

III Révisions d'optique géométrique de PCSI

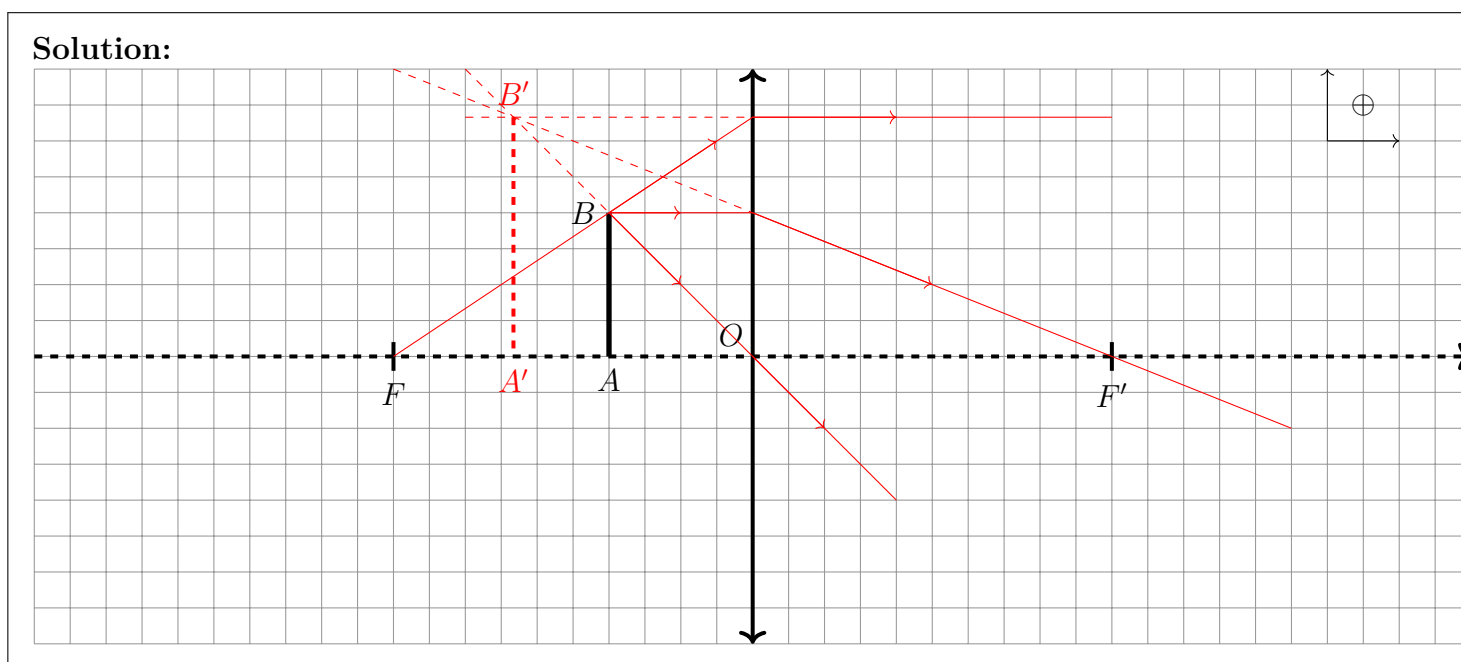
Exercice n°5 Tracés d'images

💡 Méthode – Tracés en optique

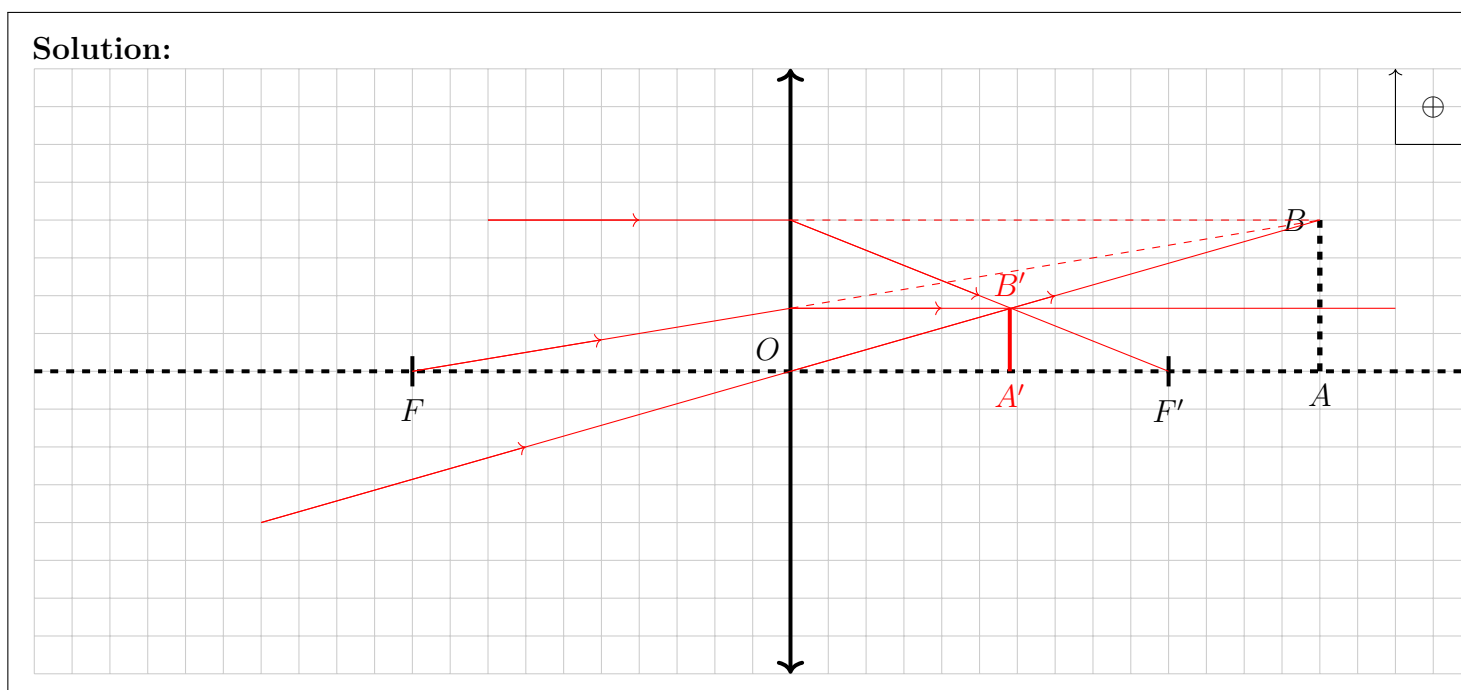
- Les rayons doivent être tracés à la règle, avec un stylo (ou feutre fin) de couleur différente.
- Les rayons doivent être orientés par une **flèche**.
- Les rayons incidents et les rayons émergents sont tracés en **traits pleins**, avec une **flèche dessus**.
- Les **prolongements** des rayons incidents / émergents sont tracés en **traits pointillés**.

Tracer les rayons pour déterminer la position de l'image dans les cas suivants :

R1. Objet réel situé entre F et O d'une lentille convergente.

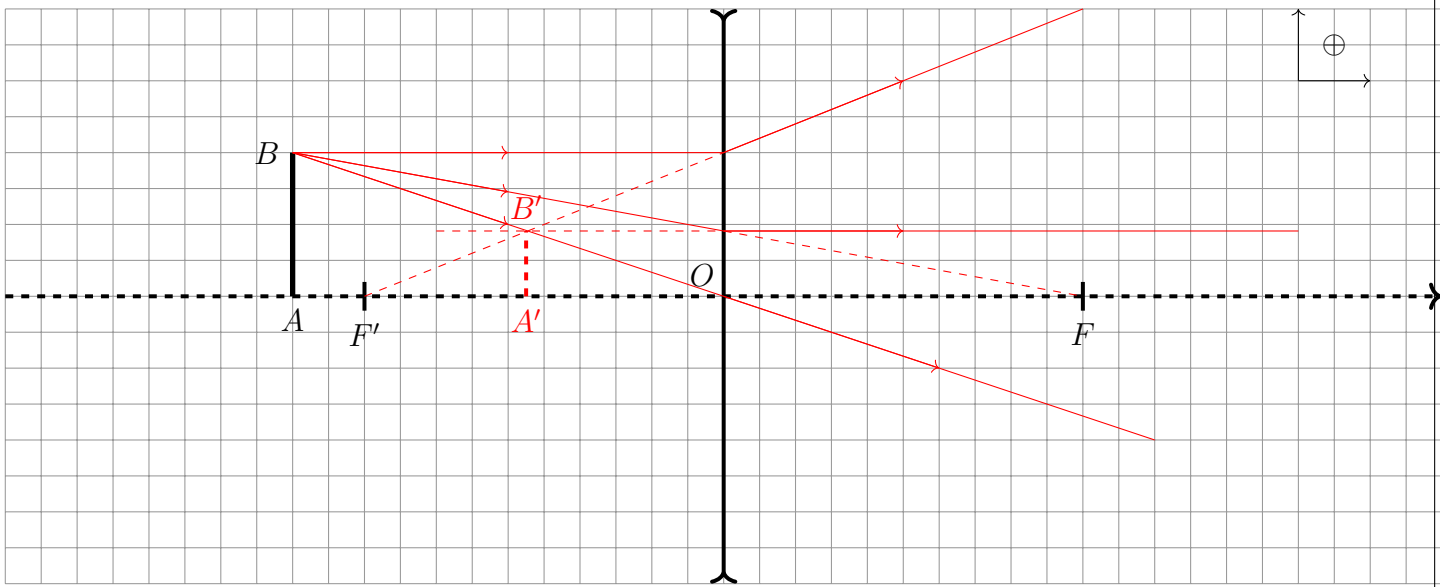


R2. Objet virtuel avec une lentille convergente.



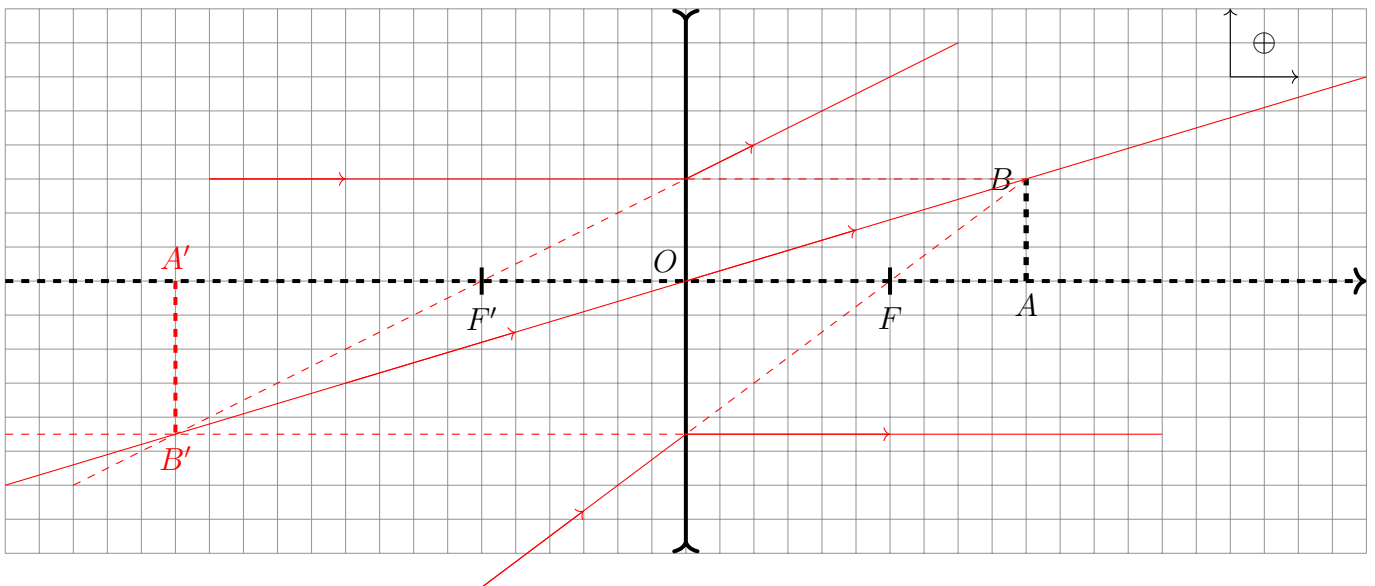
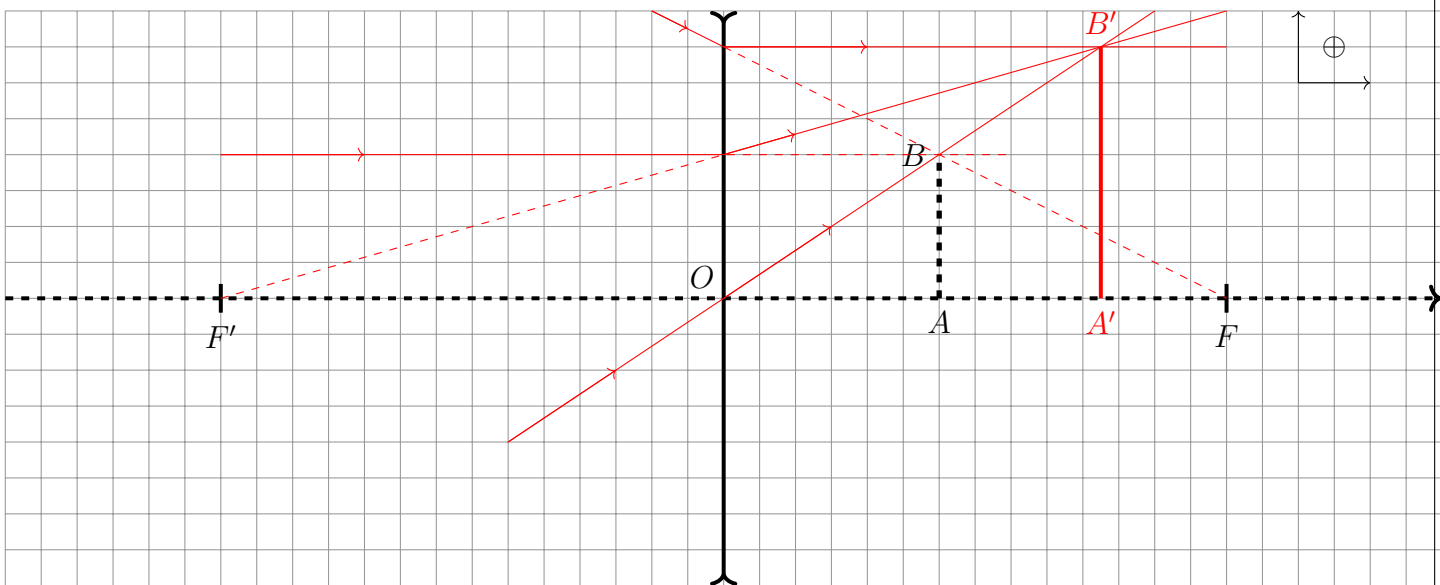
R3. Objet réel avec une lentille divergente.

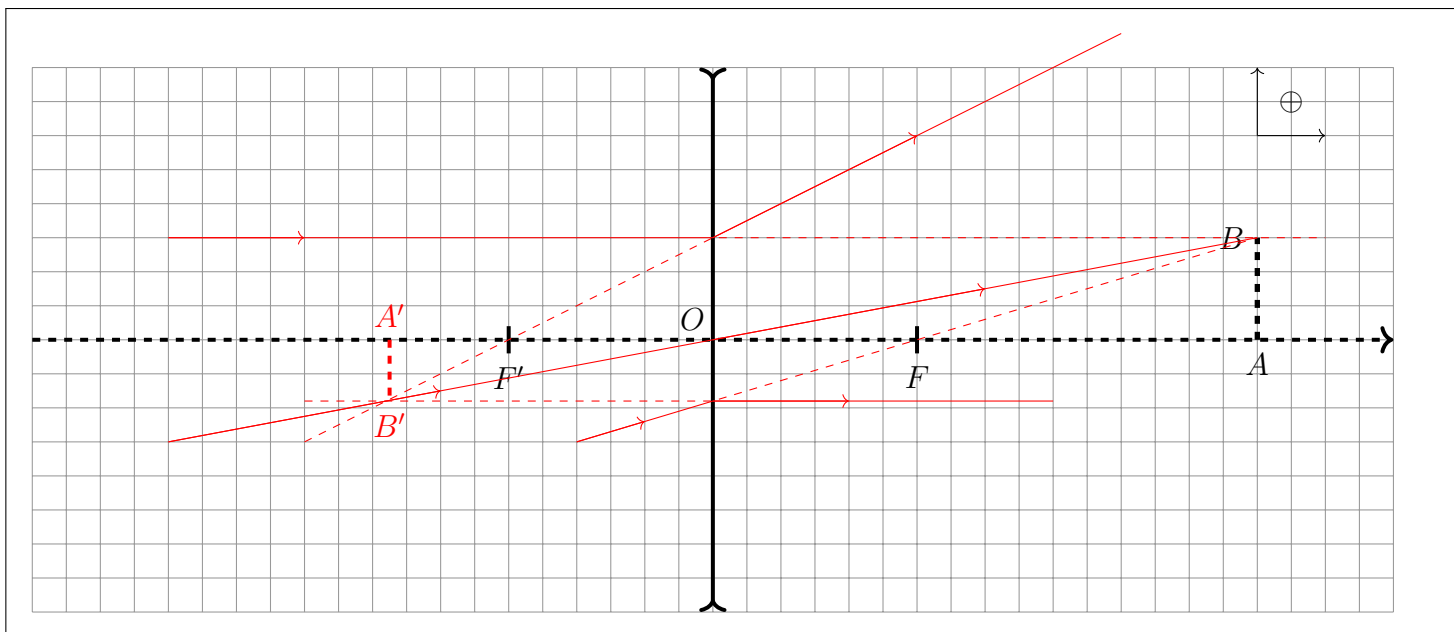
Solution:



R4. Objet virtuel avec une lentille divergente.

Solution:

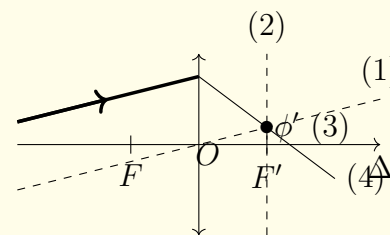




💡 Méthode — Construction du cheminement d'un rayon incident quelconque

Si on a un rayon incident dont on souhaite tracer le rayon émergent :

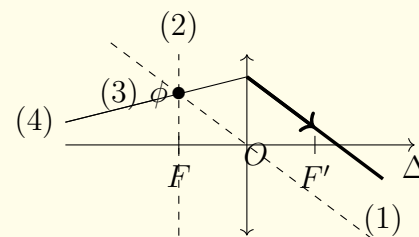
1. Tracer un rayon auxiliaire parallèle au rayon incident inconnu, passant par O .
2. Tracer le plan focal image.
3. Repérer l'intersection entre le rayon auxiliaire et le plan focal image, ce point est un foyer image secondaire ϕ' .
4. Le rayon incident inconnu et le rayon auxiliaire étant parallèle entre eux ils se croisent dans le plan focal image : au point ϕ' repéré précédemment. Il reste à tracer le rayon émergent issu du rayon incident passant par ce point ϕ' .



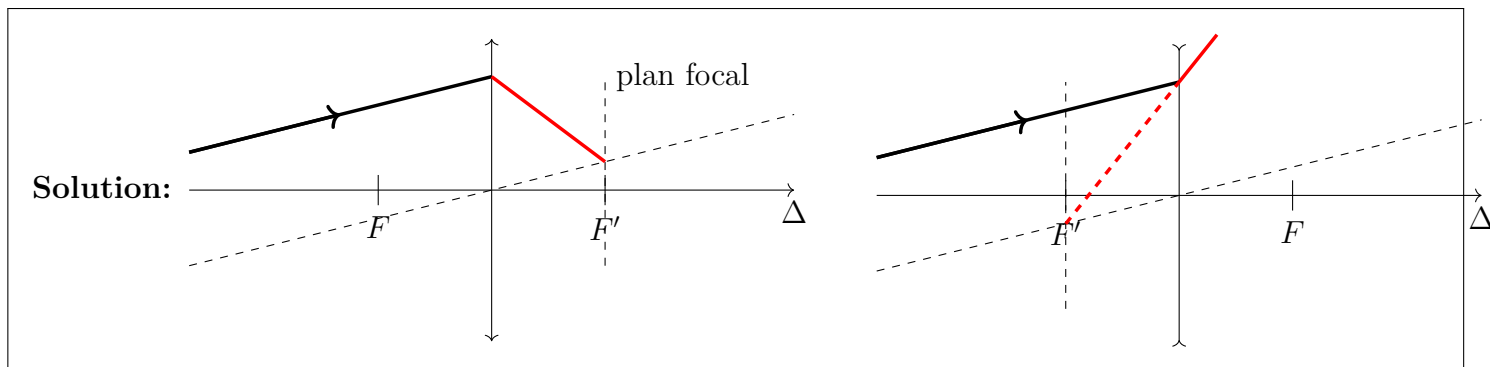
💡 Méthode — Construction du cheminement d'un rayon émergent quelconque

Si on a un rayon émergent dont on souhaite tracer le rayon incident qui lui a donné naissance :

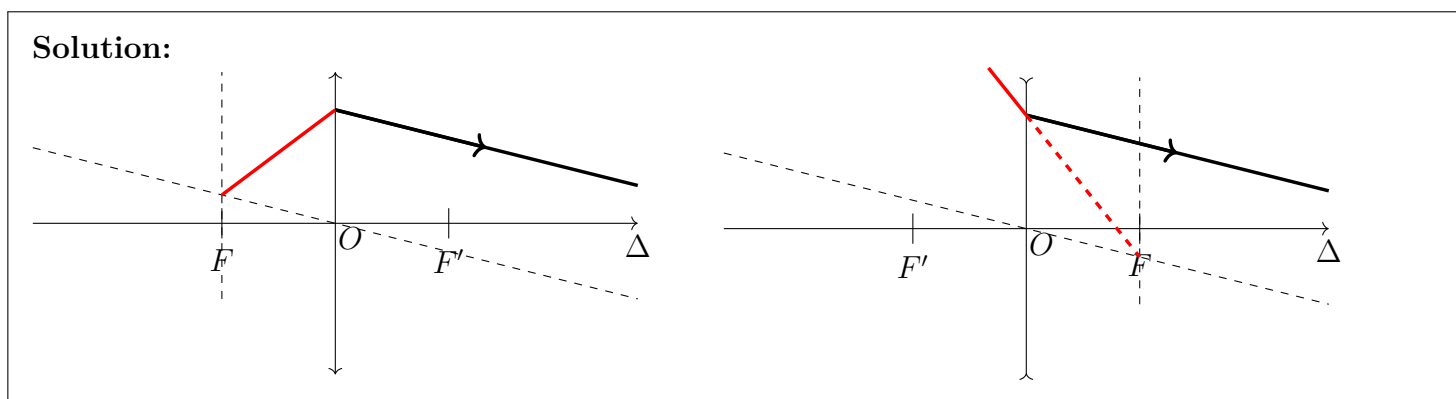
1. Tracer un rayon auxiliaire parallèle au rayon émergent inconnu, passant par O .
2. Tracer en pointillés le plan focal objet.
3. Repérer l'intersection entre le rayon auxiliaire et le plan focal objet, ce point est un foyer objet secondaire ϕ .
4. Le rayon émergent inconnu et le rayon auxiliaire émergent de la lentille parallèlement, donc ils proviennent d'un même plan focal objet : le foyer secondaire objet ϕ . Il reste à tracer le rayon incident passant par ce point objet ϕ qui donne le rayon émergent.



R5. Tracer les rayons émergents correspondant aux rayons incidents.



R6. Tracer les rayons incidents correspondant aux rayons émergents.



Exercice n°6 Loupe

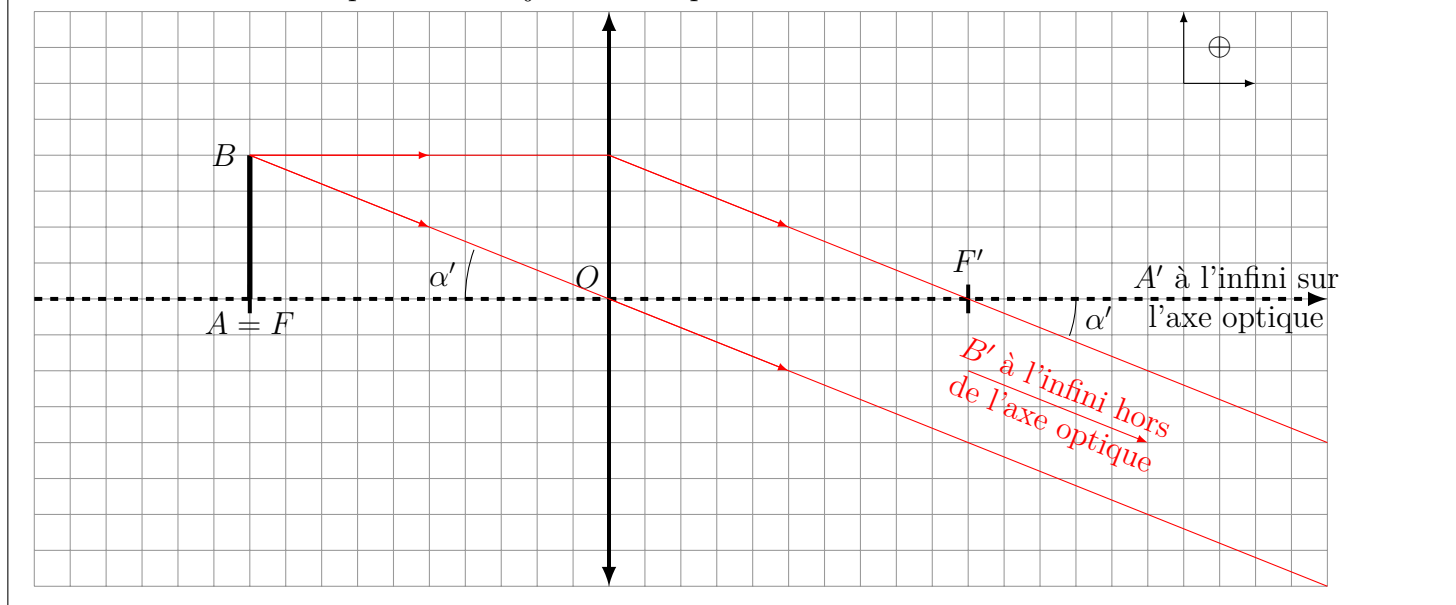
Une loupe est une lentille convergente de distance focale image f' . On l'utilise pour observer une image agrandie d'un objet **à travers la lentille**.

R1. De quelle nature (réelle/virtuelle) est l'image donnée par la loupe ?

Solution: L'image donnée par la loupe ne peut pas être projetée, elle est virtuelle.

R2. Pour observer l'image de l'objet sans fatigue, où doit-elle se former ? Où doit être placé l'objet par rapport à la lentille pour qu'il en soit ainsi ? Faire un schéma dans cette situation.

Solution: Pour observer l'image de l'objet sans fatigue, elle doit se former à l'infini. Pour cela l'objet doit se trouver dans le plan focal objet de la loupe.



On définit le grossissement commercial par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$, où α est l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu observé au punctum proximum ($d_m = 25$ cm), et α' l'angle sous lequel est vue l'image observée à travers la loupe. Les angles sont orientés à partir de l'axe optique.

R3. Exprimer le grossissement commercial de la loupe en fonction de f' et d_m . Faire l'application numérique pour $V = 10 \delta$.

Solution:

Dans OAB rectangle en A : $\tan(\alpha') = \frac{AB}{f'}$

Dans les conditions de Gauss, $\tan(\alpha') \approx \alpha'$, ainsi $\alpha' \approx \frac{AB}{f'}$

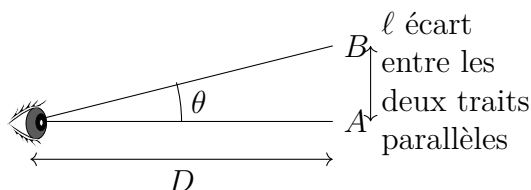
En l'observant à l'œil nu, au PP : $\tan(\alpha) = \frac{AB}{d_m}$, avec la même approximation.

Ainsi $G = \frac{d_m}{f'}$

$G = d_m V = 25 \cdot 10^{-2} \times 10 = 2,5$ $\triangleq$ attention aux unités !

R4. Quel est le pouvoir de résolution de l'œil dans de bonnes conditions d'éclairement ? Déterminer la taille du plus petit objet que peut distinguer un œil normal qui accommode au maximum.

Solution:



Le plus petit détail est discernable lorsque l'observation se fait au punctum proximum.

$$\ell_{\min} = d_m \alpha = 0,0075 \text{ cm} = 75 \mu\text{m}$$

R5. Donner la taille du plus petit objet que peut distinguer un œil normal en utilisant la loupe sans accommoder.

Solution: À travers la loupe, l'image est vue sous l'angle $\alpha' = G\alpha = G \frac{\ell}{d_m}$, qui doit être supérieur à $\varepsilon = 1'$

Ainsi $\ell > \frac{d_m \varepsilon}{G} = 30 \mu\text{m}$

R6. Déterminer la position de l'objet pour laquelle l'œil accommode au maximum en l'observant à travers la loupe. On supposera l'œil au foyer principal image de la lentille.

Solution: L'image se trouve alors au punctum proximum, donc $\overline{F'A'} = -d_m$

D'après la relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} = -\frac{f'^2}{\overline{F'A'}} = \frac{f'^2}{d_m} = 4 \text{ cm}$, soit $\overline{OA} = -6 \text{ cm}$

Exercice n°7 Lunette de Galilée

Mars est située à une distance variant entre 56 et 160 millions de kilomètres de la Terre. Son diamètre vaut 6800 km. On l'observe au travers d'une lunette de Galilée composée d'un objectif et d'un oculaire. Ces deux systèmes optiques complexes peuvent être modélisés par deux lentilles minces la première (l'objectif) de focale 1,0 m et la seconde (l'oculaire) de focale $-2,5$ cm.

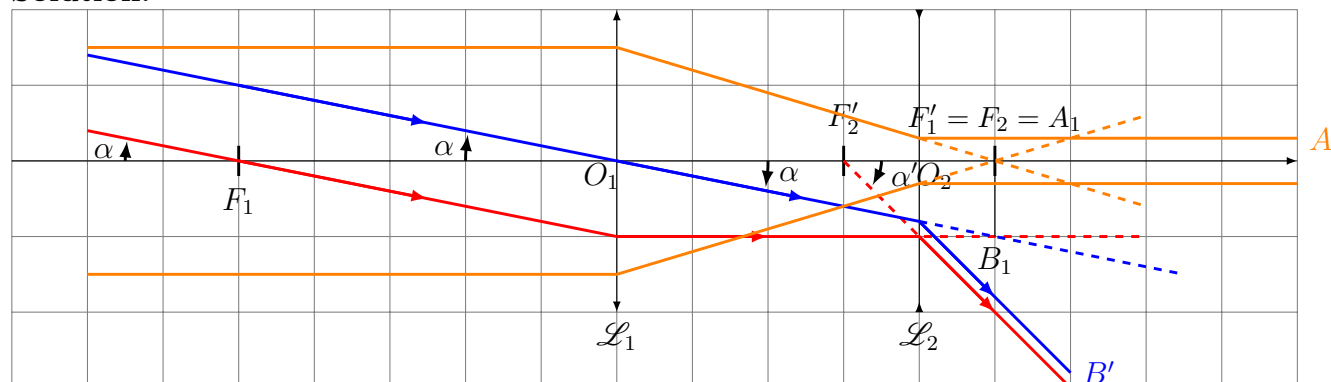
- R1. Comment doivent être positionnées les deux lentilles l'une par rapport à l'autre pour pouvoir l'utiliser sans fatigue ? Faire un schéma en positionnant les lentilles convenablement (attention l'oculaire est divergent).

Solution: Ainsi l'image intermédiaire se forme dans le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ et doit se situer dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_2$, donc le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ doit être confondu avec le plan focal objet de $\mathcal{L}_2$.

Mars est assimilé à un objet AB situé à l'infini, où A est sur l'axe optique.

- R2. Faire le tracer de deux rayons lumineux issus de B à travers la lunette : commencer par celui passant par F_1 , puis un autre au choix. L'image finale apparaît-elle dans le même sens que l'objet pour l'observateur ?

Solution:



On appelle grossissement de la lunette le rapport $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ où α' est le diamètre apparent sous lequel est vue Mars à travers la lunette, et α l'angle sous lequel est vue Mars sans lunette. Les angles sont orientés à partir de l'axe optique.

- R3. Établir l'expression du grossissement en fonction des distances focales de l'objectif et de l'oculaire. Le calculer.

Solution:

Dans le triangle $O_2A_1A_2$ rectangle en F_2 : $\tan(\alpha') = \frac{\overline{A_1A_2}}{-f_2'} < 0$ ($f_2' < 0$)

Dans le triangle $O_1A_1'A_1$ rectangle en F_1' : $\tan(\alpha) = \frac{\overline{A_1A_2}}{f_1'} < 0$

Dans les conditions de Gauss, les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique, donc $\theta \ll 1$ rad et $\alpha' \ll 1$ rad, ainsi $\tan(\alpha) \approx \alpha$ et de même pour α' .

Ainsi $\alpha \approx -\frac{\overline{A_1A_2}}{f_2'}$ et $\alpha' \approx \frac{\overline{A_1A_2}}{f_1'}$

Le grossissement s'exprime alors selon $G = -\frac{f_2'}{f_1'} = 40 > 0$

- R4. On appelle diamètre apparent l'angle sous lequel est vu un objet. Calculer le diamètre apparent α de la planète Mars lorsqu'elle est observée sans lunette, lorsqu'elle est au plus proche de la Terre. Est-il possible de voir à l'œil nu la surface de Mars ?

Solution: Au plus près de la Terre, on voit Mars à l'œil nu sous l'angle α , tel que $\tan(\alpha) = \frac{D_M}{D_{TM}}$. Or $\alpha \ll 1$ rad, donc $\tan \alpha \approx \alpha$.

Ainsi $\alpha \approx \frac{D_M}{D_{TM}} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ ce qui est inférieur à la limite de résolution angulaire : la surface de Mars n'est pas visible à l'œil nu.

R5. Sous quel angle Mars est-elle perçue à travers la lunette lorsqu'elle est au plus proche ? Est-il cette fois-ci possible de distinguer sa surface ?

Solution: L'angle sous lequel est vu Mars est $\alpha' = G \times \alpha = 4,84 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ ce qui est distinguable.

Exercice n°8 Microscope optique (Banque PT 2017)

Le microscope est modélisé, par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille $\mathcal{L}_1$ de centre O_1 et de distance focale image $f'_1 = 5 \text{ mm}$), et l'autre constituant l'oculaire (lentille $\mathcal{L}_2$ de centre O_2 et de distance focale image $f'_2 = 15 \text{ mm}$).

On fixe $\overline{O_1 O_2} = D_0 = 120 \text{ mm}$. On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.

R1. Donner les 2 conditions que doivent satisfaire les rayons lumineux pour être dans les conditions de Gauss.

Solution: Les rayons lumineux satisfont les conditions de Gauss s'ils sont peu inclinés par rapport à l'axe optique et peu éloignés. On dit qu'ils sont paraxiaux.

R2. Si F'_1 est le foyer principal image de $\mathcal{L}_1$ et F_2 le foyer principal objet de $\mathcal{L}_2$, on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$. Exprimer Δ en fonction de f'_1 , f'_2 , D_0 , puis calculer sa valeur.

Solution: En utilisant la relation de Chasles : $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = \overline{F'_1 O_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2}$, soit avec la définition de la distance focale : $\Delta = -f'_1 + D_0 - f'_2$

A.N. $\Delta = 100 \text{ mm}$

Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d de $\mathcal{L}_1$, à sa gauche, de façon à ce que l'image $A'B'$ donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

R3. En utilisant une relation de conjugaison judicieusement choisie, exprimer d en fonction de f'_1 et Δ , puis calculer sa valeur.

Solution:

Appliquons la relation de conjugaison de Newton à $\mathcal{L}_1$ pour les points conjugués $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A' = F_2$: $\overline{F_1 A} \times \overline{F'_1 A'} = -f_1'^2$, or A' est en F_2 .

Ainsi $\overline{F_1 A} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F'_1 F_2}}$, avec $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ et $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 A} = -f'_1 + \overline{F_1 A}$

Ainsi $\overline{O_1 A} = -f'_1 + \frac{-f_1'^2}{\Delta} < 0$

$$d = -\overline{O_1 A} = f'_1 + \frac{f_1'^2}{\Delta}$$

A.N. $d = 5 + \frac{5^2}{100} = 5 + \frac{25}{100} = 5 + 0,25 = 5,25 \text{ mm}$

R4. Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f'_1 et Δ puis calculer sa valeur.

Solution: Le grandissement γ_1 induit par l'objectif s'exprime facilement à l'aide de la relation de Newton :

$$\gamma_1 = \frac{F'_1 A'}{-f'_1} = -\frac{\Delta}{f'_1} \quad \text{A.N. } \gamma_1 = -20 < 0 : \text{l'image intermédiaire est 20 fois plus grande que l'objet et inversée.}$$

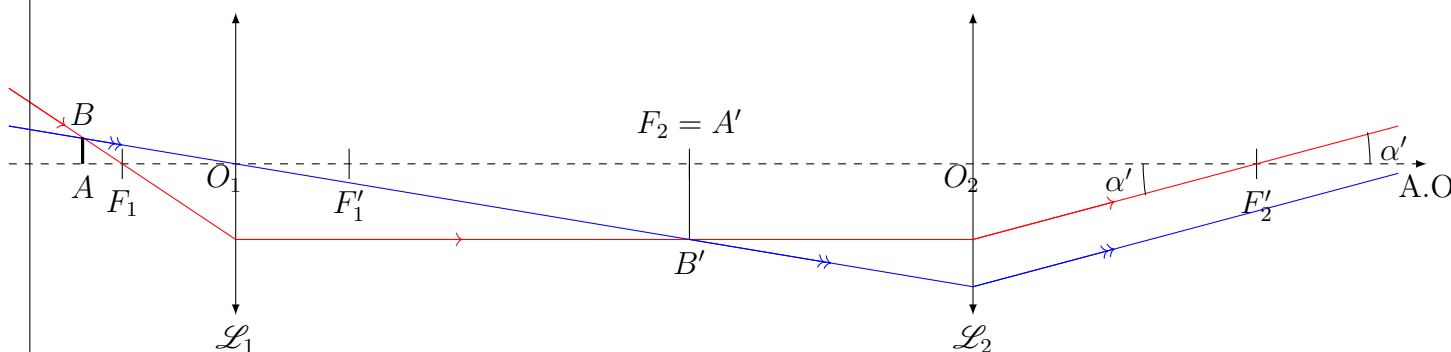
R5. Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet ?

Solution: Cette position de l'objet permet à l'image intermédiaire de se former dans le plan focal de l'oculaire, ce qui permet à l'image finale de se former à l'infini. L'œil observant l'image finale le fait sans fatigue car sans accommodation.

R6. Faire une construction géométrique faisant apparaître l'objet, l'image intermédiaire, ainsi que l'angle α' sous lequel est observée l'image finale à travers le microscope.

Solution: Tracé des rayons :

- Commencer par placer les foyers et l'image intermédiaire, puis remonter jusqu'à l'objet.
- Commencer par tracer le rayon passant par F_1 , il est parallèle à l'axe optique entre les deux lentilles et peut être tracé entièrement dès le début. (C'est le seul qui peut être tracé entièrement sans avoir besoin d'un rayon auxiliaire).



Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right|$ où α est l'angle sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu placé à une distance $D = 250$ mm.

L'objet étant de très petite taille, ces deux angles seront bien sûr très faibles.

R7. Exprimer l'angle α' sous lequel est vue l'image à travers le microscope en fonction de $A'B'$ et f'_2 , puis en fonction de γ_1 , AB et f'_2 .

Solution: L'angle α' est l'angle sous lequel est vue l'image à travers le microscope :

$$\tan(\alpha') = \frac{A'B'}{f'_2}, \text{ or } A'B' = |\gamma_1|AB, \text{ donc } \tan(\alpha') = \frac{|\gamma_1|AB}{f'_2}$$

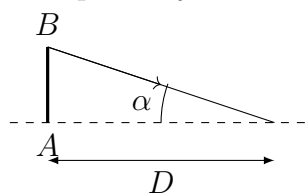
Or $\alpha' \ll 1$ rad, donc $\tan(\alpha') \approx \alpha'$. Ainsi :

$$\alpha' \approx \frac{|\gamma_1|AB}{f'_2}$$

R8. Exprimer l'angle α en fonction de D et AB .

Solution:

Lorsque l'objet est vu à l'œil nu :



$$\tan(\alpha) = \frac{AB}{D}$$

Or $\tan(\alpha) \approx \alpha$ donc $\alpha \approx \frac{AB}{D}$

R9. En déduire l'expression de G en fonction de Δ , D , f'_1 et f'_2 , puis calculer sa valeur.

Solution:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\alpha'}{\alpha} \\ &= \frac{|\gamma_1|AB}{f'_2} \times \frac{D}{AB} \\ &= \frac{|\gamma_1|D}{f'_2} \\ &= \frac{\Delta D}{f'_1 f'_2} \end{aligned}$$

Soit $G = \frac{\Delta D}{f'_1 f'_2}$

A.N. : $G = \frac{1}{3} \cdot 10^3 = 3,3 \cdot 10^2$

On utilise ce microscope pour mesurer l'épaisseur e d'une mince lame de verre à faces parallèles, d'indice $n = 1,5$. On colle une petite pastille bleue (B) sur la face gauche de la lame et une petite pastille rouge (R) sur sa face droite.

On positionne d'abord la lunette (ensemble objectif+oculaire) du microscope de façon à faire la mise au point sur la pastille rouge (Figure 1, Position 1). Puis, grâce à une vis micrométrique, on translate la lunette d'une distance ε , de façon à faire la mise au point sur l'image de la pastille bleue (Figure 1, Position 2). On mesure $\varepsilon = 420 \mu\text{m}$.

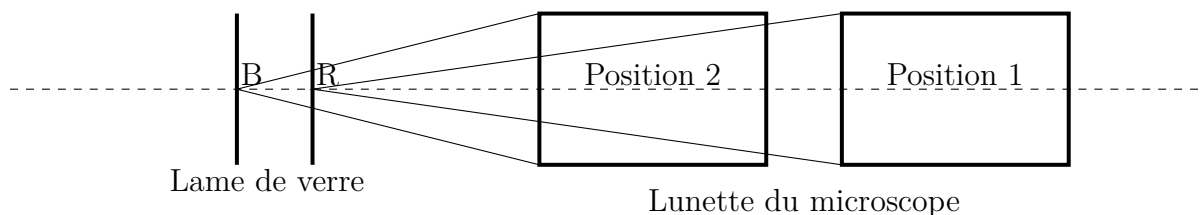


FIGURE 1 – Schéma du principe de la mesure de e

R10. 🎵 🎵 En tenant compte du phénomène de réfraction et en considérant les rayons lumineux très peu inclinés par rapport à l'axe optique, exprimer e en fonction de n et ε , puis calculer sa valeur.

Solution: La pastille est vue nette à travers le microscope si elle se trouve à la distance d de l'objectif.

Les rayons issus de la pastille rouge arrivent directement sur le microscope et ne subissent aucune déviation.

Les rayons issus de la pastille bleue traversent la lame de verre, commençons par déterminer l'image B' de la pastille bleue par la lame de verre, B' jouera le rôle d'objet pour le microscope et devra se trouver à la distance d de l'objectif pour que son image par le microscope soit vue nette.

Dans le triangle BRH rectangle en H : $\tan(i) = \frac{RH}{BR}$

Dans le triangle $B'RH$ rectangle en H : $\tan(i') = \frac{RH}{B'R}$

Dans le cadre des conditions de Gauss : $i \ll 1$ rad et $i' \ll 1$ rad, donc $\tan(i) \approx i$.

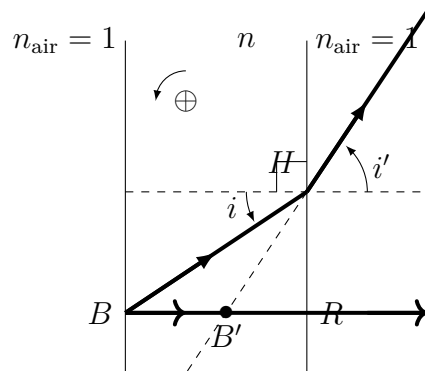
Soit $B'R \approx BR \frac{i}{i'}$

D'après la loi de Snell-Descartes en H : $n \sin(i) = \sin(i')$, dans le cadre des conditions de Gauss, elle devient : $ni \approx i'$

Avec $BR = e$, la largeur de la lame, on en déduit que $B'R \approx e \times \frac{1}{n}$

Cette distance doit correspondre à la distance dont on a déplacé le microscope pour voir la pastille bleue puis rouge nette. Ainsi l'épaisseur de la lame est donnée par $e = n\varepsilon$

A.N. : $e = 630 \mu\text{m}$



Exercice n°9 Réfractomètre

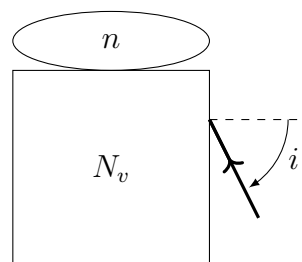
Les viticulteurs ont besoin de connaître de façon précise, le taux de sucre présent dans le raisin qu'ils vendangent.

L'indice de réfraction du jus de fruit dépend du taux de sucre qu'il contient.

Le montage suivant illustre le principe du réfractomètre utilisé.

Une goutte de jus de raisin d'indice n inconnu est déposée sur un bloc de verre transparent d'indice $N_v = 1,607$.

L'ensemble est éclairé par un faisceau de lumière parallèle qui tombe sur la face d'entrée du cube sous une incidence ajustable i entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



R1. À quelle condition sur les indices peut-on observer un phénomène réflexion totale sur le dioptré verre/goutte ?

Solution: Pour qu'il se produise une réflexion totale, il faut que $N_v > n$.

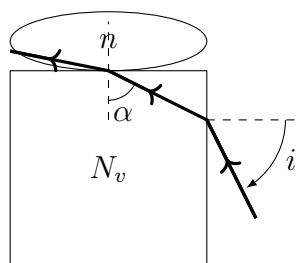
R2. Dessiner le trajet du rayon lumineux dans le cas où le rayon est réfracté dans le liquide. Dans ce cas, la goutte de vin apparaît particulièrement lumineuse.

Solution:  **Faites un grand schéma sur lequel vous définissez les angles nécessaires.**

À l'entrée du verre, $N_v > 1$, donc le rayon réfracté existe toujours et se rapproche de la normale.

Le rayon réfracté dans la goutte s'éloigne de la normale.

Quand la goutte apparaît lumineuse, c'est qu'elle est traversée par des rayons lumineux, et donc il y a réfraction dans la goutte de vin et non réflexion totale.



On constate que la goutte de vin n'est lumineuse que lorsque $i > i_{\text{lim}}$.

R3. Exprimer i_{lim} en fonction de N_v et n .

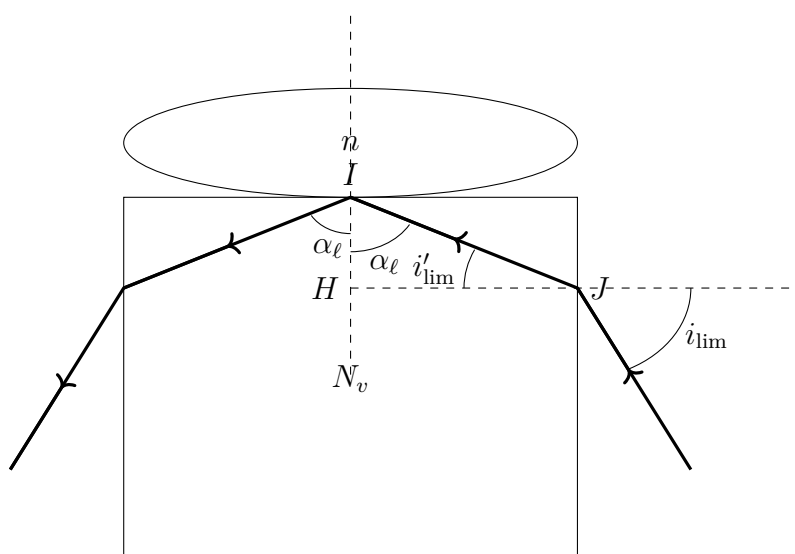
On pourra utiliser le fait que, pour $x \in [-1, 1]$: $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ et/ou $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solution:  Attention au choix des notations : i et i_{lim} sont déjà définis dans l'énoncé. i est l'angle d'incidence à l'entrée du bloc de verre, i_{lim} est la valeur limite de i au-dessus de laquelle il y aura réfraction et non réflexion totale. Ces angles NE SONT PAS définis sur le dioptre verre/goutte, il faut donner d'autre nom.

À la limite de la réflexion totale au niveau du dioptre goutte/verre, d'après la loi de Snell-Descartes :

$$N_v \sin(\alpha_\ell) = n \sin(\pi/2)$$

Soit $\sin(\alpha_\ell) = \frac{n}{N_v}$, donc $\alpha_\ell = \arcsin\left(\frac{n}{N_v}\right)$



- dans le triangle HIJ rectangle en H , $i'_{\text{lim}} + \alpha_\ell + \frac{\pi}{2} = \pi$, soit $i'_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_\ell$
- D'après la loi de Snell-Descartes en J : $N_v \sin(i'_{\text{lim}}) = \sin(i_{\text{lim}})$

En combinant ces trois relations on peut déterminer une relation entre i_{lim} , N_v et n à la limite de la réflexion/réfraction.

$$\begin{aligned} N_v \sin(i'_{\text{lim}}) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\ N_v \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_\ell\right) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\ N_v \cos(\alpha_\ell) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\ N_v \cos\left(\arcsin\left(\frac{n}{N_v}\right)\right) &= \sin(i_{\text{lim}}) \\ N_v \sqrt{1 - \frac{n^2}{N_v^2}} &= \sin(i_{\text{lim}}) \\ \sqrt{N_v^2 - n^2} &= \sin(i_{\text{lim}}) \end{aligned}$$

D'où $i_{\text{lim}} = \arcsin(\sqrt{N_v^2 - n^2})$

R4. Calculer l'indice de réfraction du vin pour $i_{\text{lim}} = 47,81^\circ$.

Solution: repartons de :

$$\begin{aligned}\sqrt{N_v^2 - n^2} &= \sin(i_{\text{lim}}) \\ N_v^2 - n^2 &= \sin^2(i_{\text{lim}}) \\ n^2 &= N_v^2 - \sin^2(i_{\text{lim}})\end{aligned}$$

D'où $n = \sqrt{N_v^2 - \sin^2(i_{\text{lim}})}$

A.N. : $n = 1,426$ **Sans unité !**