



Thermodynamique

Chapitre TH3 Diffusion thermique



Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768 - 1830) est un mathématicien et physicien français. Il est en particulier connu pour avoir étudié la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction en une série trigonométrique : série de Fourier. La transformation de Fourier est une « méthode » qui s'applique à bien d'autres domaines : théorie du signal, imagerie numérique ...



Ponts thermiques visibles sur les fenêtres et la dalle du premier étage d'une maison



Laine de verre utilisée pour isoler (conductivité thermique $\lambda = 0,032 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et résistance thermique $\times$ Surface : $R_{th}S = 4,35 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{m}^2$)

Introduction

Le phénomène de diffusion thermique se produit dans de très nombreuses situations de la vie de tous les jours : l'isolation des bâtiments est une problématique permanente, la température constante dans les caves/grottes, échauffement d'une cuillère en métal/bois dans un liquide chaud, temps de cuisson non proportionnelle à la taille du gâteau... Toutes ces situations peuvent s'expliquer à l'aide de l'équation de la diffusion thermique que nous allons établir dans ce chapitre.

Pré-requis

- PCSI : Thermodynamique (notamment le 1^{er} principe)
- PC : Chapitre TH2. Diffusion de particules

Σ Point maths – Cf « Outils mathématiques »

- Systèmes de coordonnées & Surfaces & volumes
- Analyse vectorielle : gradient, divergence, laplacien

Objectifs du chapitre

- Effectuer des bilans à l'aide du premier principe de la thermodynamique en présence de diffusion thermique ;
- Établir l'équation de diffusion thermique ;
- Établir une analogie électricité-thermique en régime stationnaire pour introduire la notion de résistance thermique.

Plan du cours

I Transferts thermiques	3	III Régime stationnaire sans sources internes	8
I.1 Modes de transfert thermique	3	III.1 Conservation du flux thermique	8
I.2 Vecteur densité de flux thermique	4	III.2 Résistance thermique	8
I.3 Loi de Fourier	4	III.3 Application	9
II Équation locale de conservation de l'énergie	5	IV Équation de la diffusion thermique	10
II.1 Équilibre thermodynamique local	5	IV.1 Équation de la diffusion thermique	10
II.2 Terme source interne	5	IV.2 Commentaires	10
II.3 Équation locale de conservation de l'énergie	6	IV.3 Conditions aux limites	11
II.3.a) En géométrie cartésienne	7	IV.4 Application	12
II.3.b) En géométrie cylindrique	7	V Capacité numérique : résolution de l'équation de diffusion thermique	13
II.3.c) En géométrie sphérique	7	V.1 Rappel : Méthode d'Euler	13
II.4 Généralisation	8	V.2 Diffusion thermique dans un mur	14
		V.3 Méthode d'Euler explicite	15
		V.4 Résultats et discussion	16

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$	Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur $\vec{j}_Q$.
Premier principe de la thermodynamique.	Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.
Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes.	Établir une équation de diffusion thermique. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide fluide. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires. [TP] Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.

Ai-je bien appris mon cours ?

- 1 – 😊 – 😞 – Définir le flux thermique à travers une surface.
- 2 – 😊 – 😞 – Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas où T ne dépend que de x en cartésien, en présence de sources internes de puissance volumique $\mathcal{P}_{\text{vol}}$.
- 3 – 😊 – 😞 – Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas où T ne dépend que de r en cylindrique, en présence de sources internes de puissance volumique $\mathcal{P}_{\text{vol}}$.
- 4 – 😊 – 😞 – Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas où T ne dépend que de r en sphérique, en présence de sources internes de puissance volumique $\mathcal{P}_{\text{vol}}$.
- 5 – 😊 – 😞 – Établir l'équation de diffusion thermique dans les cas précédents.

- 6 – 😊 – 😞 – Donner le bilan local dans le cas général, en géométrie quelconque.
- 7 – 😊 – 😞 – Définir la résistance thermique, et **son cadre de validité**.
- 8 – 😊 – 😞 – Établir l'expression de la résistance thermique en cartésien.
- 9 – 😊 – 😞 – Analyser l'équation en ordre de grandeur.

FlashCards :

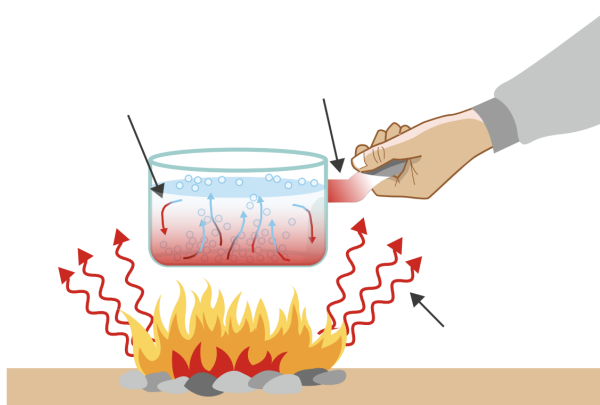


I Transferts thermiques

I.1 Modes de transfert thermique

Définition – Différents transferts thermiques

- La **conduction thermique** (ou **diffusion thermique**) est le transfert thermique qui intervient dans un milieu dont la température n'est pas homogène et qui ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière. Il s'effectue dans le sens des températures décroissantes et tend à homogénéiser la température du système.
C'est le mode de transfert thermique qui domine dans les solides.
- La **convection** est un transfert accompagné d'un déplacement macroscopique de matière, et concerne donc les fluides (liquide et gaz) et pas les solides.
La convection peut être naturelle : au contact d'un simple radiateur, l'air chaud se dilate et devient moins dense que l'air froid, il monte et assure ainsi un brassage naturel. Elle peut être forcée, par exemple, avec un ventilateur ou un four à chaleur tournante.
La convection est plus efficace que la conduction. Il est ainsi plus efficace de remuer son café pour le refroidir que de le laisser se refroidir seul sans remuer.
- Le **rayonnement thermique** met en jeu des ondes électromagnétiques, il se superpose aux deux premiers et a la particularité d'avoir lieu même en l'absence de milieu matériel et de contact entre les deux corps. Tout corps émet un rayonnement électromagnétique, à l'équilibre la longueur d'onde moyenne de ce rayonnement est inversement proportionnelle à la température du corps. Plus le corps est chaud plus il émet une grande quantité de rayonnement, ainsi le transfert thermique a globalement lieu du corps le plus chaud vers le corps le plus froid.



Dans la suite du chapitre, nous ne nous intéresserons qu'au phénomène de diffusion thermique, dans un solide, où aucun phénomène de convection n'a lieu. Le rayonnement thermique sera négligé.

I.2 Vecteur densité de flux thermique

La présence dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique d'une inhomogénéité (= non uniformité) de température fait apparaître un **FLUX THERMIQUE** par conduction qui possède les caractéristiques suivantes :

- il a lieu **spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides** ;
- pour un problème unidimensionnel, il est **proportionnel à l'aire de la surface S** à travers laquelle s'effectue le transfert thermique ;
- il est **d'autant plus élevé que la variation spatiale de température est importante**.



Définition – Flux thermique

Le **flux thermique** ou **puissance thermique** traversant une surface orientée est une grandeur **algébrique** reliée au transfert thermique traversant la surface S orientée pendant la durée dt par :

$$\phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt} \Leftrightarrow \delta Q = \phi_{th} dt$$

ϕ_{th} est une puissance, et s'exprime donc en watt (W).



Définition – Vecteur densité de flux thermique

Pour s'affranchir de la surface S , on définit le **vecteur densité de flux thermique** $\vec{j}_{th}$ (noté également $\vec{j}_Q$). C'est un vecteur colinéaire à la direction selon laquelle la température varie :

$$\phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ un vecteur élément de surface, normal à la surface.

j_{th} est une **puissance thermique surfacique**, en $W \cdot m^{-2}$

I.3 Loi de Fourier

Expérimentalement, si les variations (spatio-temporelles) de températures ne sont pas trop importantes, on rend compte localement des phénomènes de conduction de la chaleur par la Loi de Fourier (1807).



À retenir – Loi de Fourier

Le vecteur densité de courant/flux thermique est relié au gradient de la température par :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} (T)$$

où λ est appelé **conductivité thermique** (USI : $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)



Activité n°1 – Unités

Q1. Déterminer l'unité de j_{th} .

Q2. Retrouver l'unité de λ .

Selon le matériau dans lequel s'effectue le transfert thermique, la puissance transmise est plus ou moins grande ; on parle de matériaux conducteurs ou isolants.

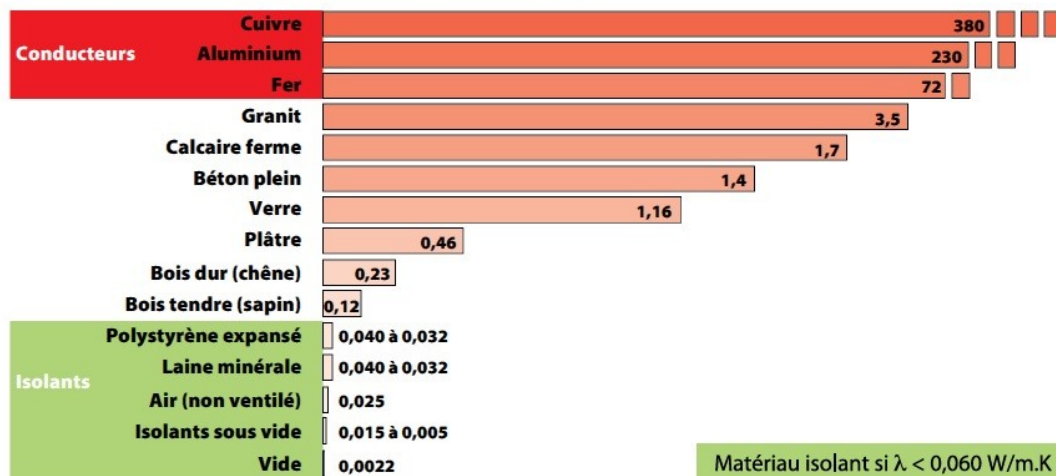


FIGURE 1 – Conductivité thermique de différents matériaux (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

♥ À retenir – Ordres de grandeur de conductivité thermique

Matériau	air	eau	béton	acier
λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	$2,6 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-1}$	$9,2 \times 10^{-1}$	16

Remarques – Limites de la loi de Fourier

- Si la température T varie de façon trop importante (gradient trop élevé), la relation entre le vecteur densité de courant de particules n'est plus proportionnel au gradient.
- Si le gradient de température varie trop rapidement dans le temps, la relation entre le gradient et le vecteur densité n'est plus instantanée.
- Il existe des milieux anisotropes pour lesquels la conductivité thermique n'a pas la même valeur dans toutes les directions. C'est par exemple le cas dans le graphite.

II Équation locale de conservation de l'énergie

II.1 Équilibre thermodynamique local

La diffusion thermique se produit dans les systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermique, et donc pas à l'équilibre thermodynamique.

Par exemple, une fenêtre en hiver est soumise d'un côté à une température de l'ordre de 20°C , et de l'autre côté à une température de 5°C . Même en l'absence de variation temporelle de la température, le régime est stationnaire, mais la fenêtre n'est pas à l'équilibre thermique. Au cours de la cuisson de votre gâteau préféré, la température évolue au cours du temps et n'est pas homogène au sein du gâteau,...

Nous allons supposer que les systèmes sont à l'**équilibre thermodynamique local**. Cela signifie, qu'on suppose qu'à l'**échelle mésoscopique**, la température, la masse volumique, ... sont uniformes. Le système macroscopique qui n'est **pas à l'équilibre thermodynamique macroscopique** mais peut être vu comme la **superposition de systèmes mésoscopiques à l'équilibre thermodynamique local**.

II.2 Terme source interne

Il peut exister à l'intérieur du système des processus qui dégagent ou absorbent de l'énergie.

On note $\mathcal{P}_{\text{vol}}$ la **puissance volumique produite algébriquement** (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$). Elle est positive si le processus dégage réellement de l'énergie thermique, négative si elle en absorbe.

La puissance thermique produite dans un élément de volume $d\tau$ autour du point M s'écrit :

$$\delta \mathcal{P}_{th,p} = \mathcal{P}_{vol}(M, t) d\tau$$

Le transfert thermique produit dans l'élément de volume $\delta\tau$ autour du point M s'écrit :

$$\delta Q_p = \mathcal{P}_{vol}(M, t) d\tau dt$$

Exemples de processus qui dégagent/absorbent de l'énergie :

- **Effet Joule**, dans un conducteur électrique traversé par un courant électrique :

♥ À retenir – Puissance volumique dissipée par effet Joule

La puissance reçue par une portion de conducteur électrique de résistance δR (de longueur $d\ell$ et de section S) traversée par un courant I est :

$$\delta \mathcal{P}_{th,p} = \delta R I^2 = \frac{d\ell}{\gamma S} I^2$$

La puissance volumique créée à l'intérieur d'un matériau conducteur de l'électricité de conductivité électrique γ est

$$\mathcal{P}_{J,vol} = \frac{j_{elec}^2}{\gamma}$$

où $\vec{j}_{elec}$ le vecteur densité de courant électrique dans le conducteur (cf cours d'électromagnétisme).

- désintégration nucléaire dans un matériau nucléaire ;
- réaction chimique exothermique ($\mathcal{P}_{vol} > 0$) ou endothermique ($\mathcal{P}_{vol} < 0$).

II.3 Équation locale de conservation de l'énergie

💡 Méthode – Comment établir l'équation de conservation de l'énergie ?

1. Identifier le système de coordonnées adapté au système, et la variable pertinente dont dépend le champ de température.
2. Définir un système fermé mésoscopique Σ , de volume constant, fixe dans le référentiel d'étude, adapté à la géométrie du problème.
3. Faire un schéma avec le système mésoscopique, la base, les flux, ...
4. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système Σ de façon infinitésimale entre t et $t + dt$ au système défini précédemment :

$$d(\delta \mathcal{E}_m) + d(\delta U) = \delta W + \delta Q_{ext \rightarrow \Sigma} + \delta Q_p$$

- Pour un système macroscopiquement au repos, $d\mathcal{E}_m = 0$
- Pour un système solide ne recevant pas de travail mécanique : $\delta W = 0$
- $\delta Q_{ext \rightarrow \Sigma}$ est le transfert thermique reçu de la part de l'extérieur,
- δQ_p est le transfert thermique produit au sein du système par une source interne.

5. Exprimer les différents termes et en déduire l'équation locale de conservation de l'énergie reliant $\frac{\partial T}{\partial t}$ et la dérivée spatiale de j_{th} .

II.3.a) En géométrie cartésienne

On considère un corps indéformable immobile dans le référentiel d'étude dont la température dépend du temps et d'une seule variable d'espace cartésienne, x . Le corps est caractérisé par sa conductivité thermique λ , sa capacité thermique massique c et sa masse volumique ρ . On note $\mathcal{P}_{\text{vol}}(x, t)$ la puissance volumique produite algébriquement à l'intérieur du système.

On étudie un cylindre élémentaire situé entre les abscisses x et $x + dx$ et de section S transverse. Il n'échange du transfert thermique qu'en x et $x + dx$ (la paroi latérale est isolée thermiquement).

Démonstration à maîtriser n°2 – Bilan en coordonnées cartésiennes

- Q1. Écrire le premier principe entre t et $t + dt$. Justifier que $d(\delta \mathcal{E}_m) = 0$ et $\delta W = 0$.
- Q2. Exprimer la variation de l'énergie interne $d(\delta U)$ en fonction la masse volumique ρ du système, de la capacité thermique massique c , et de la température. On se placera au premier ordre en dt .
- Q3. Exprimer le transfert thermique reçu algébriquement par diffusion.
- Q4. Exprimer le transfert thermique reçu algébriquement de par les processus internes.
- Q5. En déduire l'équation locale de conservation de l'énergie : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} + \mathcal{P}_{\text{vol}}(x, t)$

II.3.b) En géométrie cylindrique

On considère un corps immobile, indéformable, cylindrique de rayon R et de très grande longueur H . Le champ de température est invariant par toutes rotations autour de l'axe de révolution (Oz) et toutes translations le long de l'axe (Oz). Le champ de température ne dépend alors que de la distance r à l'axe (Oz) et du temps. Le corps est caractérisé par sa conductivité thermique λ , sa capacité thermique massique c et sa masse volumique ρ . On note $\mathcal{P}_{\text{vol}}(r, t)$ la puissance volumique produite algébriquement à l'intérieur du système.

Démonstration à maîtriser n°3 – Bilan en coordonnées cylindriques

- Q1. Définir le système mésoscopique étudié, et exprimer son volume au premier ordre en dr .
- Q2. Écrire le premier principe. Le simplifier.
- Q3. Exprimer la variation de l'énergie interne du système ainsi défini.
- Q4. Exprimer les transferts thermiques algébriquement reçus.
- Q5. En déduire l'équation locale de conservation de l'énergie : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{\text{th}}(r, t))}{\partial r} + \mathcal{P}_{\text{vol}}(r, t)$

II.3.c) En géométrie sphérique

On considère un corps immobile et indéformable, dans lequel le champ de température est invariant par toutes rotations autour d'un point O . Le champ de température ne dépend alors que de la distance r au point O et du temps. Le corps est caractérisé par sa conductivité thermique λ , sa capacité thermique massique c . On note $\mathcal{P}_{\text{vol}}(r, t)$ la puissance volumique produite algébriquement à l'intérieur du système.

Démonstration à maîtriser n°4 – Bilan en coordonnées sphériques

- Q1. Définir le système mésoscopique étudié, et exprimer son volume au premier ordre en dr .
- Q2. Écrire le premier principe. Le simplifier.
- Q3. Exprimer la variation de l'énergie interne du système ainsi défini.
- Q4. Exprimer les transferts thermiques algébriquement reçus.
- Q5. En déduire l'équation locale de conservation de l'énergie : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{\text{th}}(r, t))}{\partial r} + \mathcal{P}_{\text{vol}}(r, t)$

II.4 Généralisation

♥ À retenir – Équation locale de conservation de l'énergie

L'application du premier principe à un système de volume constant donne, dans le cas général :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{j}_{th}) + \mathcal{P}_{vol}$$

Où $\mathcal{P}_{vol}$ est la puissance volumique produite algébriquement à l'intérieur du système

III Régime stationnaire en l'absence de sources internes

III.1 Conservation du flux thermique

- En **régime stationnaire** $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- et en l'**absence de source interne de particules**, $\mathcal{P}_{vol} = 0$

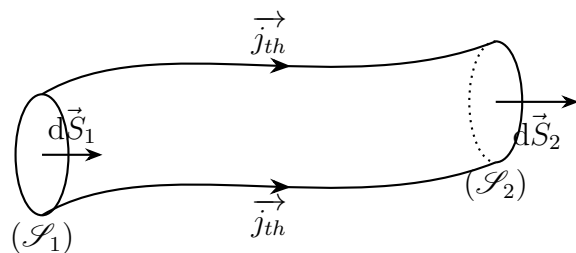
l'équation de conservation précédente donne : $\operatorname{div}(\vec{j}_{th}(M)) = 0$

Par intégration sur un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée

$$\mathcal{S} : \iiint_{M \in \mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{j}_{th}(M)) d\tau_M = 0$$

$$\text{D'après le théorème d'Ostrogradski : } \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}_{P,ext} = 0$$

$$\text{Par intégration sur un tube de champ de } \vec{j}_{th} : \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}_2$$



♥ À retenir – Conservation du flux

En **régime stationnaire** et en l'**absence de sources internes**, le vecteur densité de flux thermique est à flux conservatif.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \text{Thm Ostrogradski} \quad & \begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{j}_{th}) &= 0 \\ \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{th}(P) \cdot d\vec{S}_{P,ext} &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ Le flux de $\vec{j}_{th}$ à travers toute section d'un même tube de champ se conserve

III.2 Résistance thermique

🌿 Démonstration à maîtriser n°5 – Résistance thermique en cartésien

On considère un milieu de conductivité λ , d'épaisseur e . En $x = 0$, la température est imposée égale à T_1 et en $x = e$, la température est imposée à T_2 .

On oriente l'axe (Ox) de l'intérieur vers l'extérieur, avec l'origine O au niveau de la face intérieure de la vitre. On suppose le régime stationnaire.

Q1. Que peut-on dire du flux thermique $\phi_{th}^{1 \rightarrow 2}$?

Q2. En exploitant, notamment, la loi de Fourier, établir la température dans la vitre en fonction de $\phi_{th}^{1 \rightarrow 2}$, e , x et T_1 .

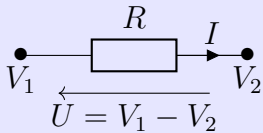
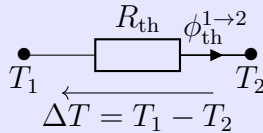
Q3. En déduire la relation entre $T_1 - T_2$ et $\phi_{th}^{1 \rightarrow 2}$.

Q4. À quelle loi de l'électrocinétique ressemble la relation précédente ?

En déduire une définition de la résistance thermique et son expression dans la géométrie étudiée ici. Quelle est son unité ? Comment dépend-elle des différents paramètres ?

📖 Définition – Résistance thermique

En régime stationnaire et en l'absence de sources internes, par analogie avec l'électrocinétique, on définit la résistance thermique :

Résistance électrique	Résistance thermique
 $U = V_1 - V_2 = RI$	 $T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th}^{1 \rightarrow 2}$ USI de R_{th} : $K \cdot W^{-1}$
$R = \frac{L}{\gamma S}$ γ conductivité électrique	$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ λ conductivité thermique

♥ À retenir – Associations de résistances thermiques

En série	En parallèle
Les résistances thermiques sont traversées par le même flux thermique	Les deux résistances thermiques ont même différence de température à « leur borne ».
$R_{th} = R_{th,1} + R_{th,2}$ ex : double vitrage	$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$ ex : mur percé d'une fenêtre

III.3 Applications

🌿 Activité n°6 – Double vitrage

On considère une fenêtre constituée d'un simple vitrage . L'intérieur de la maison est de température T_1 et l'extérieur de température T_2 .

Le verre est d'épaisseur $e = 5,0 \text{ mm}$ et la vitre de surface $S = 1,0 \text{ m}^2$.

Q1. Calculer la résistance thermique de la vitre.

On étudie maintenant un double vitrage constitué de deux vitres identiques à la vitre précédente séparées par une épaisseur $e' = 3,0 \text{ mm}$ d'air.

Q2. Proposer une expression pour la résistance thermique équivalente. Faire l'application numérique.

Q3. Calculer le rapport du flux thermique à travers le double vitrage et à travers le simple vitrage. Commenter.

On donne : $\lambda_{\text{air}} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\lambda_{\text{verre}} = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

🌿 Activité n°7 – Fuite thermique

On considère un mur de béton de surface $S_b = 5,0 \text{ m} \times 3,0 \text{ m}$, d'épaisseur $L_b = 30 \text{ cm}$, de conductivité thermique $\lambda_b = 9,2 \cdot 10^{-1} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On perce dedans une lucarne carrée de côté $a = 20 \text{ cm}$, fermée par une vitre en verre d'épaisseur $L_v = 5,0 \text{ mm}$ et de conductivité thermique $\lambda_v = 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Déterminer la résistance thermique en l'absence de lucarne, puis en présence. Commenter.

Activité n°8 – Hérisson

On assimile le corps d'un hérisson à une boule homogène de centre O , de rayon $R = 6$ cm enveloppé par une couche isolante d'épaisseur $e = 3$ cm représentant l'association du pelage et des épines de conductivité moyenne $\lambda = 0,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La température extérieure vaut $T_e = 17^\circ\text{C}$. Le métabolisme du hérisson fournit une puissance $\mathcal{P}_{\text{métab}}$ lui permettant de maintenir sa température intérieure à $T_i = 37^\circ\text{C}$.

- Q1. Justifier que la température dans la couche isolante ne dépend que de r et en déduire le vecteur densité de flux thermique. Préciser la direction et le sens de ce vecteur.
- Q2. Établir l'expression du flux thermique Φ à travers une sphère de centre O et de rayon r compris entre R et $R + e$, en fonction de λ , r et de la dérivée $\frac{dT}{dr}$.
- Q3. Montrer que $T(r) = T_e + \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+e} \right)$
- Q4. Exprimer la résistance thermique de la couche isolante du hérisson.
- Q5. Exprimer et calculer la puissance fournie par le métabolisme pour maintenir sa température intérieure.

IV Équation de la diffusion thermique

IV.1 Équation de la diffusion thermique

💡 Méthode – Comment établir l'équation de la diffusion thermique ?

1. Établir l'équation locale de conservation de l'énergie dans le système de coordonnées adapté (ou écrire sa généralisation)
2. Écrire la loi de Fourier.
3. L'injecter dans l'équation locale de conservation pour en déduire l'équation de la diffusion thermique.

📌 Démonstration à maîtriser n°9 –

- Q1. Établir l'équation de la diffusion thermique dans les différents cas étudiés précédemment (sans terme source interne).
- Q2. Faire apparaître un coefficient de diffusion thermique D_{th} que l'on exprimera en fonction de λ , ρ et c . Déterminer son unité.

♥ À retenir – Équation de la diffusion thermique (sans source interne)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}} \Delta T$$

- $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho c}$ la **diffusivité thermique**, en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, qui caractérise la capacité d'un matériau à transmettre une variation de température d'un point à un autre de ce matériau,
- la **conductivité thermique** λ mesure la capacité du matériau à conduire le transfert thermique
- la **capacité thermique massique** c mesure la capacité du matériau à accumuler l'énergie thermique.

IV.2 Commentaires

Remarques – Équation de diffusion

- L'équation de diffusion est une **équation linéaire**.
- L'équation de diffusion n'est pas invariante par renversement du temps, à cause de la dérivée temporelle d'ordre 1, c'est un **phénomène irréversible**.

🍃 Démonstration à maîtriser n°10 – Ordre de grandeur

En suivant la même méthode que pour la diffusion de particule, en notant L^* la distance caractéristique de variation de la température, et τ^* la durée caractéristique de variation de la température, établir la relation $L^* \sim \sqrt{D_{th}\tau^*}$

♥ À retenir –

Les échelles caractéristiques spatiale, L^* , et temporelle, τ^* , d'un phénomène de diffusion sont reliées à la diffusivité thermique, D_{th} , par :

$$L^* \sim \sqrt{D_{th}\tau^*} \Leftrightarrow \tau^* \sim \frac{L^{*2}}{D_{th}}$$

🍃 Activité n°11 –

En combien de temps l'extrémité d'une cuillère en acier et en bois plongée dans une préparation culinaire bouillante atteint-elle la température de l'eau ?

Données –

- Acier : $\lambda_a = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\rho_a \sim 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $c_a \sim 440 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Bois : $\lambda_b = 0,12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\rho_b \sim 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $c_b \sim 1,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

IV.3 Conditions aux limites

La résolution complète de l'équation de diffusion nécessite de connaître une **condition initiale** (équation du 1^{er} ordre en t) et **deux conditions aux limites** (équation du 2^e ordre en position).

On considère un système Σ et P un point de la surface de Σ .

- Quelle que soit la situation, il y a **continuité du flux à travers une interface** (on note x_0 sa position ici), c'est-à-dire il y a continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_{th}$.

$$\begin{aligned} \phi_{th}(x_0^+, t) &= \phi_{th}(x_0^-, t) \\ \vec{j}_{th}(x_0^+, t) \cdot \vec{n} &= \vec{j}_{th}(x_0^-, t) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

- **Cas du contact thermique est parfait entre deux solides :**

- continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique,
- **et** continuité du champ de **température à l'interface** : $T_{solide\ 1}(P, t) = T_{solide\ 2}(P, t)$

- **Cas d'une paroi adiabatique**

Dans le cas où le système (Σ) présente une paroi adiabatique, en un point P de cette paroi :

$$\vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_P = 0$$

- **Cas d'un contact avec un fluide – Transfert thermique conducto-convectif : loi de Newton**

Si le flux thermique se conserve à travers une interface, rien ne l'impose pour la température.

Le transfert thermique entre deux milieux est proportionnel à la différence de température entre les deux milieux, à la surface de l'interface dS_p et à la durée de l'échange.

Loi phénoménologique de Newton (admise et fournie)

$$\begin{aligned}\delta Q_{\text{fluide} \rightarrow \text{solide } \Sigma} &= h(T_{\text{fluide}} - T_{\Sigma}(P, t)) dS dt \\ \phi_{\text{fluide} \rightarrow \text{solide } \Sigma} &= h(T_{\text{fluide}} - T_{\Sigma}(P, t)) dS_P \\ \text{Surfacique } \varphi_{\text{fluide} \rightarrow \text{solide } \Sigma} &= h(T_{\text{fluide}} - T_{\Sigma}(P, t))\end{aligned}$$

Avec h est le **coefficient de transfert conducto-convectif** (USI : en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$), c'est un coefficient positif qui **mesure l'efficacité du transfert thermique à la surface du système**.

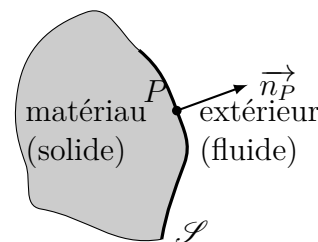
h **dépend de la vitesse du fluide** : h est d'autant plus élevé que la vitesse du fluide est élevée, car cela améliore les échanges thermiques.

h **dépend également des corps en contact**.

fluide	type de transfert	h en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
gaz	convection naturelle	5-30
	convection forcée	10-300
eau	convection naturelle	100-1000
	convection forcée	300-12000

Dans le cas d'un contact du système (Σ) solide avec un fluide, la **continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique en un point P de la surface**, s'écrit :

$$\vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_P = -h(T_{\text{fluide}} - T_{\Sigma}(P, t))$$



Activité n°12 –

- Q1. Analyser le signe de la loi de Newton.
- Q2. Analyser le signe dans la condition de continuité du vecteur densité de flux thermique ci-dessus.
- Q3. Exprimer la résistance thermique $R_{th,cc}$ associée au phénomène de conducto-convection qui a lieu à l'interface solide-liquide.

IV.4 Application

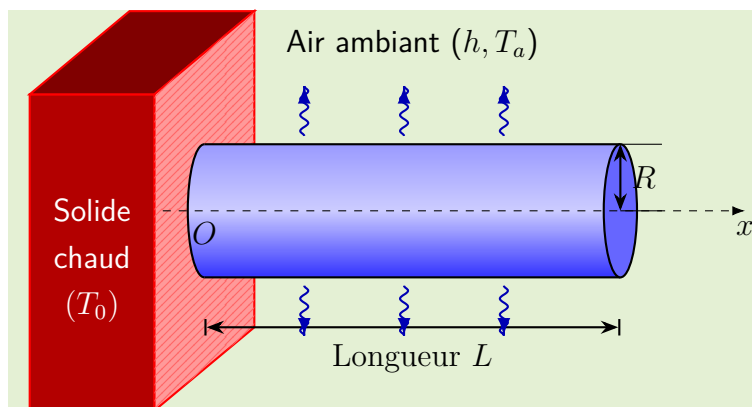
Activité n°13 – Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement est un dispositif visant à augmenter la surface de contact avec un fluide extérieur pour augmenter les échanges convectifs, et donc le transfert de chaleur.

On considère une paroi solide (par exemple le boîtier d'une alimentation ou d'un microprocesseur) dont la température T_0 est supérieure à T_a la température de l'air ambiant.

Pour refroidir cette paroi, on fixe une ailette de refroidissement, modélisée par un cylindrique d'axe (Ox) , de rayon r , de longueur L et formée d'un matériau de masse volumique μ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ et de température $T(x, t)$.

L'ailette est fixée par sa base $x = 0$ à la paroi de température T_0 et elle est en contact sur le reste de sa surface avec l'air ambiant de température T_a .



L'ailette est le siège de transferts thermiques purement conductifs en tout point M intérieur à l'objet. Sur ses parois, on observe un transfert thermique dirigé de l'ailette vers l'extérieur. Le flux surfacique associé, au niveau de l'abscisse x , est donné par la loi de Newton : $\varphi_{\text{ailette} \rightarrow \text{air}} = h(T(x, t) - T_a)$, avec h une constante positive.

On se place **en régime stationnaire**.

Q1. Définir proprement le système étudié et le représenter sur un schéma.

Quelle est la surface à travers laquelle ont lieu les échanges par diffusion thermique ? et par conduction-convection ?

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$: $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a$, avec δ à exprimer en fonction des données.

Q3. Résoudre l'équation différentielle précédente. On ne cherchera pas à exprimer pour l'instant les constantes d'intégration.

Q4. À quelle condition sur L et δ peut-on considérer l'ailette comme « infiniment longue » ?

Q5. Déterminer les constantes A et B .

Données —

$$\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}; h = 600 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}; r = 1,0 \text{ mm}; T_0 = 380 \text{ K}; T_e = 300 \text{ K}.$$

V Capacité numérique : résolution de l'équation de diffusion thermique

V.1 Rappel : Méthode d'Euler

V.1.a) Principe de la méthode d'Euler

L'algorithme d'Euler permet de résoudre de façon approchée une équation différentielle $\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

D'après la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement : $\frac{dX}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$.

Dans le cadre du **schéma Euler explicite**, au **premier ordre**, on peut approximer la dérivée à l'instant t par :

$$\frac{dX}{dt}(t) \approx \frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$

soit

$$X(t+h) \approx X(t) + h \times f(t, X(t))$$

qui correspond au développement limité de X au premier ordre au voisinage de t .

La résolution numérique consiste à déterminer les valeurs X_i de X aux $(n+1)$ instants $(t_i)_{i \in [0, n]}$ séparés de la durée h , soit aux instants : $t_i = t_0 + i \times h$, et $t_{i+1} = t_i + h$.

La valeurs approchées X_i de X à l'instant t_i sont définies par la relation de récurrence

$$X_{i+1} \approx X_i + h \times f(t_i, X_i)$$

Ainsi, connaissant la fonction f (forcément puisqu'on connaît l'équation différentielle que l'on souhaite résoudre!) et la condition initiale $X(t_0) = X_0$, on peut déterminer $X_1 = X_0 + h \times f(t_0, X_0)$. Puis on peut déterminer $X_2 : X_2 = X_1 + h \times f(t_1, X_1)$, et ainsi de suite.

h est le **pas de calcul**, qu'il faudra choisir de façon pertinente. Il devra être suffisamment petit pour rendre compte des variations locales de f . En diminuant h on augmente la précision du calcul, mais on augmente aussi le temps de calcul.

V.1.b) Traduction en python

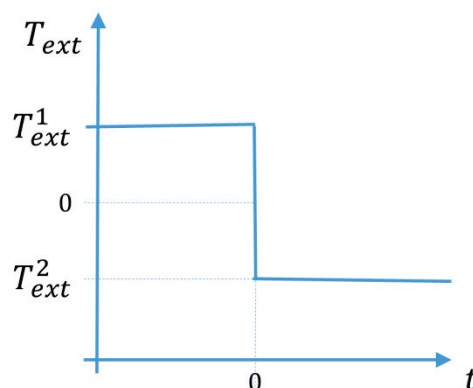
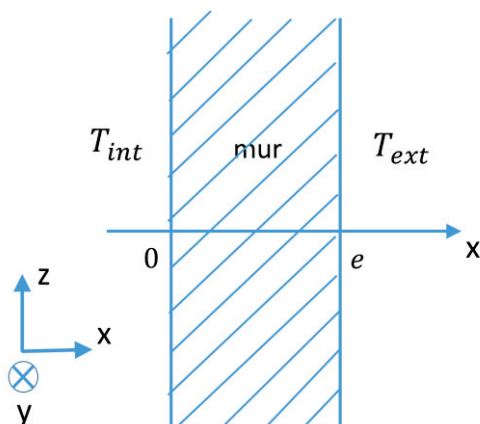
On écrit la fonction `euler` qui prendra en argument :

- la fonction `f` qui définit l'équation différentielle;
- les bornes `t0` et `tf` de résolution;
- le nombre `n` de pas de calcul;
- la condition initiale `X0`

et renverra la tableau `X` des `n+1` valeurs approchées déterminées.

```
def Euler(f,X0,t0,tf,n):
    h= (tf-t0)/n      # pas de calcul
    t=np.linspace(t0,tf,n+1) # liste des temps (n+1 instants de calculs)
    répartis régulièrement entre t0 et tf
    X=np.zeros(n+1) # tableau qui contient n+1 zéros au départ
    X[0]=X0 # 1er élément du tableau est la condition initiale
    for i in range(0,n): # il reste n instants à calculer
        # calcul du point suivant (élément i+1) à partir du pt précédent (
        élément i) :
        X[i+1]=X[i]+f(t[i],X[i])*h # relation de récurrence
    return X #la fonction renvoie le tableau X des valeurs de X successives
```

V.2 Diffusion thermique dans un mur



On étudie les transferts thermiques dans le mur d'une maison. La température à l'intérieur de la maison est constante dans le temps et égale à $T_{int} = 20^\circ\text{C}$. Aux temps négatifs ($t < 0$), la température extérieure est égale à $T_{ext1} = 10^\circ\text{C}$. À $t = 0$, elle chute brusquement à $T_{ext2} = -10^\circ\text{C}$ et elle reste égale à cette valeur aux temps positifs ($t > 0$).

Le mur a une épaisseur $e = 40\text{ cm}$. Les propriétés physiques du mur sont constantes : conductivité thermique $\lambda = 1,65\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, capacité thermique massique $c_p = 1000\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, masse volumique $\rho = 2150\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

On souhaite étudier l'évolution du profil de température dans le mur au cours du temps.

On cherche à résoudre numériquement l'équation de diffusion : $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, avec $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ le coefficient de diffusion thermique.

Avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_{\text{int}} && \text{pour tout } t > 0 \\ T(e, t) &= T_{\text{ext}2} && \text{pour tout } t > 0 \\ T(x, 0) &= (T_{\text{ext}1} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e} + T_{\text{int}} && \text{pour tout } x \in [0, e] \end{aligned}$$

On divise l'intervalle $[0, e]$, représentant l'épaisseur du mur, en Nx points, numérotés à partir de 0 régulièrement espacés de Δx . Cette division est appelée « discrétisation ». La distance Δx est appelée le « pas d'espace ».

On divise l'intervalle de temps $[0, t_f]$ en Nt instants, numérotés à partir de 0 régulièrement espacés de Δt . Cette division est appelée « discrétisation ». La durée Δt est appelée le « pas de temps ».

- Q1. Donner l'expression de Δx en fonction de Nx et de l'épaisseur du mur e . Donner l'abscisse x_i du i^{e} point en fonction de i et Δx .
- Q2. Exprimer le pas de temps en fonction de Nt et de t_f . Donner l'expression, t_k , du k^{e} instant.

V.3 Méthode d'Euler explicite

On utilise le schéma explicite, qui est une adaptation de la méthode d'Euler.

- Q3. À l'aide d'un développement limité de la fonction $t \mapsto T(x, t)$, donner une expression de $T(x, t + \Delta t)$ à l'ordre 1 en Δt en fonction de T et de sa dérivée partielle par rapport à t évaluées en (x, t) .

En déduire une valeur approchée de $\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x,t}$ (dérivée partielle par rapport au temps de T évaluée au point x à l'instant t) en fonction de $T(x, t + \Delta t)$, $T(x, t)$ et Δt .

On note T_i^k la température $T(x_i, t_k)$, évaluée au point d'abscisse x_i à l'instant t_k . De même, on note $T_{i+1}^k = T(x_i + \Delta x, t_k)$ et $T_{i-1}^k = T(x_i - \Delta x, t_k)$.

- Q4. En déduire l'expression approchée de $\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x,t}$ en fonction de T_i^k , T_i^{k+1} et Δt .

- Q5. À l'aide d'un développement limité de la fonction $x \mapsto T(x, t)$, donner une expression de $T(x + \Delta x, t)$ à l'ordre 2 en Δx , en fonction de T et de ses dérivées partielles par rapport à x évaluées en (x, t) . De même, donner une expression de $T(x - \Delta x, t)$.

En déduire une expression approchée de $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x,t} : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)}{(\Delta x)^2}$

- Q6. En déduire l'expression approchée de $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x,t}$ en fonction de T_i^k , T_{i+1}^k , T_{i-1}^k et Δx .

- Q7. Montrer que l'équation de diffusion (équation (2)) peut se mettre sous la forme suivante :

$$T_i^{k+1} = T_i^k + r(T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k) \quad (1)$$

en précisant la valeur du paramètre r en fonction de Δx , Δt et K .

Pour des **raisons de convergence numérique**, admises, on admet que $\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}$ doit être inférieure à $\frac{1}{2}$.

On introduit T un tableau qui rassemble les températures en différents points de la barre et à différents instants. T a $Nx \times Nt$ éléments avec Nx le nombre de points sur l'intervalle $[0, e]$ et Nt le nombre d'instants sur l'intervalle $[0, t_f]$ où on cherche la température.

- $T[i][k] = T(x_i, t_k) = T(i \cdot \Delta x, k \cdot \Delta t)$, avec $i \in \llbracket 0, Nx - 1 \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, Nt - 1 \rrbracket$.
- $T[i] = T(x_i, t)$ qui donne l'évolution temporelle de la température en x_i .
- $T[:, k] = T(x, t_k)$ qui donne le profil de température à l'instant t_k .

On considère le contact thermique parfait des deux côtés du mur.

- Q8. Compléter le code ci-dessous qui définit les constantes, les paramètres de résolution, et complète le tableau avec les conditions initiale et aux limites.

```

1 lamb = 1.65 # W/m/K
2 cp = 1000 # J/kg/K
3 rho = 2150 # kg/m³
4 e = 0.40 # m
5 Dth = lamb/(cp*rho)
6 tau = e**2/Dth # temps caractéristique de diffusion
7 Tint = 293 # K
8 Text1 = 283 # K
9 Text2 = 263 # K
10 Nx = 50 # nombre de points
11 Nt = 100000 # nombre d'instants
12 tf = tau # durée de la simulation : tau
13 Dx = # (à compléter) : pas en espace
14 Dt = # (à compléter) : pas en temps
15 # initialisation du tableau de température
16 T = np.zeros((Nx,Nt)) # Nx lignes et Nt colonnes
17 for k in range(Nx): # CI (à t=0)
18     T[k][0] =
19 for i in range(Nt): # CAL (en x=0 et en x=e)
20     T[0][i] =
21     T[Nx-1][i] =

```

Q9. Compléter le bout de code ci-dessous pour terminer de compléter le tableau des températures, à l'aide de la relation (1).

```

1 r = K*Dt/Dx**2
2 for k in range( ):
3     for i in range( ):
4         T[i][k+1] =

```

V.4 Résultats et discussion

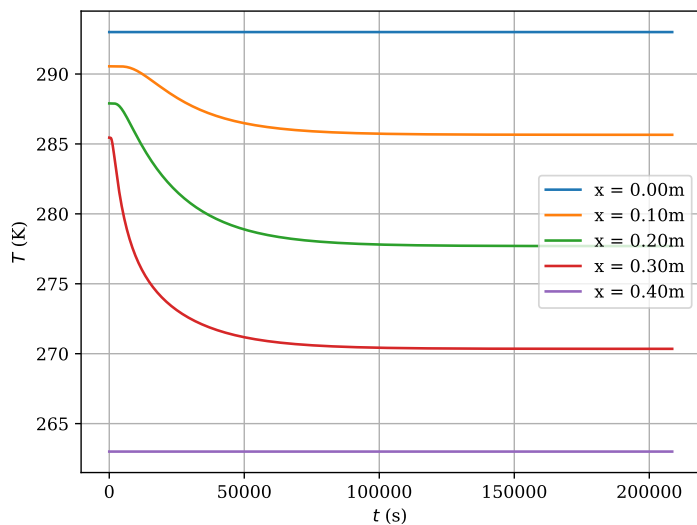


FIGURE 2 – Évolution temporelle en différentes positions

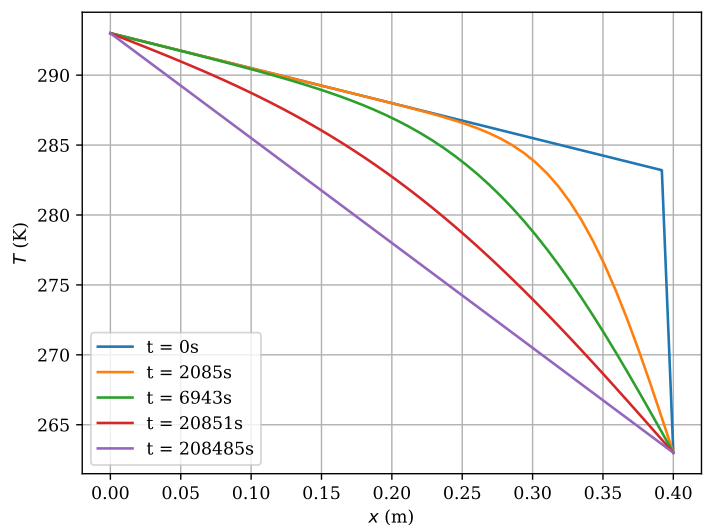


FIGURE 3 – Température dans le mur à différents instants

Q10. Commenter les évolutions temporelles. Identifier la durée caractéristique de l'évolution temporelle.

Q11. Commenter les courbes de $T(x)$ aux différents instants.