

 Thermodynamique
TD TH2 Diffusion de particules – Corrigé

I Exercices d'application du cours

Exercice n°1 Calculs d'analyse vectorielle

R1. Exprimer le gradient des champs scalaires :

(a) $V(x, y, z) = xy + \frac{yz^2}{b} + \frac{xyz}{a}$

Solution: $\vec{\text{grad}}(V) = \left(y + \frac{yz}{a}\right) \vec{u}_x + \left(x + \frac{z^2}{b} + \frac{xz}{a}\right) \vec{u}_y + \left(\frac{2yz}{b} + \frac{xy}{a}\right) \vec{u}_z$

(b) En cylindrique : $V(r, \theta, z) = \frac{\cos(\theta)}{r^2}$

Solution: $\vec{\text{grad}}(V) = -\frac{\cos(\theta)}{r^3} \vec{u}_r - \frac{\sin(\theta)}{r^3} \vec{u}_\theta$

(c) En sphérique : $V(r, \theta, \varphi) = r^2 e^\varphi$

Solution: $\vec{\text{grad}}(V) = 2re^\varphi \vec{u}_r + \frac{r}{\sin(\theta)} e^\varphi \vec{u}_\varphi$

R2. Exprimer la divergence des champs vectoriels :

(a) $\vec{v} = x\vec{u}_z + z\vec{u}_x$

Solution: $\text{div}(\vec{v}) = 0$

(b) En cylindrique $\vec{v} = r\vec{u}_\theta$

Solution: $\text{div}(\vec{v}) = 0 + 0 + 0$

(c) En sphérique $\vec{v} = r\vec{u}_r$

Solution: $\text{div}(\vec{v}) = 3r$

(d) En sphérique $\vec{v} = r\vec{u}_\theta$

Solution: $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}$

R3. Exprimer le Laplacien des champs scalaires :

(a) $V(x, y, z) = xy + \frac{yz^2}{b}$

Solution: $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = (0 + 0) + (0 + 0) + \frac{2y}{b}$

(b) En cylindrique : $V(r, \theta, z) = \frac{\cos(\theta)}{r^2}$

Solution:
$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \times -\frac{2 \cos(\theta)}{r^3} \right) + \frac{1}{r^2} \times \frac{-\cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{r} \times \frac{4 \cos(\theta)}{r^3} - \frac{\cos(\theta)}{r^4} = \frac{3 \cos(\theta)}{r^4}$$

(c) En sphérique : $V(r, \theta, \varphi) = r^2 e^\varphi$

Solution:
$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \times 2r e^\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \times r^2 e^\varphi = 6e^\varphi + \frac{e^\varphi}{\sin(\theta)}$$

Exercice n°2 Ordre de grandeur 🎵

On dépose délicatement du sirop de menthe au fond d'un verre d'eau. Au bout de 18h, le sirop a diffusé sur une épaisseur de 22 mm. Estimer le coefficient D de diffusion du sirop de menthe dans l'eau.

Solution: $L^2 \sim \tau D$, soit $D \sim \frac{L^2}{\tau} = 7.10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (attention aux unités)

Exercice n°3 Transpiration des feuilles 🎵

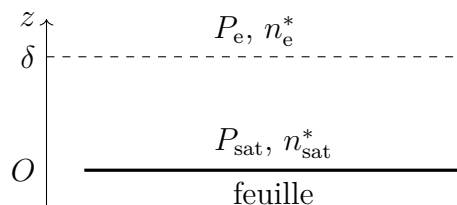
Lorsque l'air ambiant n'est pas saturé en vapeur d'eau, l'eau de la sève s'évapore. Ce mécanisme participe au refroidissement de la feuille. Lorsque la feuille est soumise à un courant d'air, il existe au voisinage de la surface de la feuille une fine couche d'air d'épaisseur δ appelée couche limite. Les échanges de particules entre l'air « loin » de la feuille et l'air en contact avec la feuille ne se font que par diffusion. On suppose que seule la surface supérieure de la feuille présente des pores à travers lesquels l'évaporation a lieu, ce qui est le cas chez de nombreuses espèces.

Loin de la feuille, c'est-à-dire pour $z > \delta$, la pression partielle P_e en eau et la densité volumique n_e de molécules d'eau dans l'air sont supposées uniformes. On suppose aussi qu'à la surface de la feuille, l'air est saturé en eau : en $z = 0$, la pression partielle en eau vaut P_{sat}^* et la densité volumique de molécules d'eau n_{sat}^* .

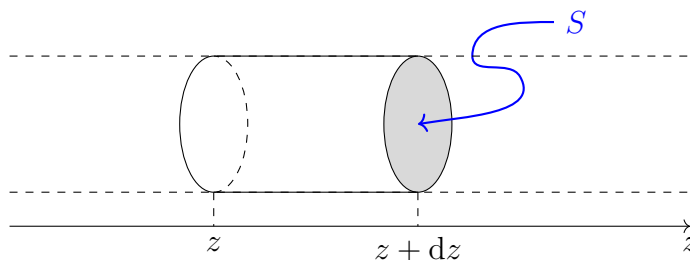
On notera T_0 la température uniforme.

La densité volumique de molécules d'eau dans l'air à une distance z de la feuille est notée $n^*(z)$.

R1. En régime permanent, à l'aide d'un bilan de particules entre les altitudes z et $z + dz$, montrer que $\frac{dn^*}{dz}$ ne dépend pas de z .



Solution:



On étudie le système Σ entre z et $z + dz$, de section S , entre les instants t et $t + dt$.

En régime stationnaire, $d(\delta N) = 0$.

Nombre de particules entrant algébriquement dans le système :

$$\begin{aligned}\delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} &= \delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(z) + \delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(z + dz) \\ &= \vec{j}_N(z) \cdot S \vec{u}_z dt + \vec{j}_N(z + dz) \cdot (-S \vec{u}_z) dt \\ &= j(z) S dt - j(z + dz) S dt \\ &= -\frac{dj_N}{dz} dz S dt\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{dj_N}{dz} = 0$

R2. En déduire l'expression de $n^*(z)$, et représenter graphiquement son évolution pour $z \in [0; 2\delta]$.

Solution: D'après la loi de Fick : $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n^*) = -D \frac{dn^*}{dz} \vec{u}_z$

Ainsi $D \frac{d^2 n^*}{dz^2} = 0$, soit $n^*(z) = Az + B$

Or $n^*(0) = n_{\text{sat}}^*$ et $n^*(\delta) = n_e^*$. Ainsi $n^*(z) = n_{\text{sat}}^* + (n_e^* - n_{\text{sat}}^*) \frac{z}{\delta}$

R3. Exprimer le flux Φ_N de molécules d'eau dans la couche limite en fonction de D , n_e^* , n_{sat}^* , S et δ .

Solution:

$$\begin{aligned}\Phi_N &= \iint \vec{j}_N \cdot d\vec{S} = \\ &= \iint -D \frac{dn}{dz} dS \\ &= -D \frac{dn}{dz} \times S \\ &= -DS \frac{n_e - n_{\text{sat}}}{\delta}\end{aligned}$$

R4. En supposant que la vapeur d'eau dans l'air se comporte comme un gaz parfait, exprimer n_e^* en fonction de P_e , $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$, R et T_0 .

Solution: $n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{n \mathcal{N}_{\mathcal{A}}}{V} = \frac{P_e \mathcal{N}_{\mathcal{A}}}{RT_0}$

De même $n_{\text{sat}} = \frac{P_{\text{sat}} \mathcal{N}_{\mathcal{A}}}{RT_0}$

R5. En déduire que le flux de particules d'eau s'écrit $\Phi_N = -\frac{D \mathcal{N}_{\mathcal{A}} S}{\delta RT_0} (P_e - P_{\text{sat}})$

Solution: Ainsi $\Phi_N = -DS \frac{n_e - n_{\text{sat}}}{\delta} = -\frac{D \mathcal{N}_{\mathcal{A}} S}{\delta RT_0} (P_e - P_{\text{sat}})$

R6. Exprimer la masse D_{me} d'eau qui s'évapore par unité de temps en fonction de Φ_N , $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ et de la masse molaire de l'eau M_e .

Solution:

$$\begin{aligned}
 D_{me} &= \frac{\delta m_{\text{evap}}}{dt} \\
 &= \frac{\delta n_{\text{evap}} M}{dt} \\
 &= \frac{\delta N_{\text{evap}} M}{\mathcal{N}_A dt} \\
 &= \Phi_N \times \frac{M}{\mathcal{N}_A} \\
 &= -\frac{D \mathcal{N}_A S}{\delta R T_0} (P_e - P_{\text{sat}}) \times \frac{M}{\mathcal{N}_A} \\
 &= -\frac{DSM}{\delta R T_0} (P_e - P_{\text{sat}})
 \end{aligned}$$

Soit $D_{me} = \Phi_N \times \frac{M}{\mathcal{N}_A} > 0$

R7. Rappeler la valeur de la masse volumique de l'eau liquide et proposer une estimation raisonnable pour la surface S d'une feuille de chêne.

♪ En déduire une estimation de l'ordre de grandeur du volume d'eau qui s'évapore, chaque jour, d'un chêne mature dont le feuillage comporte environ 100 000 feuilles. On supposera que l'humidité relative P_e/P_{sat} de l'air est de l'ordre de 75%. Commenter.

Solution: Masse volumique de l'eau liquide : $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$S \approx 40 \text{ cm}^2$

Volume qui s'évapore pendant $\Delta t = 24 \text{ h}$: $V_{\text{évap}} = \frac{m_{\text{évap}}}{\rho} = \frac{D_{me} \Delta t}{\rho}$, soit

$V_{\text{évap}} = -\frac{DSM \times 10^5 \Delta t}{\delta R T_0 \rho} (P_e - P_{\text{sat}}) = 2,2 \text{ m}^3 !!$

Données —

- Masse molaire de l'eau $M_e = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Pression de vapeur saturante de l'eau à 20°C : $P_{\text{sat}} = 2,3 \text{ kPa}$
- Coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air $D = 0,3 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; Constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- $\delta = 2,0 \text{ mm}$; $T_0 = 20^\circ \text{C}$

Exercice n°4 Réaction photochimique ♪

On étudie la diffusion de radicaux lors d'une réaction photochimique : la substitution radicalaire du chlore sur un alcane. L'initiation photochimique produit p (constante) radicaux libres Cl par m^3 et par seconde dans tout le récipient réactionnel cylindrique d'axe Oz de hauteur h et de rayon R . La densité des radicaux Cl est notée n et en négligeant les effets de bords : $n = n(r, t)$.

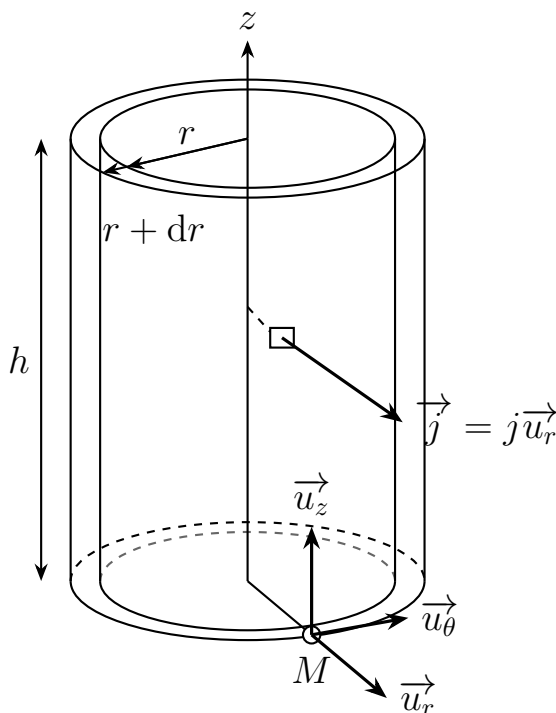
On se place en régime stationnaire et on note D le coefficient de diffusion des radicaux Cl.

R1. Vérifier que le vecteur $\vec{j}$ s'écrit $\vec{j} = j(r) \vec{u}_r$.

Solution: D'après la loi de Fick : $\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n) = -D \frac{dn}{dr} \vec{u}_r = j(r) \vec{u}_r$

R2. Effectuer un bilan de particules à un système qu'on prendra soin de définir proprement et de représenter, et en déduire l'équation suivante : $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) = -\frac{pr}{D}$.

Solution: On considère le système constitué de la pellicule cylindrique comprise entre r et $r + dr$.



En régime stationnaire, le nombre de particules comprises dans le système n'évolue pas donc $d(\delta N) = 0$
Nombre de particules entrant dans le système entre t et $t + dt$:

$$\begin{aligned} \delta N_e &= \delta N_e(r) + \delta N_e(r + dr) \\ &= \iint_{\mathcal{S}(r)} \vec{j}_N d\vec{S}_r dt + \iint_{\mathcal{S}(r+dr)} \vec{j}_N d\vec{S}_{r+dr} dt \\ &= j_N(r) \times S(r) dt - j_N(r + dr) \times S(r + dr) dt \\ &= -\frac{d(j_N S(r))}{dr} dr dt \\ &= -\frac{dj_N r}{dr} 2\pi h dr dt \\ &= D \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) \times 2\pi h dr dt \end{aligned}$$

Nombre de particules produites entre t et $t + dt$ dans le système : $\delta N_p = p \times (2\pi r h dr) \times dt$

Ainsi, par conservation : $0 = D \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) \times 2\pi h dr dt + p \times (2\pi r h dr) \times dt$

Soit $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) = -\frac{pr}{D}$

R3. En déduire $n(r)$, on notera $n_0 = n(R)$.

Solution: Par intégration : $r \frac{dn}{dr} = -\frac{pr^2}{2D} + A$

Or en $r = 0$, $\frac{dn}{dr}$ ne peut pas diverger, donc $0 = 0 + A$

Ainsi $\frac{dn}{dr} = -\frac{pr}{2D}$

Par deuxième intégration : $n(r) = -\frac{pr^2}{4D} + B$

$n(R) = n_0$, donc $B = \frac{pr^2}{4D}$

Soit $n(r) = n_0 + \frac{p}{4D}(R^2 - r^2)$

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°5 Bulles de champagne 🎵 🎵

Une fois le champagne versé, on observe des chapelets de bulles au sein d'une flute de champagne. L'apparition de ces bulles est principalement due à la présence de fibres de cellulose provenant de particules en suspension dans l'air voire du chiffon utilisé pour essuyer la flûte. Ces fibres de cellulose possèdent une cavité qui renferme de l'air. Les molécules de CO_2 dissous en phase aqueuse vont diffuser vers la poche d'air. Celle-ci va grossir jusqu'à atteindre une extrémité de la poche et former alors une bulle.

La pression de l'air dans la poche d'air est prise égale à 1,0 bar dans une situation d'équilibre et on se place à 20 °C

Une fois la bulle formée, elle se détache de la fibre et monte dans le liquide dans lequel elle va grossir. Nous allons étudier cette augmentation de taille. Quand elle se détache de la fibre, la pression au sein de la bulle est égale à 1 bar. La bulle est supposée sphérique de rayon R_b .

On considère que la concentration en CO_2 dissous vaut c_c loin de la bulle et c_1 pour $r = R_b$. On suppose dans un premier temps que R_b est constant et on se place en régime stationnaire.

Partie A En régime stationnaire 🎵

R1. Justifier qu'un flux Φ_N de dioxyde de carbone se met en place au sein du champagne liquide et montrer que ce flux se conserve.

Solution: La concentration loin en CO_2 de la bulle est c_c plus faible que la concentration proche de la bulle. Pour atteindre l'équilibre, le CO_2 diffuse des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées. Le flux est donc dirigé vers la bulle.

On se place en régime permanent, et il n'y a pas de source interne de production de CO_2 dans le champagne, par conséquent il y a conservation du flux de CO_2 .

R2. Donner la loi de Fick dans le contexte étudié en précisant la signification physique des différents termes ainsi que leurs unités. On notera $n^*(r)$ la concentration particulière du CO_2 , r étant la distance au centre de la bulle avec $r > R_b$ et D , le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans le champagne liquide.

Solution: Loi de Fick : $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} (n^*)$

R3. Donner la relation entre la concentration en masse de CO_2 en solution c , n^* , $\mathcal{N}_A$ et la masse molaire M du dioxyde de carbone.

Solution: Concentration massique : $c = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{NM}{V\mathcal{N}_A}$, soit $c = \frac{n^*M}{\mathcal{N}_A}$

R4. Montrer que la concentration en masse $c(r)$ au sein du champagne liquide vérifie l'équation : $\frac{dc}{dr} = \frac{A}{r^2}$, où A est une constante que l'on exprimera en fonction Φ_N , $\mathcal{N}_A$ et M .

Solution:

$$\begin{aligned}\Phi &= j_N(r) \times 4\pi r^2 \\ &= -D \frac{dn^*}{dr} \times 4\pi r^2 \\ \frac{dn^*}{dr} &= -\frac{\Phi}{4\pi D r^2} \\ \frac{\mathcal{N}_A}{M} \frac{dc}{dr} &= -\frac{\Phi}{4\pi D r^2} \\ \frac{dc}{dr} &= -\frac{\Phi M}{4\pi D \mathcal{N}_A r^2}\end{aligned}$$

avec $A = -\frac{\Phi M}{4\pi D \mathcal{N}_A}$

R5. Établir l'expression suivante de $c(r)$: $c(r) = (c_1 - c_c) \frac{R_b}{r} + c_c$ pour $r > R_b$.

Solution: Par intégration : $c(r) = -\frac{A}{r} + B$,

avec $\lim_{r \rightarrow \infty} c(r) = c_c = B$ et $c(R_b) = c_1 = c_c - \frac{A}{R_b}$, soit $A = (c_c - c_1)R_b$

Ainsi $c(r) = c_c + (c_1 - c_c) \frac{R_b}{r}$

Partie B En régime non stationnaire 🎵 🎵

Nous utiliserons néanmoins l'expression trouvée dans la question R5 en prenant en compte le fait que le rayon $R_b(t)$ dépend du temps.

R6. En supposant que toutes les molécules de dioxyde de carbone arrivant à la surface de la bulle y pénètrent, montrer que le flux moléculaire, qui s'identifie au taux de variation $\Phi = \frac{dN_g}{dt}$ du nombre N_g de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle, admet comme expression $\frac{dN_g}{dt} = \frac{\mathcal{N}_A P}{RT} \frac{dV}{dt}$, où P et T sont la pression et la température de la bulle supposées constantes, et $\frac{dV}{dt}$ le taux de variation du volume.

Solution: $\Delta \Phi_N = -\Phi$.

Loi des gaz parfaits au CO_2 dans la bulle : $N_g = n_g \mathcal{N}_A = \frac{PV}{RT} \mathcal{N}_A$

À P et T constantes : $\frac{dN_g}{dt} = \frac{P}{RT} \mathcal{N}_A \times \frac{dV}{dt}$

R7. En déduire la relation : $R_b \frac{dR_b}{dt} = \frac{(c_c - c_1) D R T}{P M}$ dont on vérifiera l'homogénéité.

Solution: Or $\frac{dN_g}{dt} = -\Phi_N$ (le flux de molécules vers l'extérieur de la bulle)

$$\begin{aligned}\frac{dN_g}{dt} &= \frac{P}{RT} \mathcal{N}_s \times \frac{dV}{dt} \\ -\Phi_N &= \frac{P}{RT} \mathcal{N}_s \times \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R_b^3\right)}{dt} \\ -\Phi_N &= \frac{P}{RT} \mathcal{N}_s \times 4\pi R_b^2 \frac{dR_b}{dt} \\ 4\pi AD \mathcal{N}_s / M &= \frac{P}{RT} \mathcal{N}_s \times 4\pi R_b^2 \frac{dR_b}{dt} \\ \frac{D(c_c - c_1)R_b}{M} &= \frac{P}{RT} R_b^2 \frac{dR_b}{dt} \\ \frac{D(c_c - c_1)}{M} &= \frac{P}{RT} R_b \frac{dR_b}{dt} \\ R_b \frac{dR_b}{dt} &= \frac{DRT(c_c - c_1)}{MP}\end{aligned}$$

R8. On néglige le volume initial de la bulle, de sorte que $R_b(t=0) \approx 0$. En déduire $R_b(t)$.

Solution: Par intégration entre $t=0$ et t : $\frac{R_b^2}{2} - 0 = \frac{DRT(c_c - c_1)}{MP} t$, soit $R_b = \sqrt{2 \frac{DRT(c_c - c_1)}{MP} t}$

R9. On donne en plus des valeurs numériques précédentes : $D = 3.10^{-9}$ uSI. Calculer en millisecondes la durée Δt mise par une bulle pour atteindre un rayon de $10 \mu\text{m}$.

Solution: Durée nécessaire : $\Delta t = \frac{MP R_b^2}{2DRT(c_c - c_1)} = 2,8 \text{ ms}$

Exercice n°6 Diffusion du dioxygène dans un capillaire pulmonaire 🎵 🎵 🎵

Soit un capillaire pulmonaire d'axe Ox , de longueur L et de rayon a contenant des particules qui diffusent selon l'axe du cylindre avec un coefficient de diffusion D . On note $n_0 = n(x=0)$ et $n_{\text{ext}} = n(x=L)$, les densités volumiques de O_2 aux deux extrémités du capillaire, supposées constantes.

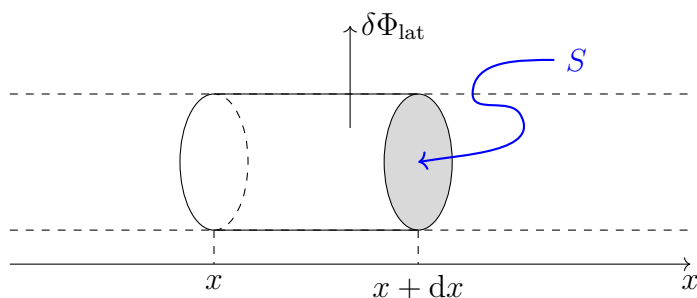
Les molécules O_2 peuvent entrer au travers de la surface latérale du tube cylindrique avec un flux en x : $\delta\Phi_{\text{lat}} = -h(n(x) - n_{\text{ext}})dS_{\text{lat}}$, avec $dS_{\text{lat}} = 2\pi a dx$ et $n_{\text{ext}} > n_0$

R1. Déterminer l'unité de h .

Solution: $[h] = \frac{[\delta\Phi_{\text{lat}}]}{[dS][n]} = \frac{s^{-1}}{m^2 \times m^{-3}} = m.s^{-1}$

R2. Faire un bilan de particules en régime stationnaire sur un système infinitésimal compris entre x et $x + dx$.

Solution: Système Σ : portion infinitésimale x et $x + dx$, entre t et $t + dt$.



Variation du nombre de neutrons dans Σ entre t et $t + dt$: $d(\delta N_e) = 0$

Nombre de particules entrant algébriquement dans le système :

$$\begin{aligned}\delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} &= \delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(x, t) + \delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(x + dx, t) \\ &= \vec{j}_N(x, t) \cdot S \vec{u}_x dt + \vec{j}_N(x + dx, t) \cdot (-S \vec{u}_x) dt \\ &= j_N(x, t) S dt - j_N(x + dx, t) S dt \\ &= -\frac{\partial j_N}{\partial x} dx S dt \\ &= -\frac{\partial j_N}{\partial x} dx \pi a^2 dt\end{aligned}$$

Or $j_N = -D \frac{\partial n}{\partial x}$

$$\delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx \pi a^2 dt$$

Nombre de particules entrant par la surface latérale : $\delta N_{\text{lat}} = h(n(x) - n_{\text{ext}}) 2\pi a dx dt$

Par conservation de la matière : $0 = D \frac{d^2 n}{dx^2} dx \pi a^2 dt + h(n(x) - n_{\text{ext}}) 2\pi a dx dt$

Soit $\boxed{\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{2hn(x)}{aD} = -\frac{2hn_{\text{ext}}}{aD}}$

R3. En déduire que $n(x)$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{\delta^2} = -\frac{n_{\text{ext}}}{\delta^2}$

Exprimer δ en fonction de D , a et h . Faire l'application numérique pour δ , préciser son unité et donner un sens physique à ce paramètre. Que peut-on dire de la longueur L du capillaire par rapport à δ ?

Solution: On identifie : $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{aD}{2h}}}$

$$\delta = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ m} \ll L$$

δ représente la distance caractéristique d'évolution de n : $n(x) = Ae^{-\frac{x}{\delta}} + Be^{\frac{x}{\delta}} + \dots$

Le capillaire peut être considéré comme « infini » à l'échelle de δ .

Données —

- Rayon typique d'un capillaire pulmonaire : $a = 4,0 \text{ } \mu\text{m}$
- Perméabilité de la membrane alvéolo-capillaire : $h = 66 \cdot 10^{-6} \text{ uSI}$
- Coefficient de diffusion de O_2 dans le sang : $D = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ uSI}$
- Longueur typique d'un capillaire $L \approx 1 \text{ mm}$

R4. Déterminer l'expression de $n(x)$ dans l'hypothèse où L est très grand soit $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = n_{\text{ext}}$.

Tracer son évolution $n(x)$ et y faire apparaître δ .

Solution: Solution : $n(x) = Ae^{-\frac{x}{\delta}} + Be^{\frac{x}{\delta}} + n_{\text{ext}}$

En l'infini, $\lim_{x \rightarrow \infty} n(x) = n_{\text{ext}}$, ce qui impose $B = 0$ (sinon $Be^{\frac{x}{\delta}}$ diverge).

$$n(0) = n_0 = A + n_{\text{ext}}$$

Ainsi : $n(x) = (n_0 - n_{\text{ext}})e^{-\frac{x}{\delta}} + n_{\text{ext}}$

R5. Exprimer le nombre de particules qui s'échappent au travers de la surface latérale du tube cylindrique de longueur L par unité de temps.

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{N_{\text{échap}}}{dt} &= \int_{x=0}^L \delta \Phi_{\text{lat}} \\ &= \int_{x=0}^L h(n(x) - n_{\text{ext}}) 2\pi a dx \\ &= 2\pi ah(n_0 - n_{\text{ext}}) \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\delta}} dx \\ &= 2\pi ah(n_0 - n_{\text{ext}}) \times (-\delta) \times (0 - 1) \\ &= 2\pi ah(n_0 - n_{\text{ext}})\delta \end{aligned}$$

Exercice n°7 Diffusion longitudinale de neutrons dans un barreau de plutonium 🎵 🎵 🎵

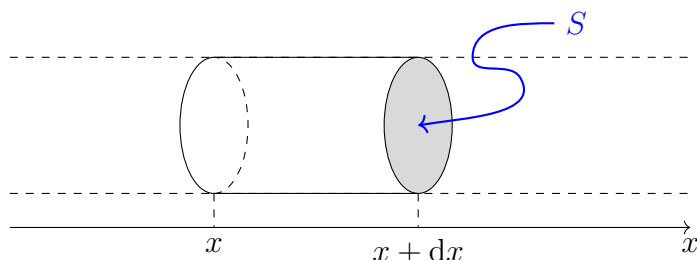
On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe (Ox) et de section droite d'aire S s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On note $n(x, t)$ la densité volumique de neutron. Cette diffusion satisfait une loi de Fick avec un coefficient de diffusion $D = 22 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Par ailleurs, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits. Il apparaît $\sigma_N(x, t) = \frac{n(x, t)}{\tau}$ neutrons par unité de temps et de volume où $\tau = 2,86 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ est un temps caractéristique des réactions nucléaires dans le barreau.

On admettra en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre ($x = 0$ et $x = L$). En revanche $n(x, t) \neq 0, \forall x \in [0, L]$.

R1. Montrer que $n(x, t)$ vérifie $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{n}{\tau}$

Solution: Système Σ : portion infinitésimale x et $x + dx$, entre t et $t + dt$.



Variation du nombre de neutrons dans Σ entre t et $t + dt$:

$$\begin{aligned} d(\delta N_e) &= \delta N_e(t + dt) - \delta N_e(t) \\ &= n(x, t + dt) S dx - n(x, t) S dx \\ &= \frac{\partial n}{\partial t} \times dt S dx \end{aligned}$$

Nombre de particules entrant algébriquement dans le système :

$$\begin{aligned}\delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} &= \delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(x, t) + \delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma}(x + dx, t) \\ &= \vec{j}_N(x, t) \cdot S \vec{u}_x dt + \vec{j}_N(x + dx, t) \cdot (-S \vec{u}_x) dt \\ &= j_N(x, t) S dt - j_N(x + dx, t) S dt \\ &= -\frac{\partial j_N}{\partial x} dx S dt\end{aligned}$$

Or $j_N = -D \frac{\partial n}{\partial x}$

$$\delta N_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx S dt$$

Nombre de neutrons produites : $\delta N_p = \sigma_N \times S dx dt$

Par conservation de la matière : $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{n}{\tau}$

R2. Déterminer $n(x)$ à une constante multiplicatif près en régime stationnaire.

Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de L que l'on déterminera.

Solution: En régime permanent : $\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{n}{\tau D} = 0$

Par intégration : $n(x) = A \cos \frac{x}{\sqrt{D\tau}} + B \sin \frac{x}{\sqrt{D\tau}}$

$n(0) = A = 0$ et $n(L) = B \sin \frac{L}{\sqrt{D\tau}} = 0$, soit $\frac{L}{\sqrt{D\tau}} = n\pi$, soit $L = n\pi\sqrt{D\tau}$. Comme n ne doit pas s'annuler entre 0 et L , il faut que $L = L_s = \pi\sqrt{D\tau}$

Ainsi $n(x) = B \sin \left(\pi \frac{x}{L_s} \right)$

R3. En régime quelconque, on cherche une solution de la forme $n(x, t) = h(x)e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Déterminer la relation entre T , L , D et τ , ainsi que $h(x)$ à une constante multiplicative près.

Solution: En injectant dans l'équation de Q1 :

$$\begin{aligned}-\frac{h(x)}{T} e^{-\frac{t}{\tau}} &= D h''(x) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{h(x) e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \\ -\frac{h(x)}{T} &= D h''(x) + \frac{h(x)}{\tau} \\ h''(x) + h(x) \frac{1}{D} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T} \right) &= 0\end{aligned}$$

h vérifie la même équation que précédemment en remplaçant $\frac{1}{\tau D}$ par $\frac{1}{D} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T} \right)$.

Donc $h(x) = B \sin \left(\frac{x}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}} \right)$

Avec $\frac{L}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}} = \pi$, soit $\frac{1}{T} = \frac{\pi^2 D}{L^2} - \frac{1}{\tau}$

R4. En déduire que $n(x, t)$ diverge si $L > L_s$.

Solution:

si $\frac{\pi^2 D}{L^2} > \frac{1}{\tau}$, alors $T > 0$ et le nombre de neutrons tend vers 0 après quelques T , et le réacteur s'éteint.

si $\frac{\pi^2 D}{L^2} < \frac{1}{\tau}$, alors $T < 0$, et le nombre de neutrons divergent : le réacteur s'emballe.

Par conséquent, il faut que $\frac{\pi^2 D}{L^2} = \frac{1}{\tau}$, soit $L = L_s$.