

Optique TD n°04 Interférences à N ondes – Réseau – Corrigé

I Exercices d'application

Exercice n°1 Spectrométrie à réseau 🎵

On souhaite déterminer la longueur d'onde λ d'une raie du cadmium avec un réseau comptant $n = 500$ traits par millimètre.

R1. Décrire un montage expérimental simple pour déterminer cette longueur d'onde.

Solution: Goniomètre!

R2. Établir la relation fondamentale des réseaux.

Solution: Cf cours : suivre démo 1 + démo 2 (bien rédiger comme je l'ai écrit dans le cours)

R3. On se place en incidence normale. On observe l'ordre -2 et l'ordre 2 séparés d'un angle $\alpha = 61^\circ 9'$, où $1' = 1/60^\circ$.

Déterminer λ . De quelle couleur est cette raie?

Solution:

En incidence normale, $\theta_0 = 0^\circ$, donc la relation fondamentale des réseaux devient $\sin(\theta_p) = p \frac{\lambda}{a}$

À l'ordre $p = \pm 2$: $\sin(\theta_p) = \pm 2 \frac{\lambda}{a}$, les directions des maxima sont symétriques par rapport à la direction du faisceau incident, donc $\theta_2 = -\theta_{-2} = \frac{\alpha}{2}$

Ainsi $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \frac{\lambda}{a}$

Soit $\lambda = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, avec $\alpha = 61 + \frac{9}{60}^\circ$ et $a = \frac{1}{n} = 2.10^{-3}$ mm, soit $\lambda = 514$ nm : raie verte.

Exercice n°2 Étalonnage d'un réseau 🎵

Un réseau est éclairé en incidence quasi-normale par une source de longueur d'onde $\lambda = 435$ nm. On lit sur le vernier d'un goniomètre la position de la lunette pour différents ordres.

p	-2	-1	1	2
α_p	$23^\circ 23'$	$42^\circ 38'$	$77^\circ 20'$	$96^\circ 40'$

R1. Rappeler la formule des réseaux et l'expliquer qualitativement.

Solution: En notant θ_0 l'angle d'incidence sur le réseau par rapport à la normale, et θ_p l'angle par rapport à la normale dans la direction dans laquelle on observe les interférences constructives.

$a(\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0)) = p\lambda$, avec $p \in \mathbb{Z}$

Elle donne les directions θ_p des maxima d'intensité, donc les directions dans lesquelles les ondes interfèrent constructivement.

R2. Le réseau est-il bien éclairé en incidence normale ?

Solution: En incidence normale, l'angle d'incidence il faut donc regarder si $\sin(\alpha_p)$ est bien proportionnel à p (λ et a sont des constantes), soit si $\frac{\sin(\alpha_p)}{p}$ est bien une constante.

p	-2	-1	1	2
α_p	$23^\circ 23'$	$42^\circ 38'$	$77^\circ 20'$	$96^\circ 40'$
$\frac{\sin(\alpha_p)}{p}$	-0,1984	-0,67666	0,97	0,4966
θ_p	-36,6167	-17,367	17,333	36,667
$\sin(\theta)/p$	0.29822919	0.29848559	0.29793028	0.2985793

Le réseau n'est donc pas en incidence normale ...

OU (et c'est le plus probable...) : le réseau est bien en incidence normale, mais le 0 du vernier n'est pas selon la direction du faisceau incident, et les angles α_p fournis ici ne sont pas mesurés à partir de la normale.

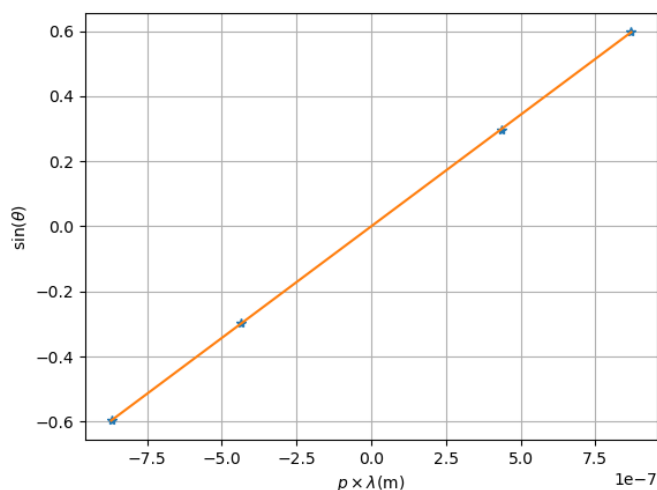
Les ordres symétriques doivent être symétriques par rapport à l'angle $\theta_0 = 0$.

L'angle α_0 de la direction incidente est donc $\alpha_0 = \frac{\alpha_{-1} + \alpha_1}{2} = \frac{\alpha_{-2} + \alpha_2}{2} \approx 60^\circ$ (la direction incidente est la bissectrice des ordres p et $-p$).

Alors il faut considérer : $\theta_p = \alpha_p - \alpha_0$.

En faisant cela, on obtient bien une droite !

Donc le réseau était bien en incidence normale, mais pas par rapport à $\alpha = 0$...



R3. Calculer le pas du réseau et le nombre de traits par millimètre.

Solution: On peut effectuer la régression linéaire pour tracer $\sin(\alpha_p)$ en fonction de $p\lambda$: c'est une droite d'ordonnée à l'origine 0 et de pente $\frac{1}{a}$.

La régression donne : $\frac{1}{a} = 685896$ traits/m, soit $a = 1,46 \mu\text{m}$.

R4. On éclaire le réseau en incidence normale par une source de longueur d'onde λ' . Pour l'ordre 2 on relève $\alpha'_2 = 108^\circ 30'$.

Déterminer λ' .

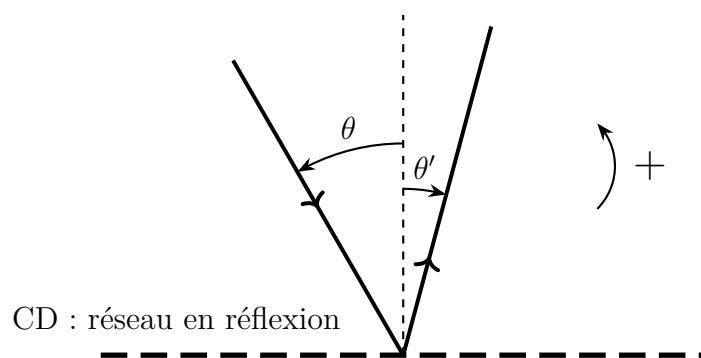
Solution: Calculons $\sin(\theta_2) = \sin(\alpha_2 - 60) = 0,748955$, à l'aide de la régression linéaire : $\lambda_2 = \frac{a \sin(\theta_2)}{2} = 546 \text{ nm}$: c'est du vert ! (le doublet vert du mercure).

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°3 CD 🎵 🎵

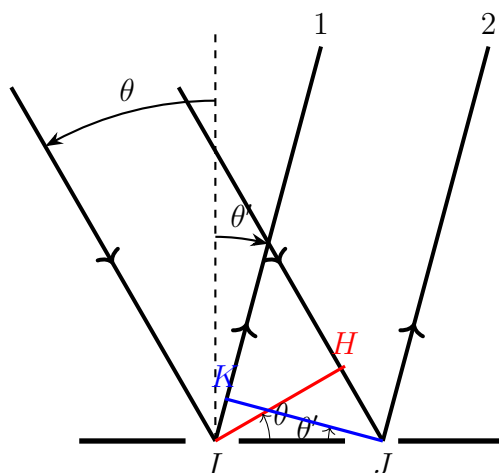
Sur la surface du disque compact (CD) est gravée une piste unique en forme de spirale de pas a . Cette surface peut être modélisée, localement, par un ensemble de N miroirs parallèles identiques entre eux, régulièrement espacés d'une distance a . L'indice de l'air est supposé confondu avec celui du vide.

Le faisceau lumineux incident est parallèle, monochromatique de longueur d'onde λ_0 faisant un angle d'incidence θ . On étudie les interférences en M à l'infini dans la direction inclinée de θ' par rapport à la normale.



R1. Par analogie avec le traitement effectué dans le cours, établir l'expression de la différence de marche entre deux rayons réfléchis par deux miroirs consécutifs.

Solution:



$$\begin{aligned} \delta_{2/1}(M) &= (SM)_2 - (SM)_1 \\ &= \cancel{(SH)} + (HJ) + \cancel{(JM)} - [\cancel{(SI)} + (IK) + \cancel{(KM)}] \\ &= (HJ) - (IK) \\ &= HJ - IK \end{aligned}$$

En effet H et I appartiennent au même plan d'onde relatif à la source S .

K et J appartiennent au même plan d'onde relatif à une source fictive placée en M , donc $(MK) = (MJ)$, d'après le principe du retour inverse de la lumière $(JM) = (KM)$.

Or $\sin(\theta) = \frac{HJ}{a}$, avec $\theta > 0$.

Et $\sin(\theta') = -\frac{IK}{a}$, avec $\theta' < 0$.

Ainsi $\boxed{\delta_{2/1}(M) = a(\sin(\theta) + \sin(\theta'))}$, elle est indépendante des deux miroirs consécutifs considérés, et est donc la même pour tous.

R2. En déduire la relation, faisant intervenir un entier relatif p , donnant les angles θ'_p repérant les directions dans lesquelles on trouve des franges brillantes (il s'agit de la relation fondamentale pour les réseaux par réflexion).

Solution: Les directions où se trouvent les franges brillantes sont celles dans lesquelles les N ondes issues des N réflexions interfèrent constructivement, soit $\delta_{2/1} = p\lambda_0$.

Soit $a(\sin(\theta) + \sin(\theta')) = p\lambda_0$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

R3. Commenter la direction de l'ordre 0.

Solution: L'ordre $p = 0$ est tel que $\sin(\theta) + \sin(\theta') = 0$, soit $\theta' = -\theta$: c'est la direction des rayons réfléchis donnés par la loi de Snell-Descartes de la réflexion. L'ordre 0 est l'image géométrique de la source

On réalise l'expérience suivante. Le disque compact est éclairé en incidence normale. On tourne ensuite le disque d'un angle α afin que le faisceau diffracté par le disque dans l'ordre $|p| = 1$ soit dirigé dans la direction du faisceau lumineux incident.

R4. 🎵 🎵 🎵 Établir la relation liant a , λ_0 et α .

Solution: Le rayon diffracté est confondu avec le rayon incident, donc $\theta' = \theta = \alpha$

Ainsi $2a \sin(\alpha) = \lambda_0$

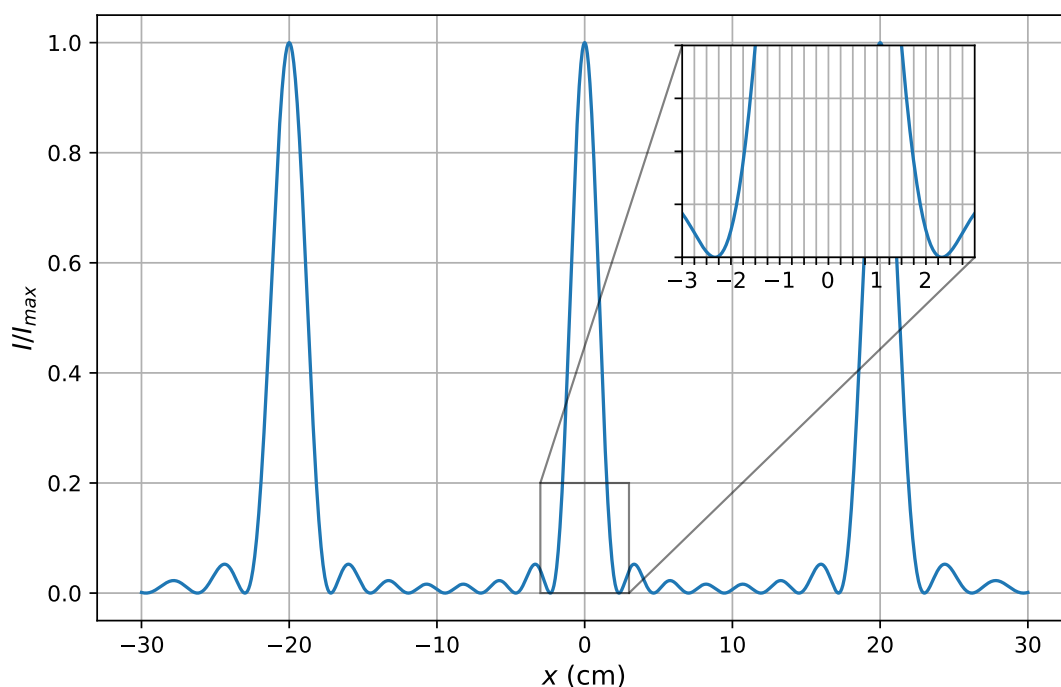
R5. Pour $\lambda_0 = 650,0$ nm, on mesure $\alpha = 12^\circ 40'$. En déduire une valeur numérique de a . Est-il possible d'observer la spirale gravée sur le disque à l'aide d'un microscope optique ?

Solution: $\alpha = 12 + \frac{40}{60}^\circ$

$a = \frac{\lambda_0}{2 \sin(\alpha)} = 1,48 \cdot 10^{-6}$ m , de l'ordre du micro-mètre c'est observable au microscope optique (à la limite de la résolution possible).

Exercice n°4 Nombre de fentes éclairées 🎵 🎵 🎵

Un réseau de pas a inconnu est éclairé par un faisceau de lumière parallèle issu d'une lampe à vapeur de mercure devant laquelle un filtre à 546 nm est placé. La source est placée au foyer principal objet d'une lentille mince convergente. L'intensité lumineuse est récupérée sur une barrette CCD placée dans le plan focal image d'une lentille mince convergente de distance focale $f' = 50$ cm :



Déterminer le pas du réseau et le nombre de fentes éclairées.

Solution:

- Pas du réseau ?

D'après la relation des réseaux donnant la direction θ des maxima d'intensité : $a(\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0)) = p\lambda_0$

Le réseau est utilisé en incidence normale donc $\theta_0 = 0$.

À l'ordre $p = +1$, l'intensité est maximale en $x_1 = 20$ cm, soit dans la direction θ_1 telle que $\tan(\theta_1) = \frac{x_1}{f'}$

$$\text{Ainsi } a = \frac{\lambda_0}{\sin(\theta_1)} = \frac{\lambda_0}{\sin\left(\arctan\left(\frac{x_1}{f'}\right)\right)} = 1,47 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

- Nombre de fentes éclairées ?

La demi-largeur des pics en déphasage vaut $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$.

Or la différence de marche vaut (en incidence normale) $\delta = a \sin(\theta)$, donc le déphase vaut $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times$

$$a \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times a \sin\left(\arctan\left(\frac{x_0}{f'}\right)\right), \text{ où } x_0 = 2,25 \text{ cm est l'annulation de l'intensité du pic central.}$$

$$\text{Ainsi } N = \frac{\lambda_0}{a \sin(\theta)} = \frac{\lambda_0}{a \sin\left(\arctan\left(\frac{x_0}{f'}\right)\right)} = 8,3, \text{ on peut supposer qu'il y avait 8 fentes éclairées.}$$