expression.

On considère maintenant l'interaction des N aimants du train avec les spires fixes.

- Q5. Quelle est alors la force totale $\overrightarrow{F_{\text{spires} \rightarrow \text{train}}}$ s'exerçant sur la totalité du train ?
- Q6. En déduire l'équation différentielle vérifiée par v tout au long de la phase de freinage que l'on écrira sous la forme

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

exprimera la constante de temps τ (grandeur positive) en fonction des paramètres.

- Q7. Que devient l'énergie cinétique perdue par le train lors de ce freinage ? On justifiera la réponse à l'aide de l'établissement d'un bilan de puissance et l'identification des différents termes.
- Q8. Justifier la nécessité d'un freinage mécanique d'appoint afin d'immobiliser complètement le train à la fin de son trajet.

Exercice n°2 Flotteurs profileurs autonomes Argo (Durée ~ 2 heures)

L'édition 2024-2025 du Vendée Globe, course au large autour du monde en solitaire sans escale, a été l'occasion de mettre en lumière les flotteurs Argo. Durant leur périple, 9 des 40 marins alignés au départ ont en effet largué un de ces flotteurs dont la mission consiste à réaliser des mesures dans l'océan sur une profondeur de l'ordre de 4000 m tout en se laissant dériver. Les résultats ainsi acquis in situ depuis un quart de siècle (et tous consultables librement en ligne) ont très significativement contribué à améliorer la connaissance des océans du globe et à suivre leur évolution dans le contexte des bouleversements climatiques en cours. L'Ifremer assure la mise en œuvre de ce réseau de flotteurs pour la partie française du programme.

Le problème comporte 2 parties indépendantes permettant d'aborder plusieurs aspects de ces flotteurs autonomes. Les données sont regroupées en fin d'énoncé.



FIGURE 3 – Flotteur Argo juste avant son déploiement en mer par l'Ifremer. (K. Balem/RREX/Ifremer)

Partie A Flottabilité des flotteurs Argo

Partie A.1 Modèle de l'océan isotherme compressible

On assimile dans un premier temps l'eau de l'océan à un liquide de température homogène et de masse volumique ρ_0 uniforme baignant dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ (L'axe (Oz) est donc vertical ascendant). On note $P(M)$ la pression en un point M de coordonnées (x, y, z) situé sous la surface libre de l'océan, elle-même en $z = 0$. La pression atmosphérique est supposée uniforme et notée P_{atm} .

Q1. Démontrer qu'ici $\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g$.

Q2. En déduire la valeur numérique de la pression P_{4000} à une profondeur de $H = 4000$ m.

L'eau de mer est en réalité un liquide compressible dont la masse volumique varie avec la pression suivant une relation de la forme

$$\rho_e = \rho_0 (1 + \chi_e (P - P_{\text{atm}}))$$

où $\chi_e = 4,5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ est la compressibilité isotherme de l'eau de mer. On considère en revanche toujours que la température de l'océan est uniforme.

Q3. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par P et en déduire la nouvelle valeur P'_{4000} de la pression à une profondeur de $H = 4000$ m. Commenter.

Q4. Dans ce modèle, vérifier que la masse volumique de l'eau de mer à la profondeur H est $\rho_{e,4000} \simeq 1045 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On conservera ce deuxième modèle de l'eau compressible dans la suite de cette partie.

Partie A.2 Contrôle de la dérive en profondeur

Les flotteurs actuels se présentent sous la forme d'un cylindre de volume V_0 , que l'on considérera indéformable mais sous lequel est positionnée une poche, appelée vessie. Un vérin permet de faire varier le volume V_p de cette poche en y déplaçant de l'huile incompressible depuis ou vers le cylindre. Ainsi, la masse totale $m_f = 26,0 \text{ kg}$ du flotteur reste constante, quelle que soit la configuration, mais son volume $V_0 + V_p$ est variable.

Q5. Quel doit-être la valeur de V_0 pour que le flotteur soit à l'équilibre dans l'eau de mer à une profondeur $H = 4000$ m avec une vessie vide ($V_p = 0 \text{ L}$) ?

Q6. Calculer le volume $V_{p,\text{max}}$ de la vessie nécessaire pour faire émerger 2,0% du volume V_0 du flotteur lorsque celui-ci se trouve en surface.

Q7. Estimer l'énergie consommée par le vérin du flotteur pour remonter à la surface depuis une profondeur $H = 4000$ m.

Partie B Conductimètre embarqué

Si différents modèles de flotteurs Argo coexistent aujourd'hui au sein d'une flotte composée de plusieurs milliers d'appareils autonomes, tous embarquent au moins un conductimètre permettant de mesurer, indirectement, la salinité de l'eau.

Les flotteurs Argo sont ainsi équipés de conductimètres inductifs, dont le principe est schématisé en figure 4. Ce capteur est composé de deux bobines toroïdales placées côte à côte. La première bobine, appelée bobine d'excitation, est alimentée par une tension sinusoïdale $u_1(t)$. Sa résistance interne est négligeable et son inductance propre est L_1 . Elle se comporte comme le primaire d'un transformateur dont le circuit secondaire est l'eau qui baigne l'ensemble et que l'on peut assimiler à une boucle conductrice de résistance R_e , proportionnelle à l'inverse de la conductivité σ de l'eau. Cette boucle se comporte à son tour comme le circuit primaire d'un transformateur dont le secondaire est la seconde bobine, appelée bobine de mesure, de résistance interne négligeable et d'inductance propre L_4 . D'un point de vue électrique, l'ensemble est donc modélisable par le circuit représenté en figure 5, où figurent également le circuit d'alimentation et celui, modélisé par une résistance R_m , permettant la mesure de la tension $u_4(t)$ en sortie.

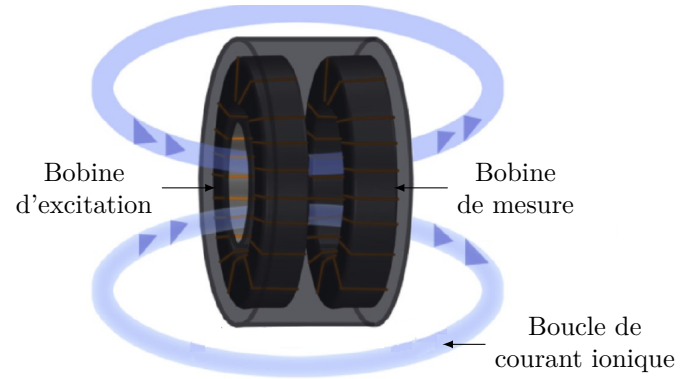


FIGURE 4 – Schéma d'un conductimètre inductif

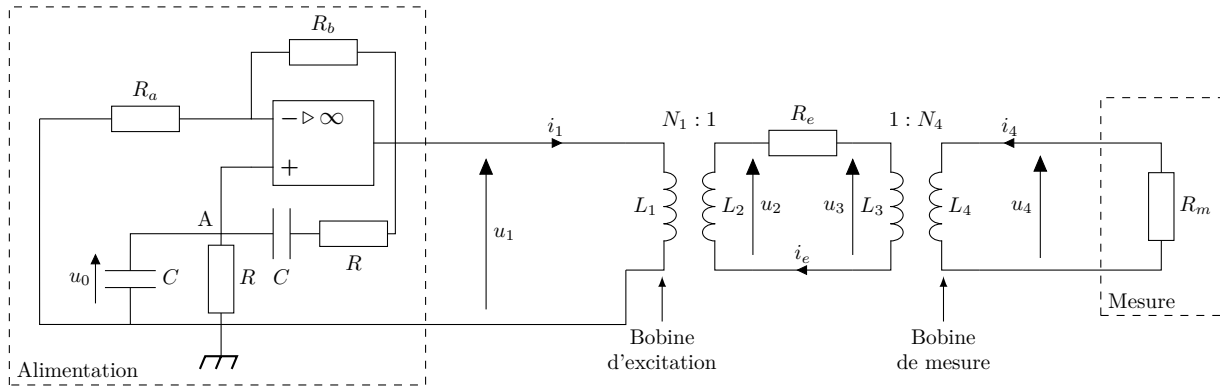
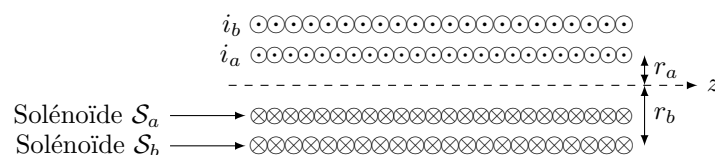


FIGURE 5 – Schéma électrique équivalent du conductimètre

On admet que le circuit d'alimentation permet de générer une tension u_1 sinusoïdale à la pulsation ω_0 . Toutes les intensités et tensions du circuit sont sinusoïdales à cette pulsation ω_0 .

Partie B.1 Préliminaire : inductance propre et inductance mutuelle entre deux circuits

On cherche dans cette sous-partie à établir quelques résultats utiles par la suite en considérant deux solénoïdes cylindriques coaxiaux $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$, de même longueur ℓ , de rayons respectifs r_a et r_b , comportant respectivement N_a et N_b spires. $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ sont parcourus par des courants notés respectivement i_a et i_b et orientés comme indiqué en figure 6. On admet que les effets de bord sont négligeables, ce qui revient à considérer que $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ se comportent comme des solénoïdes infinis. L'ensemble baigne dans l'air assimilé à du vide de perméabilité magnétique μ_0 .



Q9. Établir l'expression des inductances propres L_a et L_b des solénoïdes $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ en fonction de N_a , N_b , r_a , r_b , μ_0 et ℓ .

Q10. En admettant qu'il n'y a aucune forme de perte magnétique, établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les solénoïdes $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$.

Q11. Montrer que l'on a $M = k\sqrt{L_a L_b}$ en donnant l'expression de k en fonction de r_a et r_b .

On considère pour la suite le cas où $r_a = r_b$ pour lequel $k = 1$.

Q12. Montrer que $\frac{L_a}{N_a^2} = \frac{L_b}{N_b^2}$.

Les deux solénoïdes $\mathcal{S}_a$ et $\mathcal{S}_b$ forment le primaire et le secondaire d'un transformateur. On note $u_a(t)$ la tension aux bornes du primaire et $u_b(t)$ la tension aux bornes du secondaire. Les deux tensions sont orientées en convention récepteur.

Q13. En écrivant les équations électriques pour le primaire et le secondaire, montrer que

$$\frac{u_a(t)}{N_a} = \frac{u_b(t)}{N_b}$$

On admet que les relations démontrées dans cette première sous-partie sont applicables à tous les transformateurs rencontrés par la suite.

Partie B.2 Étude de la partie terminale du circuit de mesure

On considère ici la partie terminale du circuit représentée en figure 7.

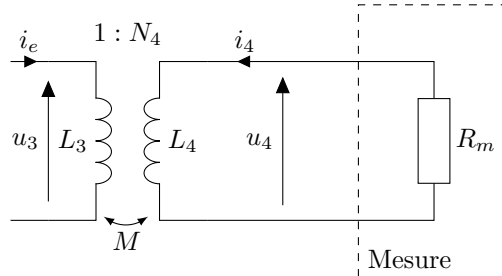


FIGURE 7 – Schéma électrique de la partie terminale du circuit

Q14. Écrire, en notation complexe, l'expression de $\underline{u}_3$ en fonction de L_3 , M , ω_0 , $\underline{i}_e$ et $\underline{i}_4$.

Q15. En déduire la relation $\underline{i}_e = \underline{Y} \cdot \underline{u}_3$ en donnant l'expression de $\underline{Y}$ en fonction de L_3 , N_4 , R_m , M et ω_0 . On utilisera un résultat de *Partie B.1*.

Q16. En utilisant les résultats établis dans la partie *Partie B.1*, montrer qu'on peut réécrire

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL_3\omega_0} + \frac{N_4^2}{R_m}$$

Partie B.3 Étude du circuit de mesure complet

D'après la relation $\underline{i}_e = \underline{Y} \cdot \underline{u}_3$ établie précédemment, le circuit de mesure complet est équivalent au schéma représenté figure 8 dans lequel $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$.

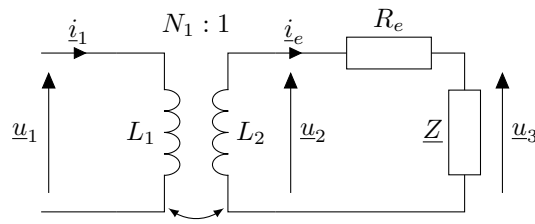


FIGURE 8 – Schéma électrique équivalent du circuit de mesure complet

Q17. Déterminer la relation entre $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$, R_e et $\underline{Y}$.

Q18. Montrer à l'aide des résultats précédents que

$$\underline{u}_1 = -\frac{N_1}{N_4} (1 + R_e \underline{Y}) R_m \underline{i}_4$$

Q19. Dans la limite où R_m tend vers 0, montrer que l'intensité $i_4(t)$ tend vers

$$i_{4,\text{lim}}(t) = -\frac{1}{N_1 N_4 R_e} u_1(t)$$

Commenter.

Exercice n°3 Atmosphère terrestre et ballons-sondes (Durée ~ 1 heure)

Le premier ballon-sonde d'exploration de l'atmosphère a été lancé en 1892. À leurs débuts, ces ballons sont équipés d'enveloppes en matériaux non extensibles (papier huilé par exemple). Étant fermés, ils finissent donc par éclater en altitude lorsque la pression atmosphérique devient trop faible et il faut récupérer les instruments de mesure au sol après leur chute pour espérer relever des mesures faites et mémorisées par ceux-ci.

Depuis 1929, les ballons-sondes météorologiques sont équipés pour la transmission radio en temps réel des mesures effectuées vers des stations de réception au sol. Aujourd'hui encore l'entreprise fondée par le physicien et météorologiste finnois Vilho Väisälä reste un leader de l'instrumentation embarquée.

En 2002 une altitude record de 53 km a été atteinte par un ballon scientifique lancé par l'institut de recherche japonais JAXA, avec un rayon maximal de l'ordre de 25 m. Enfin, à la fin de janvier 2023, l'armée des États-Unis a repéré un ballon de haute altitude (environ 18 km) d'origine chinoise avant de l'abattre. L'appareil, de dimensions comparables au ballon du record japonais, emportait une charge utile de l'ordre d'une tonne. Le gouvernement chinois l'a décrit comme météorologique.

Ce sujet décrit quelques éléments de la Physique de l'atmosphère et certaines propriétés de tels ballons, indilatables ou dilatables.

L'atmosphère sera décrite comme un mélange idéal de gaz parfaits de masse molaire moyenne $\mathcal{M}_{\text{air}}$ et de rapport adiabatique γ_{air} , en équilibre dans le champ de pesanteur. L'étude sera limitée aux couches les plus basses (la troposphère) dans lesquels la température décroît linéairement de sa valeur $T_0 = 27^\circ\text{C}$ au sol à la valeur minimale $T_h = -64^\circ\text{C}$ à l'altitude maximale $h = 14\text{ km}$. Les ballons eux-mêmes seront emplis d'hélium (sauf à la dernière question de la sous-partie C, qui étudie un ballon historique employant un mélange contenant du dihydrogène). L'hélium sera également décrit comme un gaz parfait de masse molaire $\mathcal{M}_{\text{He}}$ et de rapport adiabatique γ_{He} .

Les sous-parties A (modèles pour l'atmosphère terrestre), B (stabilité verticale de celle-ci), C (forces exercées sur un ballon lors de sa montée) et D (modèle décrivant les ballons à enveloppe élastique) peuvent être abordées indépendamment.

Partie A Pesanteur et pression en altitude

Dans la suite on négligera les variations de g mais aussi la courbure de la Terre et le sol est le plan $z = 0$ où l'axe (Oz) est vertical ascendant.

La pression $P(z)$, la température $T(z) = T_0(1 - \Gamma z)$ et la masse volumique $\rho(z)$ ne dépendent que de z . On suppose l'équilibre mécanique de la colonne d'air (figure 9) située au-dessus de l'altitude z .

Les paramètres T_0 et Γ sont constants.

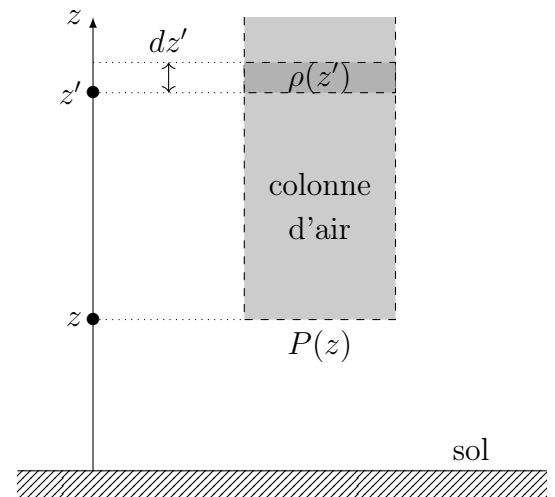


FIGURE 9 – Équilibre d'une colonne d'air

Q1. Dédurre des indications précédentes une relation intégrale liant $P(z)$ et la fonction $\rho(z)$ puis l'équation différentielle :

$$\frac{dP}{P} = - \frac{1}{1 - \frac{z}{H_1}} \frac{dz}{H_0}$$

et exprimer les altitudes caractéristiques H_0 et H_1 en fonction de $\mathcal{M}_{\text{air}}$, g , $\mathcal{R}$, T_0 et de Γ respectivement, puis calculer numériquement H_0 et H_1 .

Q2. Montrer que $P(z) = P_0 (1 - z/H_1)^k$ et déterminer k puis la valeur numérique $P(h)$ de la pression au sommet de la troposphère.

Partie B Stabilité d'une atmosphère sans vent

On étudie ici en l'absence de vent, un modèle d'atmosphère stratifié : la pression $P(z)$, la température $T(z)$ et donc la masse volumique $\rho(z)$ du gaz ne dépendent que de l'altitude. Une certaine quantité d'air, de volume V_0 , prise à l'altitude z_0 sous la pression $P(z_0)$, subit, pour des raisons qu'on ne précisera pas ici, un déplacement rapide jusqu'à une altitude $z > z_0$ et y acquiert presque instantanément la pression d'équilibre $P(z)$ environnante (cf. figure 10).

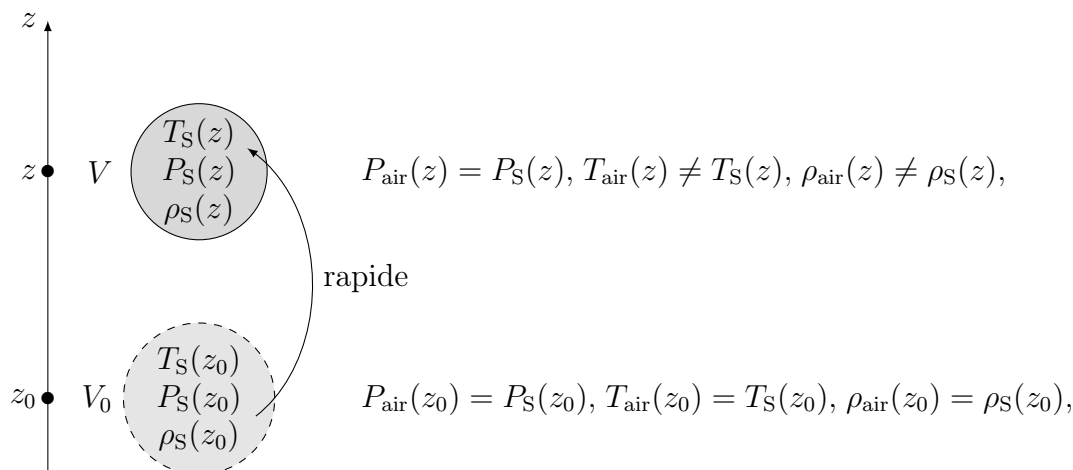


FIGURE 10 – Évolution rapide d'une certaine quantité d'air

Cette évolution sera supposée assez rapide pour être décrite comme adiabatique et cependant réversible ; on notera respectivement $\frac{1}{h_{\text{air}}} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{air}}$ la décroissance relative de la masse volumique de l'air atmosphérique et $\frac{1}{h_S} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_S$ la grandeur analogue pour les variations adiabatiques et réversibles d'altitude de l'air du volume V .

- Q3. Écrire, en fonction de la masse volumique $\rho_{\text{air}}(z)$ de l'air atmosphérique et de celle $\rho_S(z)$ de l'air dans le volume V , la résultante des forces de pesanteur et de pression exercées sur le volume V d'air.
- Q4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z(t)$ du volume V d'air. Si l'air est, à l'arrivée, plus froid que l'air environnant, va-t-il redescendre ou continuer à monter ? Que dire dans ce cas de la stabilité de l'atmosphère ?
- Q5. On considère que $z - z_0$ est assez faible pour qu'on puisse se contenter d'un développement au premier ordre en $z - z_0$. Montrer l'équation de Brunt-Väisälä :

$$\ddot{z} + N^2 z = \text{cte avec } N^2 = g \left[\frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_S} \right]$$

Ici et dans toute la suite on adoptera pour la description de l'air atmosphérique les expressions de la pression $P(z)$ et de la température $T(z)$ dans l'atmosphère :

$$T(z) = T_0 \cdot [1 - \Gamma z] \quad \text{et} \quad P(z) = P_0 \cdot [1 - \Gamma z]^k$$

avec $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$, $1/\Gamma = 48 \text{ km}$ et $k = 5$.

Q6. Exprimer h_{air} en fonction de k , Γ et $T(z)/T_0$ *.

Q7. Dans le cas d'une évolution adiabatique réversible, rappeler la relation qui lie $P(z)$, $\rho(z)$ et leurs valeurs initiales P_0 et ρ_0 en fonction du rapport adiabatique $\gamma = C_P/C_V$.

*. Il s'agit de la calculer en partant de sa définition.

En déduire l'expression de h_S en fonction de γ , k , Γ et $T(z)/T_0$ †.

Q8. Conclure quant à la stabilité de l'atmosphère relativement aux mouvements verticaux de l'air.

Partie C Forces exercées sur un ballon

En haute atmosphère des vents de vitesse allant jusqu'à $v = 120$ km/h ne sont pas rares. La force $\vec{F}_v$ exercée dans ces conditions par le vent sur un ballon sphérique de rayon R ne dépend que de la masse volumique ρ_{air} de l'air, de v et de R .

Q9. Proposer, par exemple par analyse dimensionnelle, une expression $F_v = \|\vec{F}_v\|$ de cette force due au vent.

Q10. On note Π le poids du ballon, qu'on supposera en équilibre thermique et mécanique avec l'air environnant.

Expliciter le rapport $x = F_v/\Pi$ en fonction de R , v , g et de la densité $d = \mathcal{M}_{\text{He}}/\mathcal{M}_{\text{air}}$ de l'hélium.

À quelle condition (portant sur R) la force exercée par le vent est-elle prépondérante ? On calculera un ordre de grandeur du rayon critique R_c avant de conclure.

Le 17 novembre 1892, par une journée sans vent notable, un ballon à enveloppe rigide de volume $V = 4$ m³ est complètement gonflé au gaz d'éclairage (qu'on assimilera à du dihydrogène) par Gustave Hermite et Georges Besançon. Il embarque un manomètre et un thermomètre à minima, capables d'enregistrer les valeurs les plus basses de la pression et de la température avant l'éclatement du ballon et la récupération au sol des instruments. Dans ce cas les instruments indiquent une pression minimale $P_{\text{min}} = 0,35$ bar et une température minimale $T_{\text{min}} = -18$ °C.

Q11. Calculer la masse maximale de l'enveloppe et des instruments.

Partie D Ballons à enveloppe élastique (Ne pas traiter)

Dans toute la suite on ne tiendra plus compte des vents pour l'étude de l'équilibre du ballon. Le ballon est formé d'un matériau élastique qui doit rester tendu, ce qui explique que la pression intérieure P_i de l'hélium doit rester supérieure à la pression extérieure P_e de l'air atmosphérique. Considérant le cas (figure 11) d'un ballon sphérique de rayon (variable) R , on en isole par la pensée une partie basse et une partie haute, séparées par un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $r = R \sin \theta$, parallèle au plan (Oxy) avec $\theta < \pi/2$.

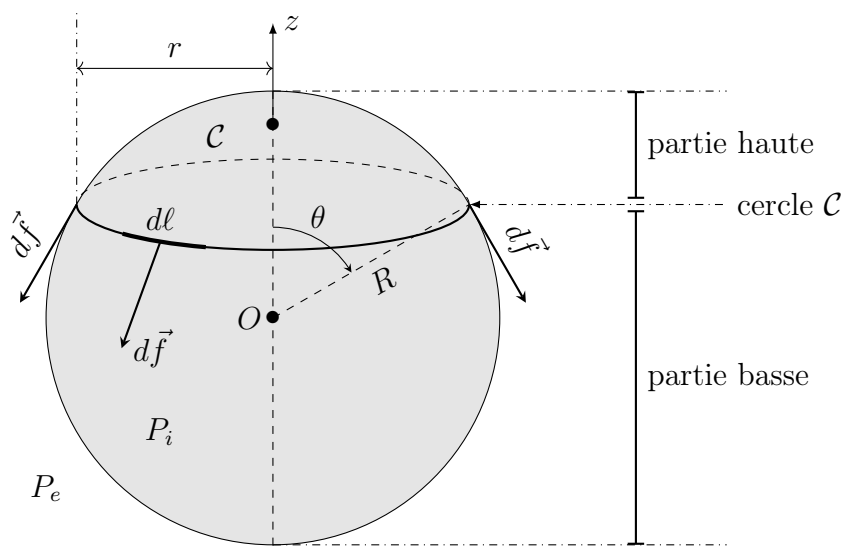


FIGURE 11 – Forces de tension au sein de la membrane du ballon

†. même principe que la question précédente.

La force de tension (ou de traction) exercée par la partie basse du ballon sur l'autre partie est uniformément répartie le long de ce cercle ($\mathcal{C}$) avec une force par unité de longueur de norme $\left\| \frac{d\vec{f}}{d\ell} \right\| = \xi$ constante, tangente au ballon et perpendiculaire à ($\mathcal{C}$). Ici et dans toute la suite on négligera la masse de la membrane.

Q12. Exprimer la résultante $\vec{f}$ des forces de traction exercées par la partie basse du ballon sur la partie haute en fonction de R , ξ et θ puis la résultante $\vec{F}_p$ des forces de pression exercées sur la partie haute du ballon en fonction de $P_i - P_e$ et r uniquement[‡].

Q13. Établir la loi de Jurin-Laplace, $P_i = P_e + \frac{2\xi}{R}$.

Dans la suite on admettra qu'elle est constamment vérifiée avec pour P_e la pression atmosphérique à l'altitude z du ballon.

Q14. Le ballon est assemblé au sol, où $P_e(z = 0) = P_0 = 1$ bar avec un rayon d'équilibre $R_1 = 2$ m et une pression intérieure d'équilibre $P_i = P_1 = 2$ bar. Calculer ξ et $\beta = 2\xi/P_0 R_1$. On considérera que ces valeurs restent constantes dans toute la suite.

Le ballon monte à l'altitude $z > 0$ et acquiert alors instantanément le rayon d'équilibre R ; on note $x = R_1/R$ et $\delta(z) = P_e(z)/P_0$. Au cours de cette montée on admet que l'évolution de l'hélium intérieur au ballon est adiabatique et réversible.

Q15. Établir une relation de la forme $\psi(x) = \delta(z)$ en précisant l'expression de $\psi(x)$ en fonction de x , β et γ_{He} . Montrer que $R > R_1$.

Q16. Les courbes proposées figure 12 sont celles représentatives de $\psi(x)$ et de $\delta(z)$. En déduire les valeurs numériques de R aux altitudes 3 km, 9 km et 15 km.

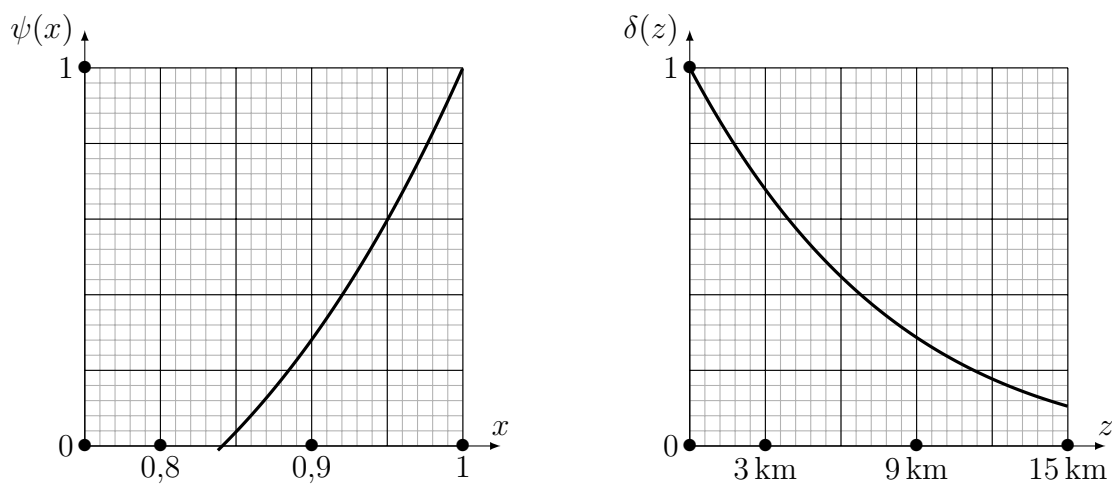


FIGURE 12 – Courbes représentatives de $\psi(x)$ et $\delta(z)$

Ainsi s'achève ce dernier DS de PCSI.

J'espère que ce dernier devoir, ainsi que tous les précédents, vous aura intéressé.e.

Merci pour l'année, et bonne continuation !

L'année n'est pas encore terminée, il reste deux semaines ;-)

[‡]. Calculs d'intégrales, simple pour l'une, double pour l'autre. Déterminer la direction de la résultante pour finir le calcul.

A Données

Partie A Constantes

Accélération de la pesanteur terrestre au niveau du sol	$g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau de mer en surface	$\rho_0 = 1025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Pression atmosphérique (au sol)	$1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$
Constante molaire des gaz parfaits	$\mathcal{R} = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro-Ampère	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Masse d'un électron	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse molaire moyenne de l'air	$\mathcal{M}_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'hélium	$\mathcal{M}_{\text{He}} = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire du dihydrogène	$\mathcal{M}_{\text{H}_2} = 2,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Pression au sol	$P_0 = 1,0 \text{ bar}$
Rapport adiabatique C_P/C_V de l'air	$\gamma_{\text{air}} = 7/5 = 1,4$
Rapport adiabatique C_P/C_V de l'hélium	$\gamma_{\text{He}} = 5/3 \simeq 1,7$

Partie B Aides de calcul

$$\left(\frac{210}{300}\right)^5 \simeq 0,15 \quad \ln(10) \simeq 2,3 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \simeq 0,63$$