

Outils mathématiques pour la physique

Systèmes de coordonnées

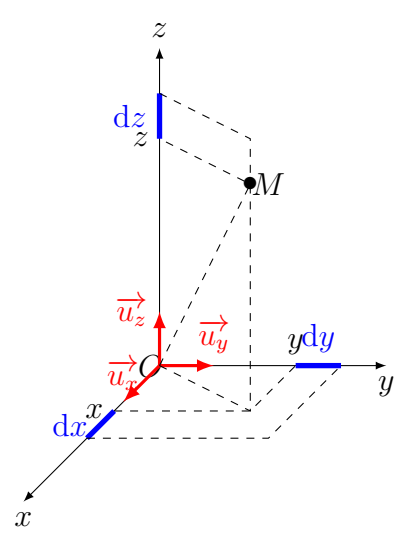
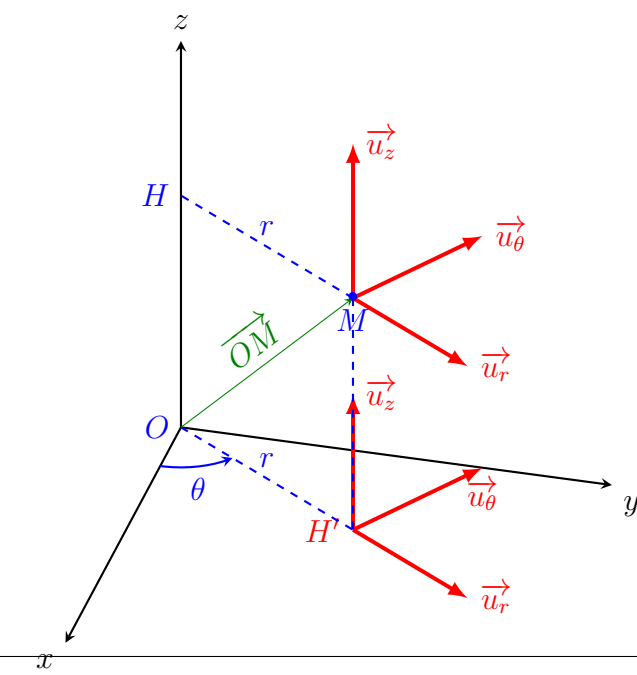
Calcul différentiel

Analyse vectorielle



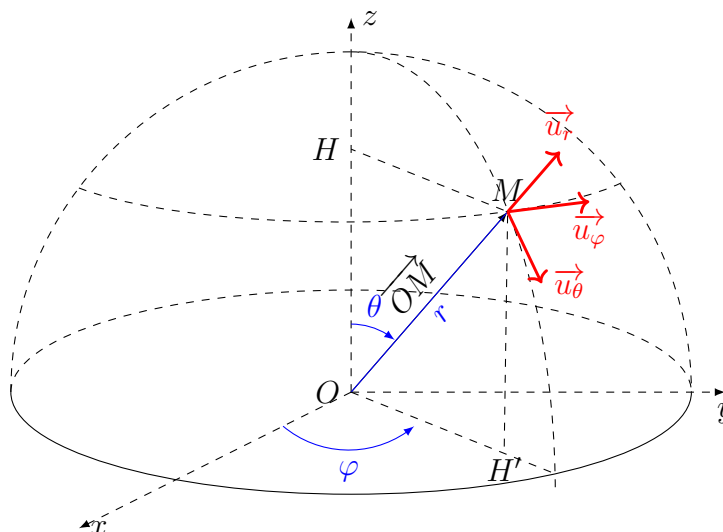
Outils mathématiques

Systèmes de coordonnées

	Système cartésien	Système cylindrique
Définition		
Coordonnées de M	(x, y, z)	(r, θ, z)
Base	$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ FIXE	$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ LOCALE
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$	$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
Vecteur déplacement élémentaire	$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$
Vecteurs surfaces	$d\vec{S} = dx dy \vec{u}_z$ $d\vec{S} = dx dz \vec{u}_y$ $d\vec{S} = dy dz \vec{u}_x$	$d\vec{S} = dr \times r d\theta \vec{u}_z$ $d\vec{S} = dr \times dz \vec{u}_\theta$
Élément de volume	$d\tau = dx dy dz$	$d\tau = r \times r d\theta \times dz$
Vecteur vitesse	$\vec{v}(M/\mathcal{R}, t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$	$\vec{v}(M/\mathcal{R}, t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
Vecteur accélération	$\vec{a}(M/\mathcal{R}, t) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$	$\vec{a}(M/\mathcal{R}, t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Système sphérique

Définition



Coordonnées de M

$$(r, \theta, \varphi)$$

Base

$$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi) \text{ LOCALE}$$

Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

Vecteur déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Vecteur surface

$$d\vec{S} = r d\theta \times r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_r$$

Élément de volume

$$d\tau = dr \times r d\theta \times r \sin(\theta) d\varphi$$

Vecteur vitesse

Vecteur accélération

Surfaces et volumes fondamentaux à connaître ♥♥

♥ À retenir –

- Périmètre d'un cercle de rayon R : $2\pi R$
- Périmètre d'un arc de cercle de rayon R d'angle θ : $R\theta$
- Surface d'un disque de rayon R : $S = \pi R^2$
- Surface d'une sphère de rayon R : $S = 4\pi R^2$
- Volume d'une boule de rayon R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- Section droite d'un cylindre de rayon R et de hauteur H : $S = \pi R^2$
- Surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur H : $S = 2\pi RH$
- Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H : $V = \pi R^2 H$

Surfaces et volumes de tranches élémentaires

♥ À retenir –

- Volume de la pellicule cylindrique entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, de hauteur H : $V = 2\pi r dr H$
- Section de la pellicule cylindrique entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, de hauteur H : $V = 2\pi r dr$
- Volume de la pellicule sphérique entre les sphères de rayons r et $r + dr$: $V = 4\pi r^2 dr$

Outils mathématiques

Calcul différentiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Dérivées partielles. Différentielle. Théorème de Schwarz.	Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).
Intégration de l'expression d'une dérivée partielle.	Intégrer une expression de la forme $\partial f / \partial x = g(x, y)$ à y fixé en introduisant une fonction $\varphi(y)$ inconnue comme « constante d'intégration ».

Dans toute cette partie, on considère des fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles.

I Dérivées partielles

Soit f , une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La dérivée partielle de f par rapport à x , notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, est obtenue en dérivant $f(x, y)$ par rapport à x en considérant y comme constant.

Cette définition revient à écrire : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

II Développement limité

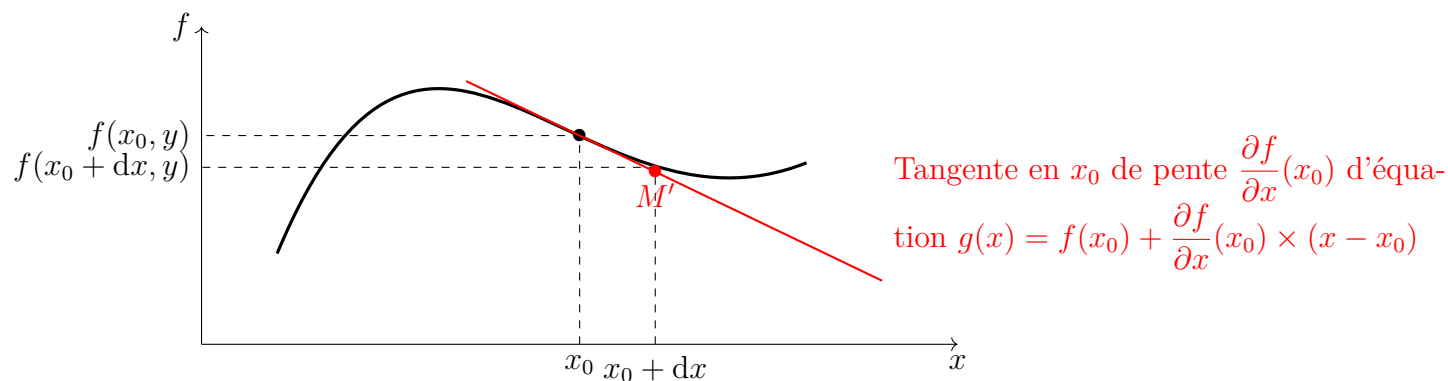
♥ À retenir –

Soit dx une variation infinitésimale de x . Au premier ordre en dx :

$$f(x + dx, y) \approx f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \times dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x + dx, y) - f(x) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \times dx$$

En choisissant dx très petit devant les échelles caractéristiques de variation de f (c'est-à-dire f varie très peu sur dx) :

Courbe tracée à y fixé



Le point M' d'abscisse $x_0 + dx$ sur la tangente à la courbe de f en x_0 est d'ordonnée (d'après équation de la droite) : $g(x_0 + dx) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \times (x_0 + dx - x_0) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \times dx$

f évoluant très peu sur dx , on confond le point en $x_0 + dx$ sur la courbe de f à celui sur la tangente, donc $f(x_0 + dx, y) \approx g(x_0 + dx) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \times dx$

III Théorème de Schwarz

♥ À retenir – Théorème de Schwarz

Pour une fonction dont les dérivées partielles par rapport à x et y sont de classe C^1 par rapport à chacune des deux variables, il est équivalent de la dériver d'abord par rapport à x puis par rapport à y et de la dériver par rapport à y puis par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

IV Différentielle

♥ À retenir – Différentielle

La différentielle df de fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ s'écrit :

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \cdot dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \cdot dy$$

Qualitativement, la différentielle df correspond à la variation infinitésimale (ou élémentaire) de grandeur f quand on fait varier simultanément les variables x, y de façon infinitésimale de dx, dy

V Intégration d'une équation $\partial f / \partial x = g(x, y)$

Pour résoudre un système couplé de deux équations aux dérivées partielles couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = p(x, y) & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = q(x, y) & (2) \end{cases}$$

1. Primitiver (1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = p(x, y)$ par rapport à x en gardant l'autre variable comme constante, on note $P(x, y)$ cette primitive.

Il faut ajouter une constante d'intégration qui est une fonction de y (constante vis-à-vis de x) : $\varphi(y)$.

$$f(x, y) = P(x, y) + \varphi(y)$$

2. Injecter cette solution dans l'autre équation aux dérivées partielles (2).
Primitiver cette équation par rapport à y pour en déduire $\varphi(y)$, à une constante A additive près (une vraie constante réelle).
3. Conclure sur l'expression de f et déterminer la constante d'intégration A .

Outils mathématiques

Analyse vectorielle

Notions et contenus	Capacités exigibles
Gradient.	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à une date fixée. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Opérateur b.grad.	Exprimer la différentielle d'un champ de vecteurs à une date fixée. Exprimer les composantes de (b.grad)a en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$ ou $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\vec{k}$.

I Gradient

L'opérateur gradient s'applique à un scalaire et donne un vecteur.



Définition – Vecteur gradient

- Le vecteur gradient d'un champ scalaire f est défini par :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

où df est la différentielle totale de la fonction f

- Le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces iso- f .
- Le vecteur gradient est dirigée des zones où f est faible vers les zones où f est élevé.



À retenir – Gradient en cartésien

Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées cartésiennes s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{u}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{u}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques, l'expression du vecteur gradient devra vous être fournie :

- Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta, z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{r, z} \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{r, \theta} \vec{u}_z$$

- Le vecteur gradient de la fonction scalaire f en coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'exprime selon :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta, \varphi} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{r, \varphi} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{r, \theta} \vec{u}_\varphi$$

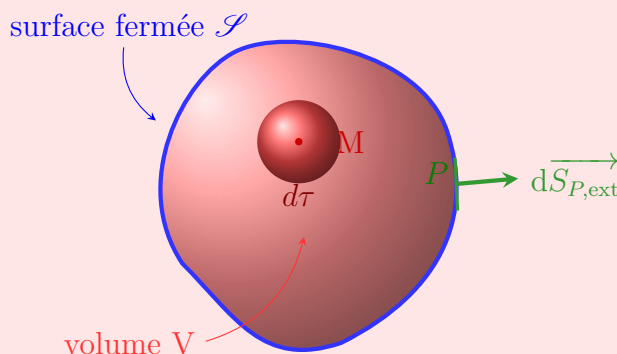
II Divergence

L'opérateur divergence s'applique à un vecteur et donne un scalaire.

♥ À retenir – Théorème d'Ostrogradski

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel défini dans tout l'espace.
Il existe un unique champ scalaire appelé divergence de $\vec{A}$, noté $\text{div}(\vec{A})$ tel que, pour tout volume $\mathcal{V}$ limité par une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée par sa normale sortant :

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{A}(P) \cdot d\vec{S}_{P, \text{ext}} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div}(\vec{A}(M)) d\tau_M$$



♥ À retenir – Expression en coordonnées cartésiennes

Soit le champ vectoriel $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$, la divergence s'écrit :

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence sera fourni si vous en avez besoin en coordonnées cylindriques ou sphériques.

- En cylindrique $\vec{A}(M) = A_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + A_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- En sphérique $\vec{A}(M) = A_r(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi$:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\theta \sin(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

III Rotationnel

L'opérateur rotationnel s'applique à un vecteur et donne un vecteur.

Un champ de vecteurs dont le rotationnel est non nul en un point « effectue une rotation » autour de ce point. Le rotationnel renseigne sur le caractère « tourbillonnaire » du champ.

♥ À retenir – Expression en coordonnées cartésiennes

Soit le champ vectoriel $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$, le rotationnel s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

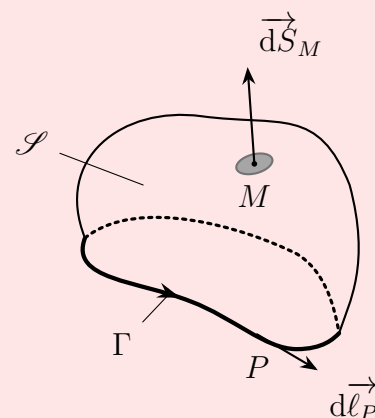
L'opérateur rotationnel sera fourni si vous en avez besoin en coordonnées cylindriques ou sphériques.

- En cylindrique $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$
- En sphérique $\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r f_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$

♥ À retenir – Théorème de Stokes

À un instant t fixé, la circulation d'un champ de vecteur $\vec{A}$ le long d'un contour orienté Γ est égale au flux du rotationnel de $\vec{A}$ à travers une surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur Γ et orientée selon la règle de la main droite :

$$\mathcal{C}(\vec{A}) = \oint_{P \in \Gamma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{\text{rot}}(\vec{A}(M, t)) \cdot d\vec{S}_P$$



IV Laplaciens

IV.1 Laplacien scalaire

L'opérateur laplacien scalaire transforme un champ scalaire en un champ scalaire.



Définition –

Le laplacien d'un champ scalaire f est défini par $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))$

♥ À retenir – Expression en coordonnées cartésiennes

Soit le champ scalaire $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, le laplacien scalaire s'exprime :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
- Coordonnées sphériques si f ne dépend que de r : $\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf(r))}{dr^2}$

IV.2 Laplacien vectoriel

L'opérateur laplacien vectoriel transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel.

Laplacien d'un champ vectoriel (formule fournie)

Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est défini par :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})$$

♥ À retenir – Expression en coordonnées cartésiennes

Soit le champ vectoriel $\vec{A}(M) = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$:

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

V Opérateur $\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}}$

L'opérateur $\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}}$ transforme un champ scalaire en champ scalaire ou un champ vectoriel en champ vectoriel.

♥ À retenir – $\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}}$

- Appliqué à un champ scalaire f : $(\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})f = \vec{b} \cdot (\vec{\text{grad}}f)$ est un scalaire.
- Appliqué à un champ vectoriel $\vec{A}$: $(\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{A}$ est un vecteur qui s'exprime dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ de la manière suivante :

$$(\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{b} \cdot (\vec{\text{grad}}A_x) \\ \vec{b} \cdot (\vec{\text{grad}}A_y) \\ \vec{b} \cdot (\vec{\text{grad}}A_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ b_x \frac{\partial A_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + b_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ b_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + b_y \frac{\partial A_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

où A_x , A_y et A_z sont les composantes cartésiennes de $\vec{A}$.

Bien que nous l'ayons défini à partir de ses coordonnées cartésiennes, le vecteur $(\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a}$ est une grandeur intrinsèque, indépendante du système de coordonnées choisi.

VI Formulaire

- $\vec{\text{grad}}(UV) = U\vec{\text{grad}}(V) + V\vec{\text{grad}}(U)$
- $\text{div}(U\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\text{grad}}(U) + U\text{div}(\vec{a})$
- $\vec{\text{rot}}(U\vec{a}) = \vec{\text{grad}}(U) \wedge \vec{\text{rot}}(\vec{a}) + U\vec{\text{rot}}(\vec{a})$
- $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{a}) - \vec{a} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{b})$
- $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(U)) = \vec{0}$
- $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{a})) = 0$
- $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{a})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}$
- $(\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{\text{grad}}(a^2) + \vec{\text{rot}}(\vec{a}) \wedge \vec{a}$

VII Cas des ondes planes progressives harmoniques

♥ À retenir – Opérateurs vectoriels en représentation complexe

Pour $\underline{f}(M, t) = f_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$:

- $\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} = i\omega \underline{f}$
- $\vec{\text{grad}}(\underline{f}) = -i\vec{k} \underline{f}$
- $\text{div}(\vec{A}) = -i\vec{k} \cdot \vec{A}$
- $\Delta \underline{f} = (-i\vec{k})^2 \underline{f} = -k^2 \underline{f}$

Pour $\underline{f}(M, t) = f_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)}$:

- $\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} = -i\omega \underline{f}$
- $\vec{\text{grad}}(\underline{f}) = +i\vec{k} \underline{f}$
- $\text{div}(\vec{A}) = +i\vec{k} \cdot \vec{A}$
- $\Delta \underline{f} = (+i\vec{k})^2 \underline{f} = -k^2 \underline{f}$