



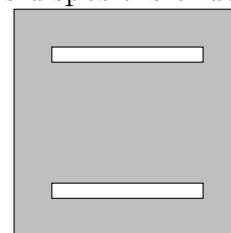
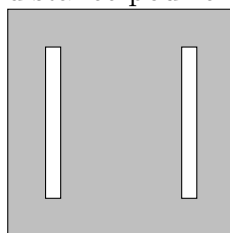
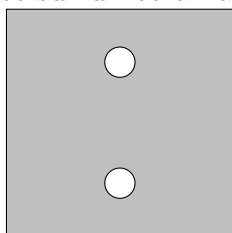
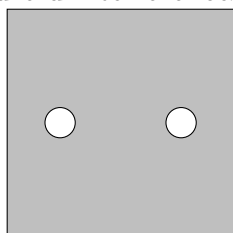
Optique

TD n°02 Interférences par division du front d'onde : trous d'Young – Corrigé

I Exercices d'application

Exercice n°1 Figures d'interférence 🎵

On éclaire un dispositif d'Young (trous ou fentes) en lumière monochromatique. Représenter l'allure de la figure d'interférences observée sur un écran à grande distance pour chacun des dispositifs ci-dessous.

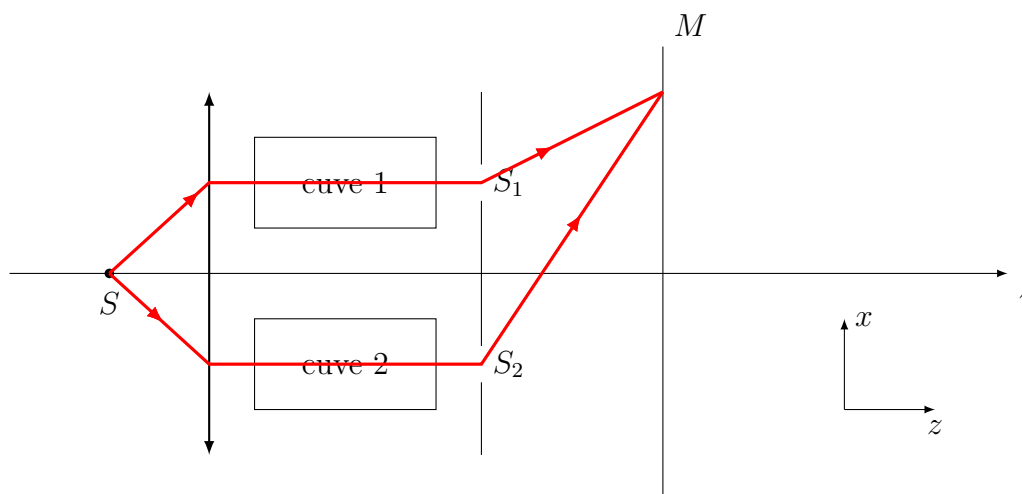


Exercice n°2 Mesure de l'indice d'un gaz 🎵

Nous considérons un montage expérimental constitué de deux fentes d'Young distantes de a avant lesquelles sont placées deux cuves identiques transparentes pouvant contenir un gaz.

Les cuves sont éclairées par une onde plane au moyen d'une source ponctuelle S monochromatique placée au foyer objet d'une lentille convergente (L). L'observation se fait sur un écran placé à une distance D des fentes $D \gg a$. Nous notons ℓ la longueur des cuves parallèlement à la direction de l'onde plane incidente.

L'air est d'indice n_{air} .



R1. Tracer les deux rayons interférant au point M .

Solution: Cf ci-dessus.

R2. En notant respectivement n_1 et n_2 l'indice de réfraction des gaz contenus dans les cuves 1 et 2, déterminer la différence de chemin optique $\delta = (SS_2M) - (SS_1M)$ en un point M de l'écran.

En déduire l'expression de l'intensité.

Solution:

$$\begin{aligned}
 \delta &= (SS_2M) - (SS_1M) \\
 &= (SH) + (HS_2) + (S_2M) - (SK) - (KS_1) - (S_1M) \\
 &\quad \text{H et K appartiennent au même plan d'onde } (SH) = (SK) \\
 &= n_2\ell - n_1\ell + (S_2M) - (S_1M) \\
 &= (n_2 - n_1)\ell + n_{\text{air}}(S_2M - S_1M) \\
 S_2M - S_1M &= \sqrt{D^2 + (x + a/2)^2 + y^2} - \sqrt{D^2 + (x - a/2)^2 + y^2} \\
 S_2M - S_1M &= D \left(\sqrt{1 + \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x - a/2)^2 + y^2}{D^2}} \right) \\
 S_2M - S_1M &\approx D \left(1 + \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{2D^2} - 1 - \frac{(x - a/2)^2 + y^2}{2D^2} \right) \\
 S_2M - S_1M &\approx \frac{xa}{D} \\
 \delta(x) &= (n_2 - n_1)\ell + n_{\text{air}} \frac{xa}{D}
 \end{aligned}$$

D'après la relation de Fresnel : $I(x) = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left((n_2 - n_1)\ell + n_{\text{air}} \frac{xa}{D} \right) \right) \right)$

- R3. Déterminer l'interfrange et la position de la frange d'ordre 0. Est-il possible de repérer la position de cette frange en lumière monochromatique ?

Solution: L'interfrange est telle que $\delta(x + i) = \delta(x) + \lambda_0$, donc $i = \frac{\lambda_0 D}{n_{\text{air}} a}$

La frange d'ordre 0 est telle que $\delta(x_0) = 0$, soit $x_0 = - (n_2 - n_1) \frac{\ell D}{an_{\text{air}}}$

Elle correspond à un maximum d'intensité, comme toutes les franges telles que $\delta(x)$ est un multiple entier de λ_0 . Il n'est donc pas possible de la repérer en lumière blanche.

- R4. Initialement, un vide très poussé avait été effectué dans la première cuve, la seconde contenant de l'air (à la pression et à la température du laboratoire) de telle sorte qu'initialement $n_1 = 1$ et $n_2 = n_{\text{air}}$. On fait rentrer de l'air lentement dans la première cuve, qu'observe-t-on sur l'écran ?

Solution: L'interfrange n'est pas modifié, mais la figure d'interférence se translate. À chaque instant $n_2 > n_1$, donc $x_0 < 0$ et cet écart diminue, donc la figure se translate vers le haut.

- R5. Entre l'état initial et l'équilibre, on observe le défilement de N franges brillantes, déterminer l'indice de l'air. Discuter de la faisabilité de l'expérience sachant que $n_{\text{air}} - 1 \approx 3 \times 10^{-4}$.

Solution: Initialement, la frange d'ordre 0 est en $x_i = - (n_{\text{air}} - 1) \frac{\ell D}{an_{\text{air}}}$.

À la fin, elle est en $x_f = 0$

Ainsi il a défilé : $N = \frac{|x_i|}{i} = (n_{\text{air}} - 1) \frac{\ell D}{an_{\text{air}}} \times \frac{n_{\text{air}} a}{\lambda_0 D} = (n_{\text{air}} - 1) \frac{\ell}{\lambda_0}$ franges.

Avec $\ell \approx 1$ cm, on obtient $N = 3 \cdot 10^{-4} \times \frac{10^{-2}}{500 \cdot 10^{-9}} = 6$, et plus si la cuve est plus longue. Cette expérience paraît tout à fait faisable.

Exercice n°3 Cohérence temporelle et spatiale d'une source 🎵

On étudie la cohérence d'une source lumineuse utilisée dans une expérience d'interférences à deux fentes (type Young). On suppose que la lumière émise est quasi-monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$, mais que sa cohérence temporelle et spatiale est limitée.

R1. Expliquez la différence entre cohérence temporelle et cohérence spatiale d'une source.

Quelle condition doit respecter une source pour produire des franges d'interférence nettes et stables ?

Solution: Cohérence temporelle : possibilité de faire interférer les trains d'onde avec eux-mêmes. Il faut que l'extension spectrale ne soit pas trop importante pour que la variation de l'ordre d'interférence sur l'écran ne soit pas trop importante.

Cohérence spatiale : les différents points sources sont incohérents et donnent des figures d'interférence distinctes, si elles se superposent la figure est contrastée, sinon elle perd du contraste et se brouille.

R2. La lumière utilisée provient d'une diode laser dont la largeur spectrale est $\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$. Calculez la longueur de cohérence ℓ_c de cette source.

Solution: $\ell_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

R3. En déduire le temps de cohérence τ_c de cette source lumineuse. Quelle interprétation physique peut-on donner à ce temps ?

Solution: $\tau_c = \frac{\ell_c}{c} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ s}$, c'est la durée d'un train d'onde.

R4. Soit $d = 1 \text{ mm}$, la taille de la diode laser. On place deux fentes séparées d'une distance $a = 0,1 \text{ mm}$ à une distance $L = 0,1 \text{ m}$ de la source. Le critère de cohérence spatiale est-il assuré ?

Solution: Le critère de cohérence spatiale est vérifié si l'écart de l'ordre d'interférence sur l'écran entre le centre et l'extérieur de la source est : $p_{\text{ext}} - p_{\text{centre}} < \frac{1}{2}$

Or pour un point de la source hors de l'axe (à la distance b de l'axe) des fentes d'Young : $p = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{ab}{L} + \frac{ax}{D} \right)$, soit

$p_{\text{ext}} - p_{\text{centre}} = \frac{ad/2}{\lambda L} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$, donc le critère de cohérence spatial n'est pas assuré.

Exercice n°4 Trous d'Young éclairés par le doublet du mercure 🎵 (Cohérence temporelle)

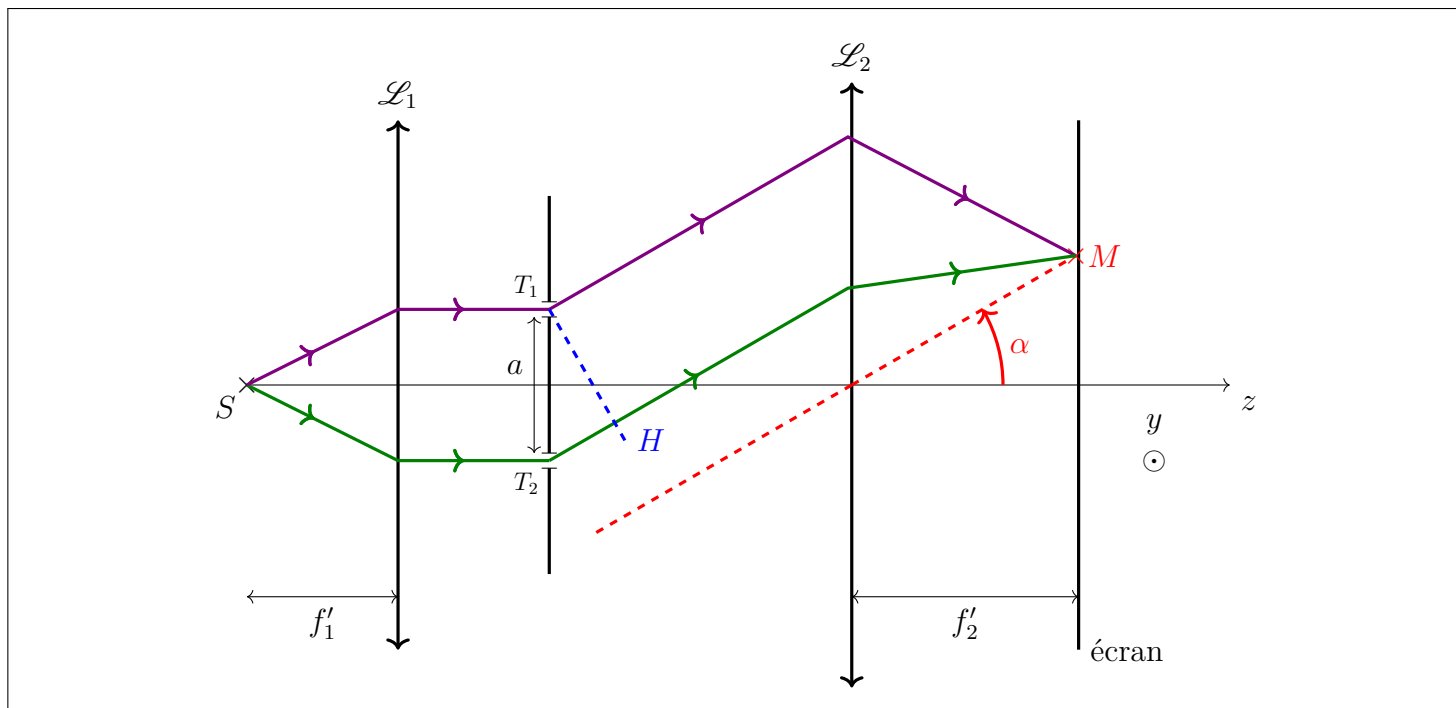
Considérons un dispositif de fentes d'Young éclairé par une lampe à vapeur de mercure assimilée à une source ponctuelle située au foyer principal objet d'une lentille convergente ($\mathcal{L}_1$, de distance focale f'_1), dont on isole le doublet jaune par un filtre approprié. Ce doublet est formé de deux raies très rapprochées, modélisées par deux raies monochromatiques de même intensité I_m et de longueurs d'onde $\lambda_1 = 577 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 579 \text{ nm}$.

Les fentes d'Young sont séparées d'une distance a et ont pour largeur $a/10$. Sur l'écran placé dans le plan focal image d'une deuxième lentille convergente ($\mathcal{L}_2$, de distance focale f'_2), on observe la figure d'interférences.

La configuration considérée est donc la configuration de Fraunhofer.

R1. Faire un schéma précis du dispositif.

Solution:



R2. Pour une seule radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 , établir l'ordre d'interférences au point de l'écran d'abscisse x puis celle de l'intensité. Décrire la figure d'interférences.

Solution:

M étant dans le plan focal image de $\mathcal{L}_2$, seuls les rayons arrivant parallèlement entre eux sur la lentille $\mathcal{L}_2$ se croisent en M . Pour déterminer la direction de ces rayons, on s'aide du rayon passant par M et O_2 .

Les ondes sont sphériques entre S et $\mathcal{L}_1$ de centre S , et entre $\mathcal{L}_2$ et M , de centre M .

Les ondes sont planes entre les deux lentilles.

Différence de marche :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SM)_2 - (SM)_1 \\ &= (ST_2M) - (ST_1M) \\ &= (ST_2) + (T_2M) - (ST_1) - (T_1M) \\ &\quad \text{or } T_1 \text{ et } T_2 \text{ appartiennent au même plan d'onde relatif à } S \\ &= (T_2M) - (T_1M)\end{aligned}$$

Si la source était en M , H et T_1 appartiendraient au même plan d'onde relatif à M , donc $(MT_1) = (MH)$.

Par principe du retour inverse de la lumière, $(T_1M) = (HM)$

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (T_2H) + (HM) - (T_1M) \\ &= (T_2M) \\ &= n_{\text{air}} T_2 H = T_2 H\end{aligned}$$

Or $\sin(\alpha) = \frac{T_2 H}{a}$, donc $\delta(M) = a \sin(\alpha) \approx a\alpha$, car $\alpha \ll 1$ rad.

$$\text{Or } \tan(\alpha) = \frac{x}{f'_2}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\delta(M) = \frac{ax}{f'_2}}$$

$$p(M) = \frac{ax}{f'_2 \lambda_0}$$

R3. Définir l'interfrange. Pour laquelle des longueurs d'onde λ_1 ou λ_2 est-il le plus grand ?

Solution: i est la distance telle que $p(x+i) - p(x) = 1$, soit $i = \frac{\lambda_0 f'_2}{a}$
 $\lambda_2 > \lambda_1$, donc $i_2 > i_1$.

R4. Les ondes issues de la raie 1 et celles issues de la raie 2 interfèrent-elles ?

Solution: Les ondes n'interfèrent pas car elles sont incohérentes.

R5. Justifier qualitativement qu'il y aura brouillage de la figure d'interférences périodiquement.

Solution: Les deux figures d'interférence sont d'interfranges légèrement différents donc les deux figures se décalent progressivement et périodiquement la frange lumineuse due à λ_1 va se superposer à la frange sombre due à λ_2 .

R6. Exploiter le critère semi quantitatif pour déterminer les abscisses x des brouillages.

Solution: Il y a brouillage en x telles que $|p_2 - p_1|$ est un demi-entier, soit $\frac{ax}{f'_2 \lambda_1} - \frac{ax}{f'_2 \lambda_2} = m + \frac{1}{2}$, où $m \in \mathbb{Z}$
 soit $x_m = \frac{f'_2 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (m + 1/2) \approx \frac{f'_2 \lambda_0^2}{\Delta \lambda} (m + 1/2)$

On souhaite établir ces résultats plus quantitativement.

R7. 🎵 🎵 Montrer que l'intensité totale se met sous la forme

$$I(x) = I_{\text{moy}} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\Delta \lambda}{2\lambda^2} \frac{ax}{f'_2} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda f'_2} \right) \right]$$

avec I_{moy} une constante de proportionnalité dépendant de l'intensité I_m des raies ; $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ la séparation du doublet et $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ sa longueur d'onde moyenne. Comme les deux longueurs d'onde sont très proches, on approximera $\lambda_1 \lambda_2 \simeq \lambda^2$.

Solution: Intensité résultante :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1(M) + I_2(M) \\ &= 2I_m \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta(M) \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta(M) \right) \right) \\ I(M) &= 4I_m + 4I_m \cos \left(\frac{2\pi \delta}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left(\frac{2\pi \delta}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \\ &= 4I_m \left(1 + \cos \left(\pi \delta \times \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \cos \left(\pi \delta \times \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \right) \\ &= 4I_m \left(1 + \cos \left(\pi \delta \times \frac{2\lambda}{\lambda^2} \right) \cos \left(\pi \delta \times \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \right) \right) \\ &= 4I_m \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda^2} \delta(M) \right) \times \cos \left(\frac{2\pi \delta(M)}{\lambda} \right) \right) \end{aligned}$$

- R8. 🎵 🎵 Déterminer la période spatiale des deux cosinus. En déduire que l'un d'eux s'interprète comme un terme d'interférences et l'autre comme un facteur de contraste dépendant du point d'observation. Représenter alors schématiquement l'allure de $I(x)$.

Solution: $\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda^2}\delta(M)\right) = \cos\left(\frac{2\pi\Delta\lambda}{2\lambda^2}\frac{ax}{f'_2}\right)$ est de période $\frac{2\lambda^2 f'_2}{a\Delta\lambda}$
 $\cos\left(\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda}\right) = \cos\left(\frac{2\pi ax}{f'_2\lambda}\right)$ est de période $i = \frac{f'_2\lambda}{a} \ll \frac{2\lambda^2 f'_2}{a\Delta\lambda}$: c'est le terme d'interférence, on retrouve l'expression de l'interfrange pour une radiation de longueur d'onde λ .
 L'autre terme module cette figure d'interférences, qui se retrouve brouillée deux fois par période quand ce terme s'annule.

- R9. Pour deux fentes d'Young de largeur égale à $\frac{a}{10}$, estimer la taille de la figure d'interférences sur l'écran et le nombre de franges observables. Qu'observe-t-on réellement sur l'écran ?

Solution: QUESTION TROP DIFFICILE DANS FRAUNHOFFER, possible si figure observée sur un écran à grande distance D .

La tache de diffraction est de demi-largeur angulaire $\theta \approx \frac{a}{10\lambda}$, donc sur l'écran la tache de diffraction est de largeur $\ell = \theta \times D = \frac{aD}{10\lambda}$

On observe, dans la tache de diffraction centrale $N = \frac{\ell}{i} = \frac{aD}{10\lambda} \times \frac{a}{\lambda D} = \frac{a^2}{10\lambda^2} =$

Donnée

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Étoile double 🎵 🎵 (Cohérence spatiale)

On note ε la séparation angulaire entre les deux étoiles.

On modélise d'abord le télescope interférentiel comme deux trous d'Young, séparés d'une distance a , devant lesquels on place un filtre monochromatique qui ne laisse passer que les longueurs d'onde autour de λ_0 , et d'un écran placé dans le plan focal image d'une lentille.

Les étoiles sont à l'infini, supposées ponctuelles, l'une dans la direction faisant un angle $\varepsilon/2$ avec l'axe de la lentille, l'autre un angle $-\varepsilon/2$.

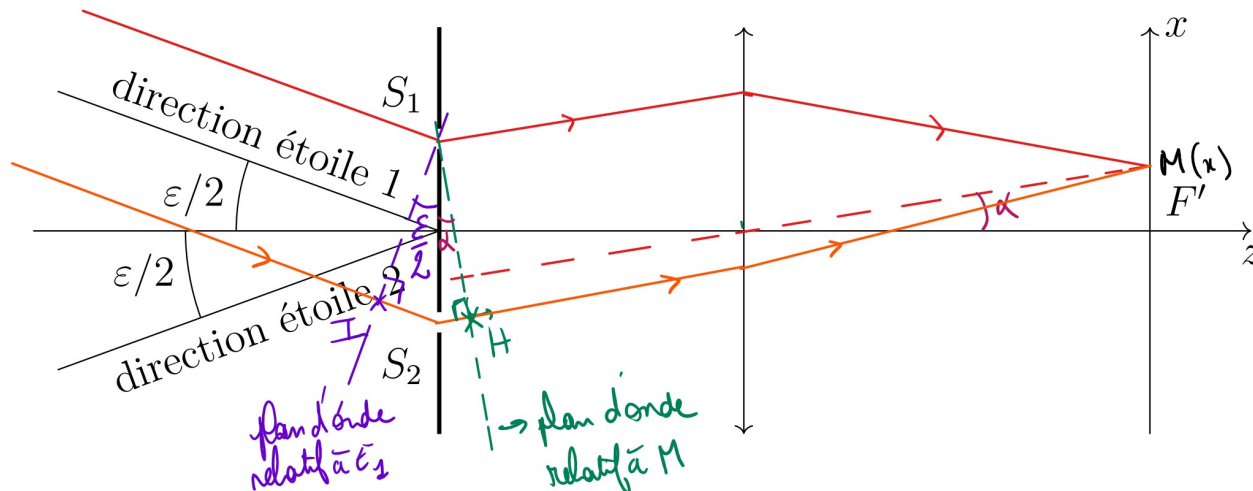


FIGURE 1 – Montage des trous d'Young

On a $\varepsilon \ll 1$, et la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss.

R1. Pourquoi les deux étoiles peuvent-elles être supposées comme étant des sources incohérentes ?

Solution: Les phases à l'origine lors de l'émission lumineuse par deux sources différentes sont indépendantes. Le déphasage entre deux ondes lumineuses varie au cours du temps. Les trains d'onde émis sont donc différents, et ne peuvent interférer. Les deux sources peuvent être supposées incohérentes.

On considère d'abord l'étoile 1, qui fait un angle $+\varepsilon/2$ avec l'axe de la lentille.

R2. Établir l'expression de la différence de marche au point M de l'écran d'abscisse x entre deux rayons, l'un passant par S_1 et l'autre par S_2 .

Solution: Différence de marche

$$\begin{aligned}\delta_1(M) &= (E_1M)_2 - (E_2M)_1 \\ &= \cancel{(E_1S_1)} + \cancel{(S_1M)} - \left\{ \cancel{(E_1I)} + (IS_2) + (IH) + \cancel{(HM)} \right\}\end{aligned}$$

Or I et S_1 appartiennent au même plan d'onde, donc d'après le théorème de Malus, $(E_1S_1) = (E_1I)$. D'après le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus $(S_1M) = (HM)$, S_1 et H appartiennent au même plan d'onde relatif à M .

Ainsi :

$$\begin{aligned}\delta_1(M) &= (IS_2) + (IH) \\ &= IS_2 + IH \\ &= a \tan(\varepsilon/2) + a \tan(\alpha) \\ &\approx a \left(\frac{\varepsilon}{2} + \alpha \right)\end{aligned}$$

car α et ε sont très petits devant 1 radian.

De plus, $\sin(\alpha) = \frac{x}{f'}$, donc $\alpha \approx \frac{x}{f'}$

On en déduit $\delta_1(M) = \frac{a\varepsilon}{2} + \frac{ax}{f'}$

R3. En déduire l'expression de l'intensité sur l'écran due à l'étoile 1.

Solution:

D'après la formule de Fresnel : $I_1(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a\varepsilon}{2} + \frac{ax}{f'} \right) \right)$, avec I_0 l'intensité lumineuse de la lumière arrivant sur les trous d'Young issue de l'étoile 1.

R4. Décrire la figure d'interférence obtenue : franges, interfrange, position de la frange centrale.

Solution: L'intensité lumineuse ne dépend que de x , donc les franges lumineuses sont des franges rectilignes horizontales. La frange centrale telle que $\delta_1(M) = 0$ est en $x_{01} = -\frac{\varepsilon f'}{2}$, et elles sont espacées d'un interfrange $i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$

R5. En déduire, par analogie, l'intensité lumineuse due à l'étoile 2.

Solution:

L'expression de la différence de marche après les trous est identique, la différence de marche du rayon passant par S_2 par rapport à celui passant par S_1 , avant les trous est de $-\frac{a\varepsilon}{2}$. Ainsi $\delta_2(M) = -\frac{a\varepsilon}{2} + \frac{ax}{f'}$

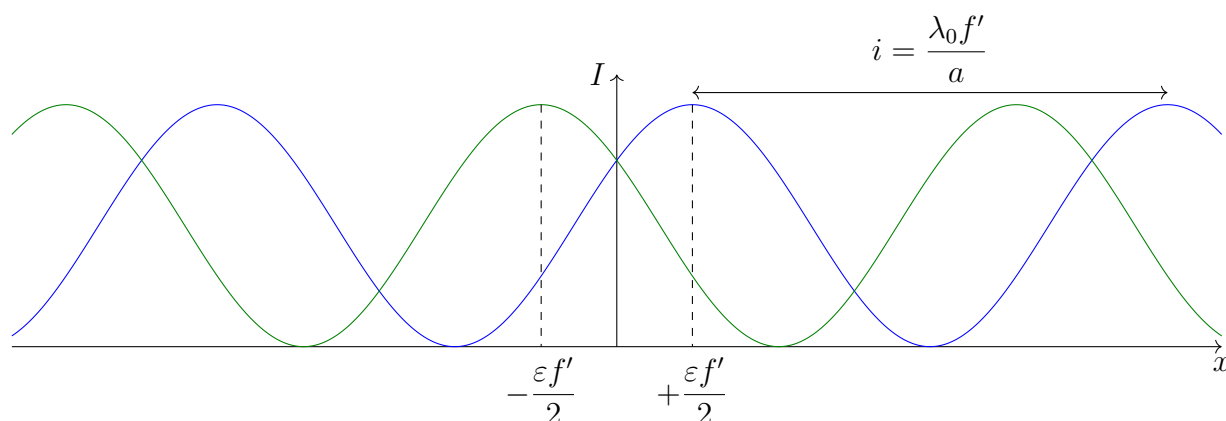
Soit $I_2(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} - \frac{a\varepsilon}{2} \right) \right)$

L'interfrange est identique à celui dû à l'étoile 1, mais la frange centrale est située en $x_{02} = +\frac{\varepsilon f'}{2}$

R6. Tracer ces deux intensités sur un même graphique.

Expliquer qualitativement pourquoi lorsqu'on augmente a , le contraste de l'image finira par être nul.

Solution:



On imagine ensuite que si on augmente a , l'interfrange de chaque intensité diminue, ce qui va changer le déphasage entre les deux cosinus. Il peut alors arriver un moment où les maxima de l'un coïncident avec les minima de l'autre. A ce moment là, la somme des deux intensités est constante : le contraste est nul.

R7. On augmente progressivement a , en exploitant le critère semi-quantitatif en déduire une relation entre a , ε et λ au premier brouillage.

Solution:

Il y a deux sources ponctuelles, il y aura brouillage sur l'écran en M si $|p_{\text{étoile 1}} - p_{\text{étoile 2}}| = m + \frac{1}{2}$, avec $m \in \mathbb{N}$

Le premier brouillage a lieu pour $\frac{1}{\lambda_0} \left| \frac{ax}{f'} + \frac{a\varepsilon}{2} - \left(\frac{ax}{f'} - \frac{a\varepsilon}{2} \right) \right| = \frac{1}{2}$

Soit $\frac{a\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{2}$, soit pour $a = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}$

R8. Exprimer l'intensité totale sous la forme : $I_{\text{tot}}(x) = 4I_0 \left[1 + C(\varepsilon) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 f'} \right) \right]$

Identifier l'expression du contraste $C(\varepsilon)$.

Solution: Les deux sources sont incohérentes, donc on somme les intensités dues à chaque source :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1(M) + I_2(M) \\ &= 2I_0 \left[2 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} + \frac{a\varepsilon}{2} \right) + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} - \frac{a\varepsilon}{2} \right) \right] \\ &= 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a\varepsilon}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{f'} \right) \right] \end{aligned}$$

On identifie le contraste : $C(\varepsilon) = \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a\varepsilon}{2} \right)$

R9. Montrer que le contraste s'annule pour des valeurs a_k de a , avec k entier, dont on donnera l'expression.

Solution: Si on modifie a la distance entre les deux trous, le contraste s'annule pour $\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{a_k \varepsilon}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$,

pour $k \in \mathbb{N}$. Soit pour $a_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_0}{\varepsilon}$

En pratique, on ne place pas une énorme lentille derrière deux trous d'Young (cela serait du gâchis car la majeure partie de la lentille ne sert pas). Au lieu de cela, on utilise deux petits télescopes, qui jouent chacun le rôle d'un trou d'Young. On capte la lumière reçue par chacun, on l'achemine par des fibres optiques, et on fait interférer ces deux lumières. On a donc, très schématiquement, le fonctionnement suivant :

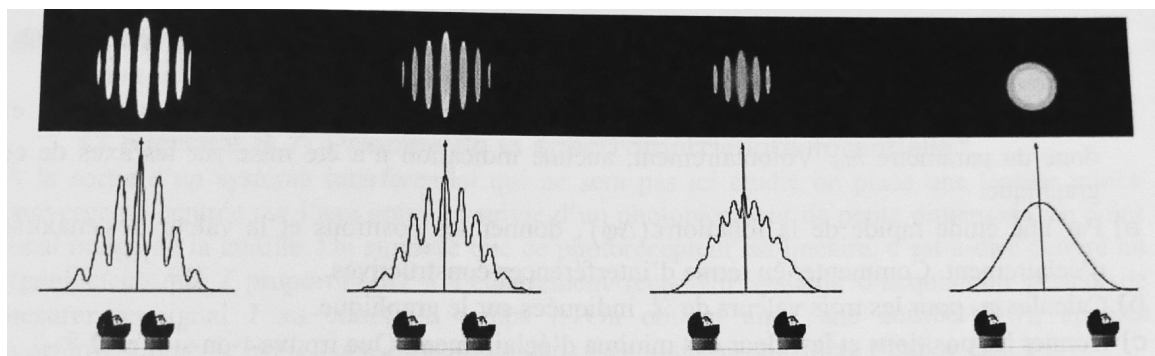


FIGURE 2 – Évolution des franges d'interférences avec la distance entre deux télescopes observant une étoile (source VLT).

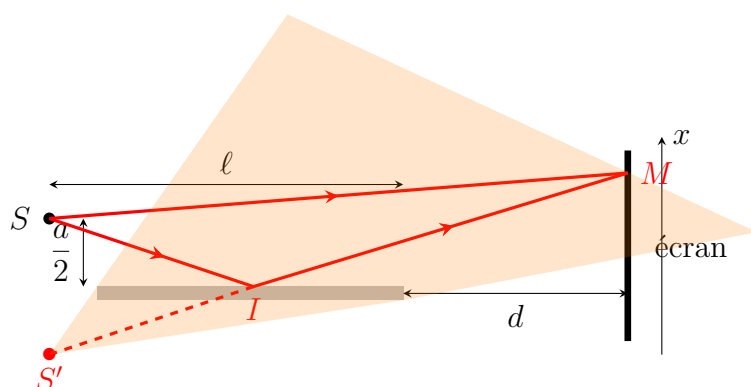
R10. L'observation du système binaire Albireo donne un brouillage pour une séparation $a_0 = 1,93$ mm. On en déduit donc qu'il s'agit d'une étoile double.

La longueur d'onde utilisée est $\lambda_0 = 635$ nm. Quelle est la séparation angulaire entre les deux étoiles ?

Solution: La première annulation a lieu pour $a_0 = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}$, donc $\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2a_0} = 0,0001645$ rad = 34 "d'arc

Exercice n°6 Miroir de Lloyd 🎵 🎵 (Cohérence spatiale)

Le dispositif de Lloyd permet d'obtenir des interférences à deux ondes. Il consiste en un miroir plan et un écran, éclairés par une source S supposée ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ_0 placée très près du miroir. On indique que la réflexion sur le miroir entraîne un déphasage de π de l'onde réfléchie.



Dispositif interférentiel du miroir de Lloyd.

R1. Représenter la marche des deux rayons lumineux issus de S qui interfèrent en un point M de l'écran, on introduira pour cela l'image S' de S par le miroir.

En déduire que le dispositif est équivalent à des trous d'Young.

Solution: Le rayon est réfléchi par le miroir selon la loi de Snell-Descartes sur la réflexion.

R2. Décrire le champ d'interférences. Les interférences sont-elles localisées ?

Solution: Le champ d'interférences est constitué de tous les points de l'espace où se croisent un rayon s'étant réfléchi sur le miroir et les rayons issus de S . C'est la zone grisée au-dessus du miroir sur le schéma ci-dessus. Les interférences ne sont pas localisées car c'est un dispositif de division du front d'onde.

- R3. Déterminer la différence de marche $\delta(M)$ et l'ordre d'interférences $p(M)$.
Décrire les franges d'interférences.

Solution: Un déphasage de π correspond à une différence de marche supplémentaire de $\frac{\lambda_0}{2}$.

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SM)_2 + \frac{\lambda_0}{2} - (SM)_1 \\ &= (SI) + (IM) - (SM) + \frac{\lambda_0}{2} \\ &= (S'I) + (IM) - (SM) + \frac{\lambda_0}{2} \\ &= (S'M) - (SM) + \frac{\lambda_0}{2} \\ &= \sqrt{(x + a/2)^2 + (d + \ell)^2} - \sqrt{(x - a/2)^2 + (d + \ell)^2} + \frac{\lambda_0}{2} \\ &= (d + \ell) \left(\sqrt{1 + \frac{(x + a/2)^2}{(d + \ell)^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x - a/2)^2}{(d + \ell)^2}} \right) + \frac{\lambda_0}{2} \\ &\approx \frac{ax}{d + \ell} + \frac{\lambda_0}{2}\end{aligned}$$

Ordre d'interférence :
$$p(x) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{ax}{(d + \ell)\lambda_0} + \frac{1}{2}$$

L'éclairement au point M d'abscisse x est : $\mathcal{E}(x) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi nax}{\lambda_0(d + \ell)} \right) \right)$. L'éclairement ne dépend que de x : les franges sont donc rectilignes. Dans le cours, nous avons vu, dans le cas analogue des trous d'Young, qu'il était possible d'étendre la source dans une direction orthogonale à l'axe des deux sources sans que le contraste de la figure d'interférences ne soit affecté.

- R4. Exprimer l'interfrange i .

Solution: L'interfrange est tel que $p(x + i) = p(x) + 1$, soit
$$i = \frac{\lambda_0(\ell + d)}{a}$$

- R5. Peut-on remplacer la source ponctuelle par une fente lumineuse allongée dans la direction orthogonale au plan de la figure ci-dessus sans dégrader la visibilité des franges ?

Solution: Les franges étant horizontales à x constant, l'élargissement spatial de la source dans la direction orthogonale à l'axe (Ox) ne dégradera pas la visibilité des franges.

- R6. On élargit maintenant la fente source dans la direction orthogonale aux franges. Sa largeur b est répartie également de part et d'autre de la position $a/2$. En utilisant le critère semi-quantitatif de visibilité des franges, exprimer en fonction de i , de a et b l'extension spatiale de la figure d'interférences où les franges restent visibles.

Solution: Les franges sont visibles tant que $|p_{\text{centre}} - p_{\text{ext}}| < \frac{1}{2}$, avec p_{centre} l'ordre d'interférence en M du point source central (le point S du début de l'exercice), et p_{ext} l'ordre d'interférence en M du point source S_m situé à une extrémité de la source élargie soit en $\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}$. Dans ce cas S_m et son symétrique S'_m sont distants de $a + b$, ainsi :
$$p_{\text{ext}} = \frac{(a + b)x}{(d + \ell)\lambda_0} + \frac{1}{2}$$

Les franges sont visibles si $\frac{(a+b)x}{(d+\ell)\lambda_0} + \frac{1}{2} - \frac{a)x}{(d+\ell)\lambda_0} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, soit $\frac{bx}{(d+\ell)\lambda_0} < \frac{1}{2}$, soit $x < \frac{(d+\ell)\lambda_0}{2b}$

Les franges sont donc visibles pour $x < \frac{ia}{2b}$

Exercice n°7 Mesure d'une largeur spectrale 🎵 🎵 🎵 (Cohérence temporelle)

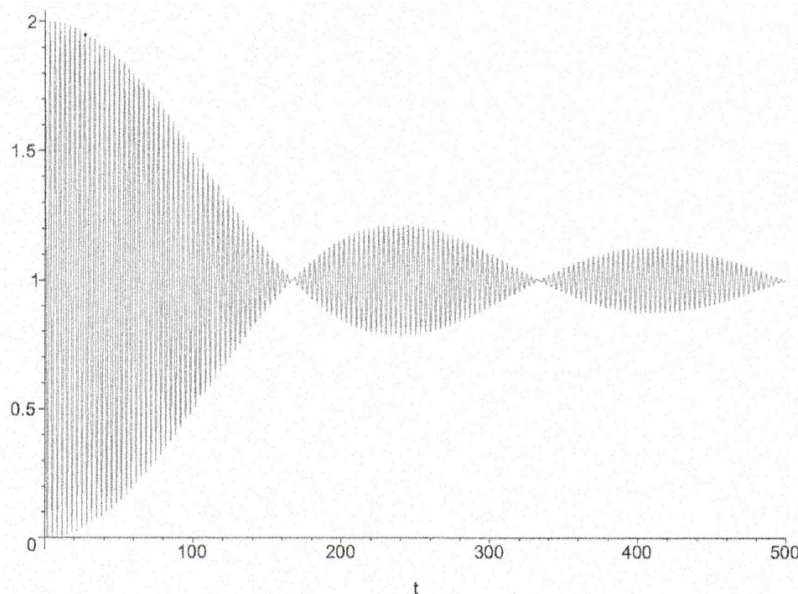
Considérons une source ponctuelle dont le spectre est constitué d'une raie de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 668 \text{ nm}$ et de largeur $\Delta\lambda$.

Elle éclaire un dispositif de trous d'Young dont la distance $a(t)$ varie en fonction du temps : $a(0) = 0$ et $\frac{da}{dt} = 100 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'écran est à distance $D = 5,00 \text{ m}$.

On place un capteur sur l'écran en un point M à distance $x = 1,0 \text{ cm}$ du centre.

Le graphe suivant présente l'intensité lumineuse reçue par le capteur en fonction du temps en secondes.



R1. Rappeler l'expression de la différence de marche d'un tel dispositif.

Exprimer $a(t)$.

R2. Exploiter le critère semi-quantitatif pour en déduire $\Delta\lambda$.

L'intensité lumineuse est répartie uniformément sur l'intervalle $\left[\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right]$.

R3. Établir l'expression de l'intensité lumineuse sous la forme $I(M) = 2I_0 \left[1 + C(x) \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right]$. Identifier les expressions de C et de i .

R4. Exprimer les instants d'annulation du contraste.

R5. Déterminer une estimation de la largeur spectrale $\Delta\lambda$.

Solution: Sans refaire la totalité des calculs

— La source est étendue spectralement, le premier brouillage a lieu en M de l'écran tel que $\delta(M) = L_c$, où L_c est la longueur de cohérence temporelle de la source.

— Pour les trous d'Young séparés de $a(t)$, en M , d'abscisse x : $\delta(M) = \frac{a(t)x}{D}$

— Expression de $a(t)$? $a(t) = \frac{da}{dt} \times t$

— Longueur de cohérence temporelle : $L_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}$

Or $\nu = \frac{c}{\lambda}$, donc $d\nu = \frac{-c}{\lambda^2} d\lambda$, donc $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$

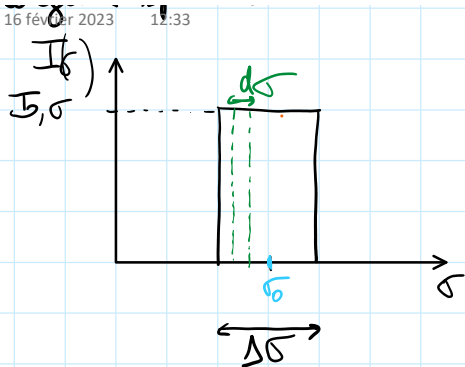
Ainsi $L_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$

— Conclusion : le premier brouillage, qui a lieu à l'instant $t_1 = 170$ s est telle que $\frac{a(t_1)x}{D} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$

On en déduit $\Delta\lambda = \frac{D\lambda_0^2}{a(t_1)x} = 13,1 \text{ nm}$

Solution: En faisant la totalité des calculs :

di 16 février 2023 12:33



Intensité sur l'écran due à la bande de largeur d .

$$dI(x) = 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma} d\sigma \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(x)\right) \right)$$

$$\text{avec } \delta(x) = \frac{a(t)x}{D}$$

Les différentes bandes sont incohérentes et n'interfèrent pas.

$$I(x) = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma} d\sigma \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(x)\right) \right)$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \times \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 1 + \cos\left(2\pi\sigma \delta(x)\right) d\sigma$$

$$= \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \times \left(\Delta\sigma + \frac{\sin\left(2\pi\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\delta\right) - \sin\left(2\pi\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\delta\right)}{2\pi\delta} \right)$$

$$= \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \times \left(\Delta\sigma + \frac{2}{2\pi\delta} \sin\left(\pi\Delta\sigma\delta\right) \cos\left(2\pi\sigma_0\delta\right) \right)$$

$$= \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \left(\Delta\sigma + \Delta\sigma \times \frac{\sin(\pi\Delta\sigma\delta)}{\pi\Delta\sigma\delta} \cos(2\pi\sigma_0\delta) \right)$$

$$= 2I_0 \left(1 + \underbrace{\text{sinc}\left(\pi\Delta\sigma\delta\right)}_{\text{contraste}} \underbrace{\cos(2\pi\sigma_0\delta)}_{\text{interférence}} \right)$$

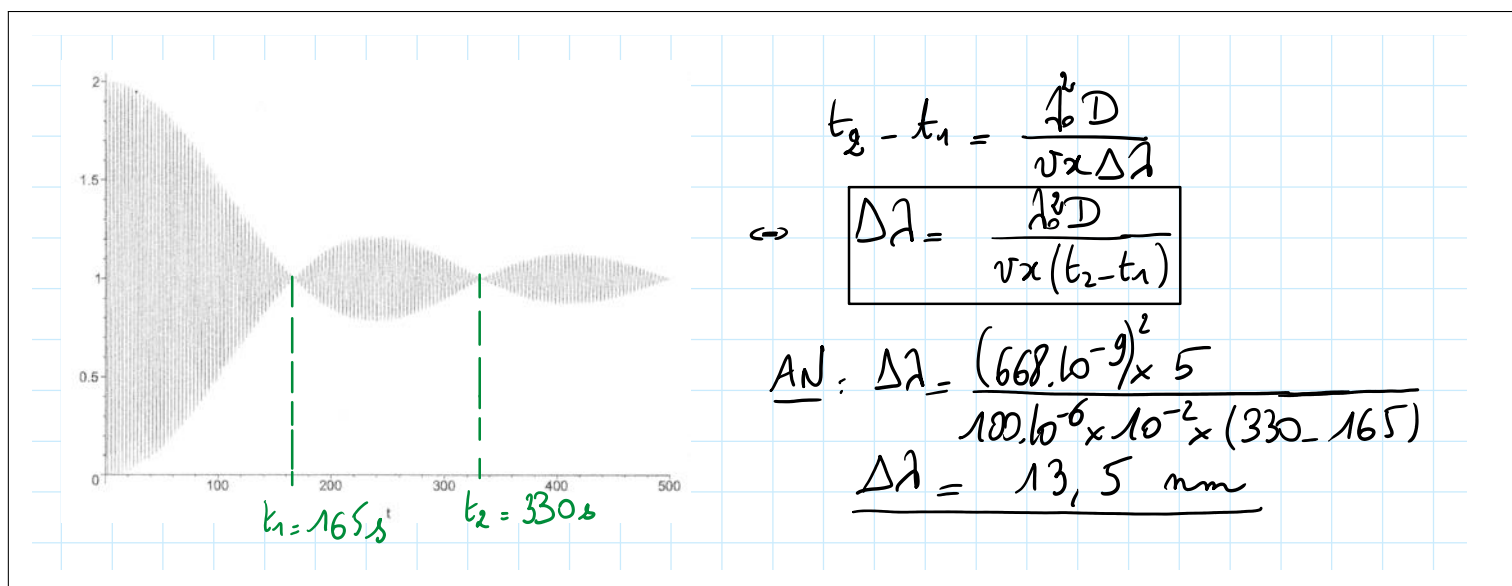
$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \rightarrow d\sigma = -\frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad \Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$I(x) = 2I_0 \left(1 + \text{sinc}\left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \frac{a(t)x}{D}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{a(t)x}{D}\right) \right)$$

Le contraste s'annule pour $\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \frac{a(t)x}{D} = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\text{or } a(t) = vt, \text{ avec } v = 100 \mu\text{m.s}^{-1}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \frac{vt}{D} x = n$$



III Résolution de problème

Exercice n°8 Étoile

On observe une étoile supposée ponctuelle à l'aide d'un télescope dont l'axe est placé verticalement à l'équateur. Devant le télescope est disposé un système de fentes d'Young ainsi qu'un filtre vert de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Estimer la période de défilement des franges.

Solution: On note α l'angle que font les rayons issus de l'étoile avec l'axe des trous.

$$\text{Différence de marche : } \delta = \underbrace{\frac{ax}{D}}_{\text{après les trous}} + \underbrace{\alpha a}_{\text{avant les trous}}$$

L'étoile peut être considérée fixe à l'échelle de la rotation propre de la Terre, de période $T = 24 \text{ h}$.

L'angle α varie de $\alpha(t) = \Omega_T t = \frac{2\pi}{T}t$.

$$\text{Ainsi } \delta = \frac{ax}{D} + \frac{2\pi}{T}ta$$

En un point x de l'écran, quand une frange défile, δ varie d'une longueur d'onde. En notant τ la période de défilement : $\Delta(\delta) = \frac{2\pi}{T}a\tau = \lambda$

$$\text{Soit } \tau = \frac{\lambda T}{2\pi a}$$

$$\text{Avec } a = 1 \text{ mm : } \tau = 7,6 \text{ s}$$

Exercice n°9 Interférences en lumière blanche

On réalise une expérience des trous d'Young en lumière blanche : les deux trous sont séparés d'une distance $a = 1,5 \text{ mm}$, et l'écran est placé à $D = 1,5 \text{ m}$ du plan des trous.

On perce un trou dans l'écran à 5 mm au-dessus de l'axe médiateur des deux trous d'Young, et on place derrière un prisme.

Combien peut-on observer de cannelures dans le spectre formé derrière le prisme ?

Solution: Au niveau du trou percé dans l'écran (avec $x = 1,5 \text{ mm}$, la différence de marche est $\delta = \frac{ax}{D}$, et l'ordre d'interférence $p = \frac{ax}{D\lambda}$

Les cannelures sont obtenues pour les longueurs d'onde dans le visible pour p demi-entier :

$$\lambda_b = 400 \text{ nm} < \lambda < \lambda_r = 800 \text{ nm}$$

$$\lambda_b \leq \frac{ax}{Dp} \leq \lambda_r$$

$$\frac{ax}{D\lambda_r} \leq p \leq \frac{ax}{D\lambda_b}$$

$$6,25 \leq p \leq 12,5$$

Il y aura interférences destructives, et donc des cannelures pour les demi-entiers compris entre 6,5 et 12,5 inclus, ce qui représente 7 cannelures.