

## Thermodynamique

### TD TH3 Diffusion thermique

| Exercice n°                                                                                                                                                                                                                                                             | §                            | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Capacités                                                                                                                                                                                                                                                               |                              |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur $\vec{j}_Q$ .                                                                                                                                                                                  | I.2                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. | II.3                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.                                                                                          | II.4                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Utiliser la loi de Fourier.                                                                                                                                                                                                                                             | I.3<br>III.3<br>IV.1<br>IV.4 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne.                                                                                                                                                                           | III                          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel.                                                                                                                                                                                | III.2                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.                                                                                                                                                                                                             | III.3                        |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Établir une équation de diffusion thermique.                                                                                                                                                                                                                            |                              |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque.                                                                                                                                    | IV.1                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.                                                                                                                                              | IV.2                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide fluide.                                                                                                                                                                            | IV.4                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

### Parcours possibles

- ♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : 1, 2, 4
- ♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : 2, 3, 6, 8
- ♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : 3, 4, 5, 6, 9, 10

### Données – Loi de Newton

Le flux surfacique conducto-convectif est donné par la loi de Newton :  $|\varphi| = h|T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}}|$

## I Régime stationnaire sans source interne

### Exercice n°1 Isolation du mur d'une maison 🎵

On s'intéresse à l'isolation d'un mur donnant sur la rue. On considère qu'il n'y a d'échanges d'énergie qu'à travers le mur. La température intérieure est de  $T_{\text{int}} = 20\text{ °C}$  alors que la température extérieure est de  $T_{\text{ext}} = 0\text{ °C}$ . Les phénomènes sont supposés s'effectuer en régime stationnaire.

Le mur, mal isolé, est composé :

- d'une fenêtre de surface  $S_v = 1\text{ m}^2$  constitué de verre d'épaisseur  $e_v = 2\text{ mm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_v = 0,7\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- d'un mur de surface  $S_b = 15\text{ m}^2$  constitué de béton d'épaisseur  $e_b = 20\text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_b = 1,4\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,

Q1. Proposer un modèle d'association de résistances correspondant à cette situation.

Q2. Exprimer la résistance thermique de la paroi  $R_p$ . La calculer numériquement.

Q3. Calculer la puissance perdue à travers cette paroi.

La propriétaire décide d'isoler cette paroi :

- la fenêtre est remplacée par une fenêtre en double vitrage composé de deux plaques de verre séparées d'une épaisseur  $e_a = 10\text{ mm}$  d'air et de conductivité thermique  $\lambda_a = 0,026\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- le mur de béton est recouvert d'une épaisseur  $e_p = 10\text{ cm}$  de polystyrène de conductivité thermique  $\lambda_p = 0,036\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,

Q4. Proposer un modèle d'association de résistances correspondant à cette situation.

Q5. Exprimer la résistance thermique de la paroi  $R'_p$ . La calculer numériquement.

Q6. Calculer la puissance perdue à travers cette paroi. Commenter.

### Exercice n°2 Mammifères marins 🎵

Les mammifères sont des animaux à sang chaud dont la température reste constante. Pour maintenir leur température constante, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique  $a = 100\text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Loin du mammifère la température est de  $T_0 = 293\text{ K}$ . Près du mammifère la température est notée  $T_C$ . On modélise le mammifère par une sphère de rayon  $R$ .

On note  $r$  la distance au centre de l'animal. On étudie la température de l'eau (ou de l'air) au voisinage de l'animal en se plaçant en régime stationnaire.



Q1. Que peut-on dire du flux thermique  $\phi_{th}$ ? L'exprimer en fonction de  $r$ ,  $\frac{dT}{dr}$  et  $\lambda$ .

Q2. Relier  $\phi_{th}$  à  $a$  et  $R$ .

Q3. Exprimer le champ de température  $T$  en fonction de  $a$ ,  $R$ ,  $\lambda$ ,  $r$ , et  $T_0$ .

Q4. Exprimer la température  $T_C$  à proximité du mammifère en fonction de  $a$ ,  $\lambda$ ,  $R$  et  $T_0$ .

Commenter la dépendance de  $T_C$  avec  $\lambda$  à  $R$  fixé puis avec  $R$  à  $\lambda$  fixé.

Q5. Déterminer le rayon minimal d'un mammifère marin et terrestre pour que la température à sa proximité soit de  $30\text{ °C}$ .

Pourquoi n'existe-t-il pas de mammifères marin de petite taille? Pour information, le plus petit est le marsouin du pacifique mesure à peu près 1 m de long.

### Données —

$\lambda_{\text{eau}} = 5,0 \cdot 10^2\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour l'eau et  $\lambda_{\text{air}} = 5,0\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  pour l'air.

### Exercice n°3 Isolation thermique d'un ballon d'eau chaude 🎵

Le ballon d'eau chaude est modélisé par un cylindre creux en acier d'épaisseur  $e = 30$  mm, de hauteur  $h = 157$  cm et de rayon intérieur  $\ell = 57$  cm dont les parois planes sont parfaitement calorifugées.

- Q1. Montrer que le flux thermique sortant d'un cylindre de rayon  $r$  (avec  $\ell < r < \ell + e$ ) ne dépend pas de  $r$  en régime stationnaire.
- Q2. Établir l'expression de la température dans l'épaisseur d'acier en fonction de  $\phi$ ,  $T_i = T(\ell)$ ,  $h$ ,  $\lambda$ ,  $\ell$  et  $r$ .
- Q3. En déduire l'expression de  $\phi$  en fonction de  $T_i - T_e$  (avec  $T_e = T(\ell + e)$ ),  $h$ ,  $\lambda$ ,  $\ell$ ,  $e$ .
- Q4. Par une analogie à préciser, en déduire la résistance thermique du ballon. La calculer numériquement.

On décide d'isoler le dispositif. Une première solution consiste à utiliser de la laine de verre d'épaisseur  $e' = 300$  mm. Une autre possibilité est de choisir du polyester d'épaisseur  $e'' = 50$  mm.

- Q5. Calculer la nouvelle résistance thermique.
- Q6. Quel est le meilleur choix ?

#### Données – Conductivités thermiques

- Acier :  $\lambda = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- Laine de verre :  $\lambda' = 0,035 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- Polyester :  $\lambda'' = 0,022 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

## II Équation de diffusion

### Exercice n°4 Température dans une botte de paille 🎵

On étudie une botte de paille, que l'on assimile à une sphère de rayon  $R$ . La fermentation au sein de la paille fournit une puissance volumique  $P_b$  uniforme. On étudie la température dans la botte de paille. On se place en régime permanent (sauf dans la dernière question).

- Q1. Par un bilan local à un système judicieusement choisi, établir l'équation différentielle vérifiée par  $T$  au sein de la botte de paille :  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{P_b}{\lambda_b} r^2$
- Q2. Établir l'expression de la température  $T(r)$  dans la botte de paille en régime stationnaire, en prenant  $T(R) = T_{\text{ext}}$ , puis représenter l'allure de  $T$  en fonction de  $r$ .
- Q3. Quelle est la température au centre de la botte ?
- Q4. Quand la fermentation s'arrête, combien de temps faut-il à la botte pour se refroidir ?

#### Données – Pour la paille

- $\rho_b = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  la masse volumique de la paille,
- $c_b = 1600 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la capacité thermique massique de la paille,
- $\lambda_b = 0,060 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  sa conductivité thermique massique de la paille,
- $R = 0,5 \text{ m}$
- $P_b = 40 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$

## Exercice n°5 Compost ♪ ♪

Du fait de la décomposition des aliments, un bloc de compost de grande surface  $S$  et de hauteur  $H$  produit une puissance volumique  $\mathcal{P}_v = a \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)$ . L'axe  $(Oz)$  est choisi ascendant.

La surface en  $z = 0$  (au bas du compost) est parfaitement isolée thermiquement. Celle en  $z = H$  subit un échange conducto-convectif, de coefficient  $h$ , avec l'air extérieur, dont la température est notée  $T_a$ .

On note  $\lambda$  la conductivité thermique du compost,  $c$  la capacité thermique massique du compost,  $\rho$  sa masse volumique.

Q1. Établir l'équation vérifiée par la température  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mathcal{P}_v$

Q2. ♪ ♪ Résolution.

- Exprimer  $T(z)$ , en fonction de deux constantes d'intégration.
- Exprimer  $j_{th}(z = 0)$ . Que doit-il valoir ? En déduire une des deux constantes.
- Exprimer  $j_{th}(z = H)$ . À quoi est-il égal ? En déduire l'autre constante.
- Exprimer  $T(z)$ .
- Représenter l'allure de  $T$ .

Q3. Exprimer la puissance dégagée par le compost.

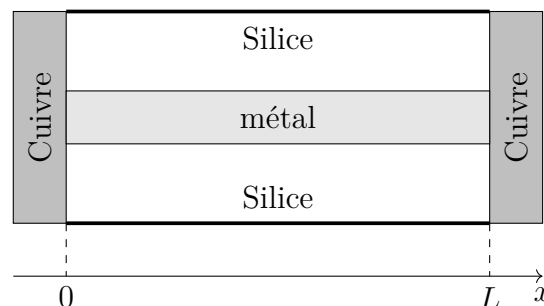
## Exercice n°6 Fusible ♪ ♪ ♪

Le coupe-circuit à fusible, en abrégé fusible, est, en électricité et électronique, un organe de sécurité dont le rôle est d'ouvrir un circuit électrique lorsque le courant électrique dans celui-ci atteint une valeur d'intensité donnée pendant un certain temps. Son nom vient du fait qu'il fonctionne par fusion d'un filament conducteur, sous l'effet de l'élévation de température provoquée par la surintensité.

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section  $S$ , de longueur  $L$  et de conductivités thermique  $\lambda$  et électrique  $\gamma$ , uniformes au sein du fil.

Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante  $T_0$ . Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.

Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité  $I$ . On se place en régime permanent.



Q1. En effectuant un bilan d'énergie, établir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$  :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\gamma \lambda S^2}$$

Q2. Déterminer l'évolution de la température en fonction de  $x$ .

Q3. Tracer l'allure de  $T(x)$ . Où la température est-elle maximale ?

Q4. Déterminer le diamètre du fil de plomb à prévoir pour qu'il fonde (à la température  $T_F$ ) quand l'intensité du courant dépasse l'intensité maximale  $I_{\max}$  autorisée.

Faire l'application numérique.

Q5. Bilan de puissance

- Exprimer littéralement la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}(0)$  transférée par conduction en  $x = 0$ . Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil.
- Même question pour la puissance thermique  $\mathcal{P}_{th}(L)$  transférée en  $x = L$ .
- Quelle relation a-t-on entre  $\mathcal{P}_{th}(0)$ ,  $\mathcal{P}_{th}(L)$  et la puissance électrique  $P_e$  fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

### Données —

- Résistance électrique d'un conducteur ohmique de conductivité électrique  $\gamma$ , de section  $S$  et de longueur  $dx$  :  $\delta R = \frac{dx}{\gamma S}$
- Conductivité électrique du Plomb :  $\gamma = 2,21 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}$  ;
- Conductivité thermique du Plomb :  $\lambda(\text{Pb}) = 34 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- Température ambiante :  $T_0 = 26^\circ \text{C}$  ;
- Température de fusion du plomb :  $T_F = 328^\circ \text{C}$  ;
- Longueur du fusible :  $L = 2,5 \text{ cm}$  ;
- Intensité maximale :  $I_{\max} = 5 \text{ A}$ .

### Exercice n°7 Effet Cave 🎵 🎵 🎵

Exercice « plus facile » après avoir traité le chapitre sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique.

Le vin (à consommer avec modération) doit être conservé à une température constante, de l'ordre de  $14^\circ \text{C}$ . Or la température extérieure varie au cours d'une journée et au cours de l'année. À quelle profondeur doit-on placer une cave pour y stocker du vin ?

On étudie l'évolution de la température dans le sol, avec l'axe ( $Oz$ ) descendant. La température en  $z = 0$  varie dans le temps (variations journalière et annuelle). Grâce à la théorie de Fourier (toujours le même!), on peut mener l'étude dans le cas où la température varie sinusoïdalement dans le temps :  $T(z = 0, t) = T_0 + T_m \cos(\omega t)$ , avec  $T_0$  la température moyenne et  $T_m$  l'amplitude de la variation.

Q1. Écrire l'équation de diffusion dans le sol.

On recherche la solution de l'équation de diffusion sous la forme :  $T(z, t) = T_0 + \theta(z, t) = T_0 + \theta(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$ . Par linéarité de l'équation, on peut utiliser la notation complexe :  $\underline{\theta}(z, t) = \theta_m e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$

Q2. En déduire que  $\underline{k}$  vérifie la relation  $\underline{k}^2 = -i \frac{\rho c \omega}{\lambda}$

Q3. En déduire  $\underline{k}$  (on pourra astucieusement utiliser le fait que  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ ).

Q4. En déduire l'expression de  $\underline{\theta}$ , puis  $\theta(z, t)$  que l'on écrira sous la forme :  $\theta(z, t) = \theta_m e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$

Identifier la distance caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction des constantes du problème.

Q5. Évaluer  $\omega$  pour des variations journalières et annuelles. Calculer  $\delta$  dans ces deux cas. Conclure.

### Données — Sol

- Conductivité thermique  $\lambda = 0,8 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
- Capacité thermique massique  $c = 900 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Masse volumique  $\rho = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

### III Résolution de problème

#### Exercice n°8 Ordres de grandeur 🎵 🎵

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 g. Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1,2 et 1,8 kg ?

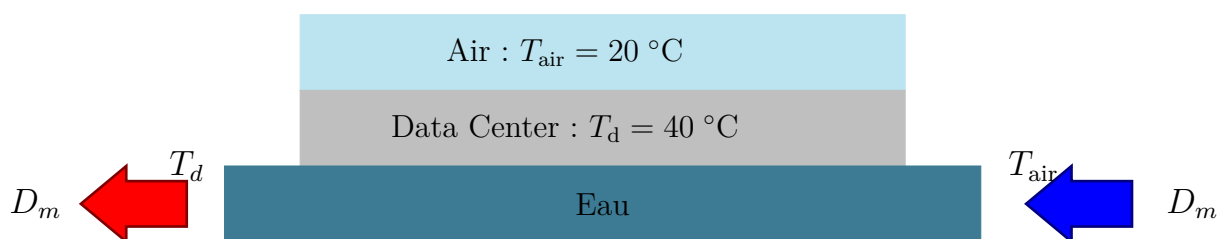
#### Exercice n°9 Data Center 🎵 🎵 🎵

On considère un système de refroidissement d'un data center parallélépipédique. Il est en contact sur sa face supérieure avec l'air à la température  $T_{\text{air}}$  et sur sa face inférieure avec un circuit d'eau.

Les échanges thermiques entre le data center et l'air obéissent à la loi de Newton.

L'eau, qui parcourt le circuit avec un débit massique  $D_m$ , y pénètre à la température  $T_{\text{air}}$  de l'air et en ressort à la température  $T_d$ .

Sachant que le data center consomme une puissance électrique  $\mathcal{P} = 20 \text{ MW}$ , quel est le débit massique  $D_m$  à imposer dans le circuit d'eau pour que la température du data center reste uniforme et constante à la valeur  $T_d$  ?



#### Données —

- Capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Coefficient conducto-convectif (loi de Newton) :  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Surface d'échange entre le Data Center et l'air  $S = 10^4 \text{ m}^2$
- Température de l'air :  $T_{\text{air}} = 20 \text{ °C}$  ; Température du Data Center :  $T_d = 40 \text{ °C}$

#### Exercice n°10 Température d'une cuillère 🎵 🎵 🎵

Une cuillère est plongée dans un thé. Une partie de son manche échange par convection avec l'air ambiant. Le coefficient de convection vaut  $h = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Quelle est la température de l'extrémité de la cuillère en aluminium ( $\lambda = 240 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) ?