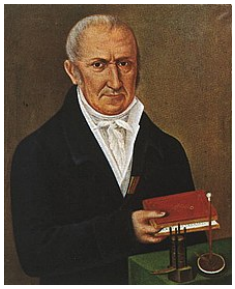
Électromagnétisme

Brève histoire de l'électromagnétisme

Volta (1745-1827)



Ampère (1775-1836)



Ohm (1787-1854)



Faraday (1791-1867)



Maxwell (1831-1879)



- **1729 :** S. Gray fait la distinction entre conducteurs et isolants.
- **1746 :** Bouteille de Leyde ; premier condensateur.
- **1750 :** B. Franklin énonce le principe de la conservation de la charge électrique et interprète l'interaction entre charges électriques par une force à distance.
- **1788 :** Charles Augustin Coulomb, physicien français, énonce sa fameuse loi sur l'interaction entre deux corps électrisés, en $1/r^2$.
- **1799 :** Alexandro Volta, italien, invente la pile, ce qui permet de générer du courant continu.
- **1819 :** Le Danois Hans Christian Œrsted observe qu'une aiguille aimantée est déviée au voisinage d'un courant électrique.
- **1819 :** Le Français André-Marie Ampère en donne une explication 1 semaine plus tard et fond l'électrodynamique. Il introduit la notion de courant électrique, décrit l'action mutuelle de deux courants électriques et montre l'équivalence entre les aimants et les circuits parcourus par des courants. Il introduit également la force de Laplace.
- **1821 :** Premiers travaux de Michael Faraday en physique sur la production d'électricité à partir du magnétisme. Il réalise le premier ancêtre du moteur électrique.
- **1827 :** L'Allemand Georg Simon Ohm énonce la loi qui porte son nom.
- **1831 :** Michael Faraday découvre l'induction : un courant induit apparait momentanément dans une bobine à proximité d'une autre bobine parcourue par un courant électrique permanent lors de la fermeture ou ouverture d'un interrupteur ; un courant induit apparaît dans une bobine dans laquelle on introduit un barreau aimanté. Il introduira également la notion de champ et matérialise les lignes de force magnétique par de la limaille de fer.
- **1834 :** Le Russe Henri Frédéric Lenz énonce la loi qui porte son nom et qui précise le sens du courant induit (à partir des expériences de Faraday). La même année Henry découvre le phénomène d'auto-induction.
- **1841 :** Découverte de l'effet Joule.
- **1868 :** L'Écossais James Clerk Maxwell termine la synthèse de l'électromagnétisme et énonce les « **quatre équations de Maxwell** » reliant les sources aux champs électriques et magnétiques.
- **1869 :** Zénobe Gramme invente le principe du collecteur qui permet de réaliser les premières dynamos (machines à courant continu).
- **1882 :** La première transmission d'énergie (en courant continu) est réalisée par Marcel Deprez. Une liaison de quelques dizaines de kilomètres sera réalisée en Italie en 1884 à l'occasion d'une exposition.
- **1885 :** Invention du transformateur par trois ingénieurs hongrois fournit la solution permettant alors l'utilisation du courant alternatif pour la production, le transport et l'utilisation de l'énergie électrique.

- **1886 :** Mise en évidence par Hertz des ondes électromagnétiques.
- **1888 :** Ferraris et Tesla, puis Boucherot et Blondel mettent au point les principes de fonctionnement et de modélisation des machines alternatives (moteur asynchrone, alternateur).
- **1891 :** Tesla réalise la première transmission d'énergie à grande distance sur support triphasé. Ce principe est encore utilisé de nos jours.
- **1946 :** Les moyens de production d'électricité sont nationalisés en France. La compagnie Électricité de France (EDF) est créée.
- **1948 :** L'invention du transistor ouvre la voie à l'utilisation de composants électroniques qui, progressivement, vont introduire une révolution dans le monde de la conversion de puissance. Les structures de ces éléments vont permettre d'obtenir des modes de commande des machines électriques plus économiques (meilleurs rendements) et plus souples (régulation, variation de vitesse).

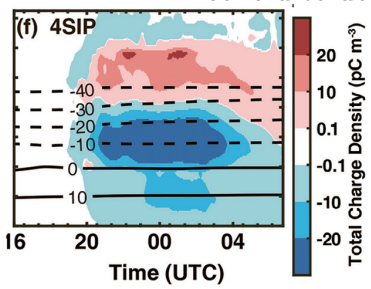
Électromagnétisme

Chapitre EM1 Électrostatique

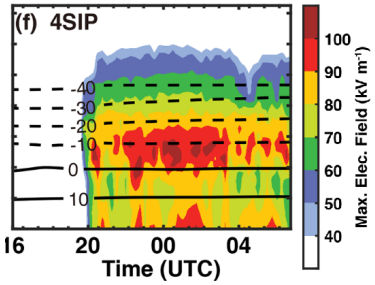


Charles-Augustin Coulomb (1736-1806), ingénieur et physicien français. Il a travaillé sur les frottements solides, l'électricité et le magnétisme.
Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, astronome et physicien allemand, est considéré comme un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Il travaille sur le magnétisme, construit un télégraphe électromagnétique. C'est l'auteur de deux des quatre équations de Maxwell, dont celle dite de « Maxwell-Gauss ».





À gauche : évolution temporelle de la densité de charge volumique dans un nuage.
À droite : champ électrique créé par ce nuage.



Pré-requis

- PCSI : Mouvement de particules chargées dans un champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$; Force Coulombienne ; énergie potentielle Coulombienne ; Potentiel et tension électrique.

∑ Point maths — Cf « Outils mathématiques »

- Systèmes de coordonnées & Surfaces & volumes
- Analyse vectorielle : gradient, divergence, rotationnel.

Objectifs du chapitre

- Énoncer les propriétés du champ électrostatique.
- Exprimer le champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss.
- Étudier le condensateur plan.

Plan du cours

I Champ et potentiel électrostatique **5**
I.1 Sources du champ électrostatique : les charges 5
I.1.a) Charges ponctuelles (Rappel) 5
I.1.b) Densité volumique de charge 5
I.2 Loi de Coulomb 6
I.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle 6
I.4 Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle 7
I.5 Principe de superposition 8

II Propriétés du champ électrostatique **8**
II.1 Circulation du champ électrostatique 8
II.1.a) Circulation du champ 8
II.1.b) Équation de Maxwell-Faraday 8
II.2 Éq° de Maxwell-Gauss et thm de Gauss 9
II.2.a) Équation de Maxwell-Gauss 9
II.2.b) Théorème de Gauss 9
II.2.c) Zone vide de charge 10
II.3 Topographie 10

III Symétries et invariances **11**
III.1 Principe de Curie 11
III.2 Symétries de la distribution et conséquences 12
III.2.a) Symétrie plane 12
III.2.b) Antisymétrie plane 13
III.3 Invariances 13
III.4 Méthode 14

IV Calculs de champ électrostatique **15**
IV.1 Application du théorème de Gauss 15
IV.2 Analogie avec la gravitation 15
IV.3 Condensateur plan 16
IV.3.a) Modélisation 16
IV.3.b) Plan infini 16
IV.3.c) Champ créé par le condensateur plan 17
IV.3.d) Capacité 17
IV.3.e) Aspect énergétique 17

V Noyau atomique **18**

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1 Sources du champ électromagnétique	
5.1.1 Description microscopique et mésoscopique des sources	
Densité volumique de charges.	Exprimer la densité volumique de charge.
5.2 Électrostatique	
5.2.1 Champ électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Propriétés du champ électrostatique	
Symétries.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Équations locales.	Relier l'existence d'un potentiel électrostatique à la nullité du rotationnel du vecteur champ électrostatique. Justifier l'orthogonalité des lignes de champ avec les surfaces équipotentielles et leur orientation dans le sens des potentiels décroissants.
Théorème de Gauss et équation locale de Maxwell-Gauss.	Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.
Lignes de champ électrostatique. Équipotentielles.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique. Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Relier équipotentielles et lignes de champ électrostatique. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.
5.2.2. Exemples de champs électrostatiques	
Plan infini uniformément chargé en surface.	Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.

Condensateur plan. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Etablir l'expression du champ créé par un condensateur plan. Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
Énergie de constitution d'un noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée.	Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.
5.2.3. Analogies avec le champ gravitationnel	
Analogies entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels.

Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Définir la densité volumique de charges.
2 – ☺ – ☹ – Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges.
3 – ☺ – ☹ – Donner les ordres de grandeur des champs électrostatiques suivants : tube fluorescent, champ disruptif de l'air, vu par un électron dans un atome.
4 – ☺ – ☹ – Donner l'équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire. Quelles en sont les conséquences sur la circulation du champ électrostatique ?
5 – ☺ – ☹ – Comment sont les lignes de champ par rapport aux surfaces équipotentielles ? (direction et sens)
6 – ☺ – ☹ – Comment est le champ électrostatique en deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie de la distribution de charges ? (phrase+schéma)
7 – ☺ – ☹ – Comment est le champ électrostatique en deux points symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de charges ? (phrase+schéma)
8 – ☺ – ☹ – Comment est le champ électrostatique en un point d'un plan de symétrie de la distribution de charges ? (phrase+schéma)
9 – ☺ – ☹ – Comment est le champ électrostatique en un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charges ? (phrase+schéma)
10 – ☺ – ☹ – Énoncer le théorème de Gauss précisément. Comment choisir la surface de Gauss ?
11 – ☺ – ☹ – Donner l'équation de Maxwell-Gauss.
12 – ☺ – ☹ – Hors des sources, comment évoluent les lignes de champ selon l'évolution de la norme du champ ?
13 – ☺ – ☹ – Définir la capacité d'un condensateur plan.
14 – ☺ – ☹ – Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
15 – ☺ – ☹ – Établir l'expression du champ créé par un condensateur plan.
16 – ☺ – ☹ – Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan.
17 – ☺ – ☹ – Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
18 – ☺ – ☹ – Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.
19 – ☺ – ☹ – Dresser le tableau d'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel. Énoncer le théorème de Gauss pour la gravitation.

FlashCards :

I Champ et potentiel électrostatique

I.1 Sources du champ électrostatique : les charges

I.1.a) Charges ponctuelles (Rappel)

En PCSI, vous avez vu que certains corps sont susceptibles d'accepter ou de perdre des particules chargées, c'est-à-dire de s'électriser. Cette propriété est connue depuis l'Antiquité, et s'interprète par la notion de charge électrique obtenue grâce aux travaux de Charles-Augustin Coulomb et à la découverte de l'électron par Sir Joseph John Thomson, à la fin du XIX^{e} siècle.
La **charge électrique** est :

- une grandeur **algébrique** : positive ou négative,
- **extensive / additive**,
- **quantifiée** : $q = pe$, où $p \in \mathbb{Z}$, avec $e = 1,602\ 176\ 634.10^{-19}$ C*,
- **conservée** pour un système fermée qui n'échange pas de matière avec l'extérieur,
- s'exprime en **coulomb (C)** dans le système international.

Cette notion s'applique à des particules dont l'extension spatiale est négligeable devant les distances entre particules : les **charges ponctuelles**. Ce modèle des charges ponctuelles est valable tant que les distances entre particules sont grandes par rapport aux dimensions de la charge.

I.1.b) Densité volumique de charge

À l'échelle macroscopique des corps peuvent s'électriser (par friction, par influence, par contact) et il y apparait une charge de plusieurs millions de e. On peut alors modéliser ces corps par une distribution continue de charge sans tenir compte de la distribution discrète. Dans la suite, un **volume élémentaire sera toujours un volume à l'échelle mésoscopique**. Le nombre de charges élémentaires dans un **volume mésoscopique est tellement grand que la quantification de la charge n'est pas détectable** à cette échelle : **la charge électrique sera une grandeur continue**.

Définition – Densité volumique de charges

Soit un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau_P$ autour d'un point P portant, à l'instant t, la charge totale $\delta Q_P(t)$, on définit la **densité volumique de charges** (en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) en P à t, notée $\rho(P,t)$ par :

$$\rho(P,t) = \frac{\delta Q_P}{\mathrm{d}\tau_P}$$

Si elle ne dépend pas du point P, on dit qu'elle est uniforme.

À retenir – Charge

La charge totale contenue dans un volume $\mathscr{V}$ à l'instant t, s'obtient en sommant l'ensemble des charges des volumes élémentaires :

$$Q(t) = \iiint_{P\in\mathscr{V}} \rho(P,t)\mathrm{d}\tau_P$$

⚠ La densité volumique de charge dépend a priori du point. On ne peut écrire $\rho = \dfrac{Q}{V}$ pour un volume V portant la charge Q que si celle-ci est **uniformément répartie**, on parle aussi de distribution de charge homogène.

*. valeur fixée par convention du BIPM en mai 2019

Activité n°1 –
Un noyau de Plomb contient 82 protons répartis dans une boule de de rayon $R_n = 7$ fm. Le rayon atomique vaut $R_a = 180$ pm. En supposant la répartition de charges uniformes, déterminer la densité volumique de charge ρ_+ dans le noyau.

Remarques – Répartitions surfaciques et linéiques

Dans certaines situations, on utilise des modélisations de la répartition des charges suivantes :

- Si la charge est répartie sur une très faible épaisseur, on utilise une **modélisation surfacique**, avec la **densité surfacique de charges** : $\sigma(P,t) = \dfrac{\delta Q_P}{\mathrm{d}S_P}$ (en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-2}$)

  Alors : $Q(t) = \iint_{P\in\mathscr{S}} \sigma(P,t)\mathrm{d}S_p$
- Si la charge est répartie sur un fil de très faible rayon par rapport à sa longueur, on utilise une **modélisation surfacique**, avec la **densité linéique de charges** : $\lambda(P,t) = \dfrac{\delta Q_P}{\mathrm{d}\ell_P}$ (en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

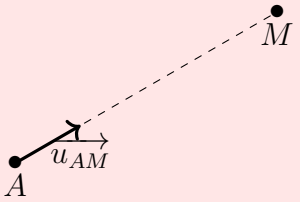
  Alors : $Q(t) = \int_{P\in\mathscr{L}} \lambda(P,t)\mathrm{d}\ell_p$

I.2 Loi de Coulomb

À retenir – Loi de Coulomb (1785)

Soit une charge ponctuelle q_A située au point A. Une charge q placée en un point M subit la force donnée par la **loi de Coulomb** :

$$\overrightarrow{F_{A\to M}} = \frac{q_A q}{4\pi\varepsilon_0 AM^2}\underbrace{\frac{\overrightarrow{AM}}{AM}}_{\overrightarrow{u_{AM}}}$$



où $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} est la permittivité absolue du vide.
Cette force est attractive si les deux charges sont de signe opposé, et répulsive si les deux charges sont de même signe.

I.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Définition – Champ électrostatique

On définit le **champ électrostatique** $\overrightarrow{E_A}(M)$ créé par la charge q_A en A telle que une charge q placée en M soit soumise à la force $\overrightarrow{F_{A\to M}} = q\overrightarrow{E_A}(M)$.

À retenir – Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrostatique créé en M par la charge q_A située en A est :

$$\overrightarrow{E_A}(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 AM^2}\frac{\overrightarrow{AM}}{AM} = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 AM^2}\overrightarrow{u_{AM}}$$

Unité : V $\cdot$ m^{-1} (ou le N $\cdot$ C^{-1})

Activité n°2 –
Représenter le vecteur champ électrique en différents points autour d'une charge ponctuelle selon le signe de la charge. En déduire les lignes de champ (=courbe tangente au vecteur champ électrique en tout point).

Activité n°3 –
Déterminer la valeur du champ électrique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène et ressenti par l'électron.

À retenir – Ordres de grandeur de champs électriques

Dispositif	Valeur du champ
Tube fluorescent	$10\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Atmosphère par temps clair	$10^2\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Atmosphère par temps orageux	$10^4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Champ disruptif de l'air (foudre)	$3.10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$
Vu par l'électron dans un atome	$10^{12}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

I.4 Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

En PCSI, vous avez montré que la force de Coulomb était une force conservative qui dérivait de l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p = \dfrac{q_A q}{4\pi\varepsilon_0 AM} + K$ où K est une constante (d'intégration), souvent prise telle que $\mathscr{E}_p = 0$ quand M est à très grande distance de A. Soit

$$\mathscr{E}_p = \frac{q_A q}{4\pi\varepsilon_0 AM}$$

Définition – Potentiel électrostatique
On définit le **potentiel électrostatique** créé par la charge q_A en A telle que une charge q placée en M ait une énergie potentielle $\mathscr{E}_p = qV(M)$.

À retenir – Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle
Le potentiel électrostatique créé en M par la charge ponctuelle q_A située en A est :

$$V_A(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 AM}$$

Il s'exprime en volt (V).

Soit une charge ponctuelle q plongée dans un champ électrostatique $\vec{E}$, elle est soumise à la force : $\vec{F} = q\vec{E}$, or cette force est conservative et dérive de l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathscr{E}_p \quad \text{soit} \quad q\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathscr{E}_p \quad \text{soit} \quad q\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ qV$$

À retenir – Champ et potentiel électrostatiques
Soit une distribution de charges fixes, indépendante du temps, le champ électrostatique et le potentiel électrostatique créés sont reliés par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ (V)$$

I.5 Principe de superposition

À retenir – Principe de superposition

Le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est égal à la somme vectorielle des champs créés par chacune d'entre elles en l'absence de toutes les autres.
Soit N charges ponctuelles q_i placées aux points A_i. Le champ électrostatique créé en un point M par l'ensemble de ces N charges ponctuelles s'écrit :

$$\overrightarrow{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{E_i}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 A_i M^2} \frac{\overrightarrow{A_i M}}{A_i M}$$

De même :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 A_i M}$$

II Propriétés du champ électrostatique

II.1 Circulation du champ électrostatique

II.1.a) Circulation du champ

Définition – Circulation du champ électrostatique

La circulation du champ électrostatique le long d'un chemin $\Gamma_{A\to B}$ est définie par :

$$\mathscr{C}_{A\to B} = \int_{M\in\Gamma_{A\to B}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell_M}$$

Démonstration à maîtriser n°4 –

Q1. Montrer que la circulation du champ électrostatique le long d'un chemin $\Gamma_{A\to B}$ s'écrit $V(A) - V(B)$. Dépend-elle du chemin suivi pour aller de A à B ?

Q2. Que vaut la circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé ?

À retenir – Tension et circulation du champ électrostatique

- Le champ électrostatique est à circulation conservative, la circulation entre A et B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B.
- La circulation de $\overrightarrow{E}$ de A vers B : $\mathscr{C}_{A\to B} = \int_{A\to B} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = V(A) - V(B) = U_{AB}$ est la différence de potentiels (= la tension) entre A et B

II.1.b) Équation de Maxwell-Faraday

À retenir – Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$$

Σ Point maths – Cf « Outils mathématiques – Analyse vectorielle »

§ Théorème de Stokes et Rotationnel

Démonstration à maîtriser n°5 –
En exploitant le théorème de Stokes, montrer que le fait que le champ électrostatique est à circulation conservative est équivalente au fait que son rotationnel est nul.

Activité n°6 –
Exprimer les rotationnels des champs suivants :

Q1. en cartésien : $\overrightarrow{A} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + xy\overrightarrow{u_z}$; $\overrightarrow{A} = -x\overrightarrow{u_z} + z\overrightarrow{u_x}$

Q2. en cylindrique $\overrightarrow{A} = r\overrightarrow{u_\theta}$

Q3. en sphérique $\overrightarrow{A} = r\overrightarrow{u_\theta}$

À retenir – Champ électrostatique à circulation conservative
En **régime stationnaire** indépendant du temps :

$$\begin{aligned} &\text{Équation de Maxwell-Faraday} && \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} \\ &\underset{\text{Thm Stokes}}{\Leftrightarrow} && \oint_{P\in\Gamma} \overrightarrow{E}(P)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell_P} = 0 \\ &\Leftrightarrow && \exists\, V, \text{ le potentiel électrostatique tel que } \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) \\ &\Leftrightarrow && \overrightarrow{E} \text{ est à circulation conservative.} \end{aligned}$$

Attention –
Ces propriétés sont **vraies uniquement pour un champ électrostatique, c'est-à-dire indépendant du temps**. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit différemment en régime variable.

II.2 Équation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss

II.2.a) Équation de Maxwell-Gauss

À retenir – Équation de Maxwell-Gauss
Soit $\mathscr{D}$ une distribution de charges. Le champ électrostatique créé en M par $\mathscr{D}$ est donné par :

$$\text{div}\,(\overrightarrow{E(M)}) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

où $\rho(M)$ est la densité volumique de charges en M.

II.2.b) Théorème de Gauss

À retenir – Théorème de Gauss
Le champ électrostatique créé par une distribution $\mathscr{D}$ vérifie :

$$\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- $\mathscr{S}_\mathscr{G}$ est une **surface FERMÉE orientée vers l'extérieur**, appelée **surface de Gauss**,
- $\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$ le flux du champ électrostatique à travers $\mathscr{S}$,
- Q_{int} est la charge de la distribution de charges qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée $\mathscr{S}$ à

travers laquelle on calcule le flux de $\vec{E}$.

Attention –
Le champ calculé avec le théorème de Gauss est celui créé par la TOTALITÉ des charges de $\mathscr{D}$, même si c'est la charge intérieure à la surface de Gauss qui intervient.

II.2.c) Zone vide de charge

À retenir – $\vec{E}$ à flux conservatif dans une zone vide de charge
Dans une zone vide de charge, le champ électrostatique est à flux conservatif : le flux de $\vec{E}$ à travers toute section d'un même tube de champ se conserve.

II.3 Topographie : lignes de champ et équipotentielles

Définition – Lignes de champ
Une **ligne de champ** du champ électrostatique $\vec{E}$, passant par un point M, est la courbe orientée, passant par M et telle qu'en tous points de cette courbe, $\vec{E}$ est tangent à la courbe. Les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ.
Un **tube de champ** est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

À retenir – Propriétés des lignes de champ électrostatique
- Le champ électrostatique étant à circulation conservative, les **lignes de champ ne sont pas fermées**. Elles se ferment à l'infini ou au niveau des charges.
- Les lignes de champ fuient les charges positives, et se dirigent vers les charges négatives.
- Le long d'un tube de champ **dans une région vide de charges**, la **norme du champ électrostatique est d'autant plus grande que le tube de champ est étroit**.
- **Deux lignes de champ ne peuvent se couper** en un point M que si **une charge** est placée en M ou le **champ est nul** en M.

Définition – Équipotentielle
Une surface équipotentielle est un ensemble de points M tels que $V(M)$ est constante.

Rappels des propriétés du gradient :
- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$ est perpendiculaire en tout point aux surfaces équipotentielles,
- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$ est dirigé dans le sens des potentiels croissants.

À retenir – Lignes de champ et équipotentielles
D'après $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$:
- Les lignes de champ électrostatique sont orthogonales en tout point aux équipotentielles.
- Les lignes de champ électrostatique sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

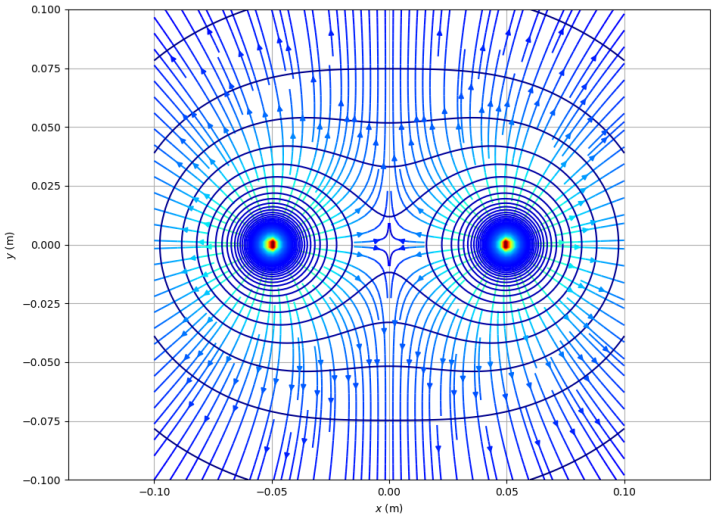


FIGURE 1 – Cartes de champ ($+e$ et $-e$)

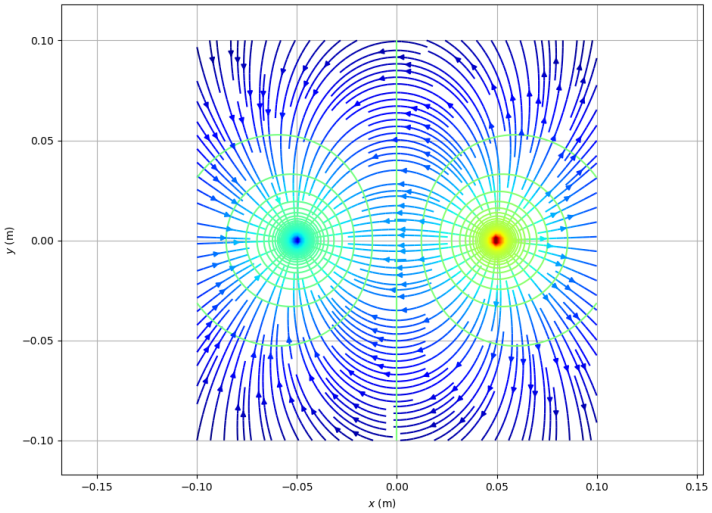


FIGURE 2 – Cartes de champ ($+e$ et $-e$)

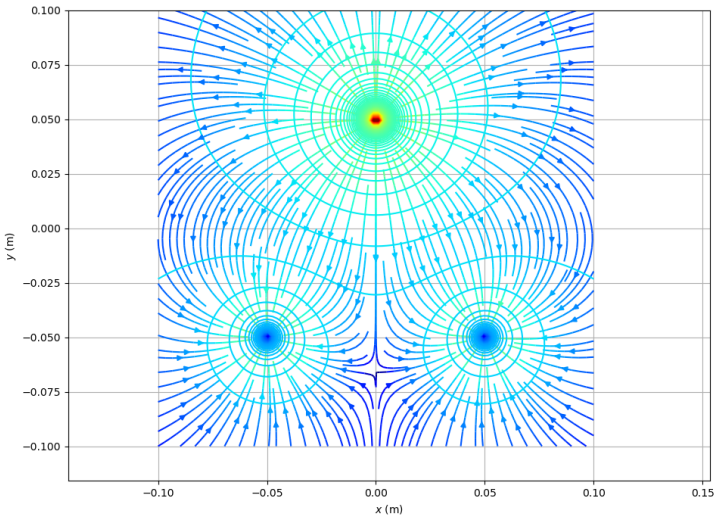


FIGURE 3 – Cartes de champ

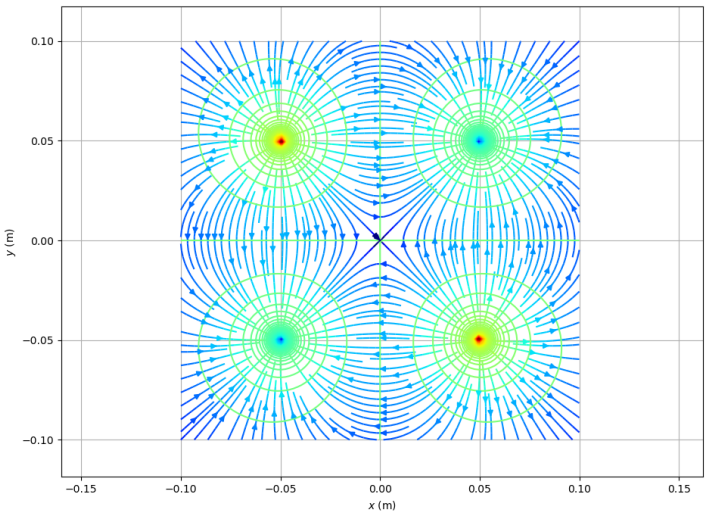


FIGURE 4 – Cartes de champ

Activité n°7 –

Q1. Repérer les sources sur les cartes de champ ci-dessus.

Q2. Repérer les plans de symétrie et d'antisymétrie des charges. Quelles conséquences trouve-t-on sur le champ électrostatique ?

Q3. Déterminer les points de champ nul.

III Symétries et invariances

III.1 Principe de Curie

À retenir – Principe de (Pierre) Curie

Les symétries des conséquences sont au moins celles des causes qui leur ont donné naissance.

En électrostatique : Causes = distribution de charges ; Conséquences = champ électrostatique

III.2 Symétries de la distribution et conséquences

III.2.a) Symétrie plane

Définition – Plan de symétrie de la distribution

(Π_S) est un plan de symétrie de la distribution de charges $\mathscr{D}$ si la densité volumique de charge est identique de part et d'autre de Π_S.
Soit, si $\forall P \in \mathscr{D}$ et $P' = \text{sym}_{\Pi_S}(P)$ alors $\rho(P') = \rho(P)$

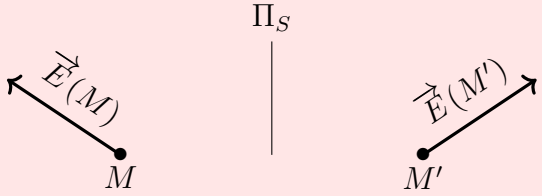
À retenir – Conséquences des symétries

Soit une distribution de charges qui admet Π_S comme plan de symétrie.

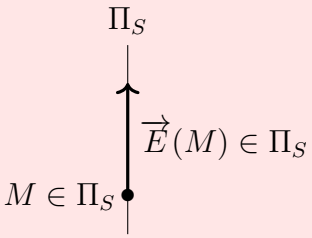
- Le champ électrique $\vec{E}(M')$ en un point M' symétrique du point M **par rapport à un plan de symétrie Π_S de la distribution de charges** est égal au symétrique du champ électrique en M.

$$\vec{E}\left(M'\right) = \text{sym}_{\Pi_S}\left(\vec{E}(M)\right)$$

$$V(M') = V(M)$$



- **En un point d'un plan de symétrie Π_S de la distribution des charges** le champ électrique appartient au plan de symétrie.



III.2.b) Antisymétrie plane

Définition – Plan d'antisymétrie de la distribution

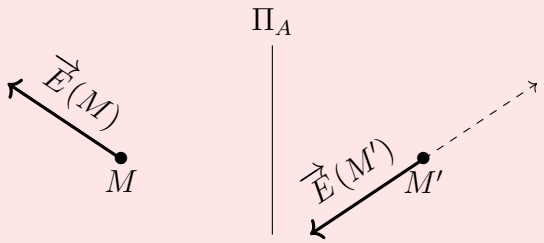
(Π_A) est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges $\mathscr{D}$ si la densité volumique de charge est changée en son opposée par réflexion par (Π_A).
Soit, si $\forall P \in \mathscr{D}$ et $P' = \text{sym}_{\Pi_A}(P)$ alors $\rho(P') = -\rho(P)$

À retenir – Conséquences des antisymétries

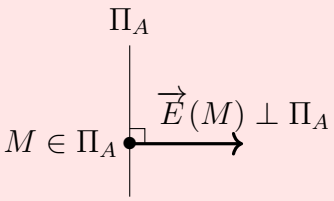
Soit une distribution de charges qui admet Π_A comme plan d'antisymétrie.

- Le champ électrique $\overrightarrow{E}(M')$ en un point M' symétrique du point M **par rapport à un plan d'antisymétrie Π_A de la distribution de charges** est égal à l'opposé du symétrique du champ électrique en M.

$$\overrightarrow{E}\left(M'\right) = -\text{sym}_{\Pi_A}\left(\overrightarrow{E}(M)\right)$$
$$V(M') = -V(M)$$



- **En un point d'un plan d'antisymétrie Π_A de la distribution des charges**, le champ électrique est perpendiculaire au plan d'antisymétrie.



III.3 Invariances

Définition – Invariances

- La distribution de charges $\mathscr{D}$ est invariante par toute translation selon un axe (Ox), si ρ ne dépend pas de x, c'est-à-dire si $\forall x$ et $\forall a$, $\rho(x+a) = \rho(x)$.
- La distribution de charges $\mathscr{D}$ est invariante par toute rotation autour de l'axe Δ, si ρ ne dépend pas de l'angle ϕ qui repère autour de l'axe Δ, c'est-à-dire si $\forall \phi, \forall \alpha$, $\rho(\phi+\alpha) = \rho(\phi)$.

À retenir – Conséquences des invariances

Si $\rho(P)$ ne dépend pas de certaines variables, alors les composantes de $\overrightarrow{E}$ et le potentiel électrostatique n'en dépendent pas non plus.

III.4 Méthode

Méthode – Comment déterminer la forme générale d'un champ électrique ?

1. Faire un schéma et considérer un point M situé à un endroit quelconque de l'espace.
2. Choisir le système de coordonnées adapté.
3. Écrire la forme générale (dans le système de coordonnées adapté) :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= E_x(x,y,z)\vec{u_x} + E_y(x,y,z)\vec{u_y} + E_z(x,y,z)\vec{u_z}\\ \vec{E}(M) &= E_r(r,\theta,z)\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u_\theta} + E_z(r,\theta,z)\vec{u_z}\\ \vec{E}(M) &= E_r(r,\theta,\varphi)\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u_\theta} + E_z(r,\theta,\varphi)\vec{u_\varphi}\end{aligned}$$

4. **Étudier les plans de symétrie et d'antisymétrie, pour déterminer la direction.**
   a) Déterminer un premier plan de symétrie/d'antisymétrie de la distribution de courant et **ÉCRIRE OBLIGATOIREMENT** la phrase ci-dessous :
   « **Le plan $(M, \vec{u_{...}}, \vec{u_{...}})$ est un plan .... (symétrie/antisymétrie) de la distribution de charges, donc le champ électrique ..... (appartient/est perpendiculaire) à ce plan, donc la/les composante/s du champ électrique selon $\vec{u_{...}}$ (et $\vec{u_{...}}$) est/sont nulle/s.** »
   b) Barrer la/les composantes nulles.
   c) Refaire les deux étapes précédentes, autant de fois qu'il y a de plans de symétrie/d'antisymétrie.
   d) Conclure : « **Le champ électrique est porté par $\vec{u_{...}}$:** » $\vec{E}(M) = E_{...}(r,y,z)\vec{u_{...}}$ ou $\vec{E}(M) = E_{...}(r,\theta,z)\vec{u_{...}}$ ou $\vec{E}(M) = E_{...}(r,\theta,\varphi)\vec{u_{...}}$
5. **Étudier les invariances, pour déterminer les variables d'espace dont dépend la composante. ÉCRIRE OBLIGATOIREMENT** la(les) phrase(s) ci-dessous :
   a) « La distribution de charges est invariante par toute translation selon .... / rotation autour de l'axe ... d'angle ... , donc la composante du champ électrostatique ne dépend pas de la variable .... »
   Barrer dans $E_{...}(...,...,...,)$ la variable dont $E_{...}$ ne dépend pas.
   b) Conclure : « La composante du champ électrostatique ne dépend que de .... »
6. **Conclure :** $\vec{E}(M) = E_{...}(....)\vec{u_{...}}$

Exercice à maîtriser n°8 –

Étudier les symétries et invariances des distributions suivantes, et conclure sur la forme générale du champ électrique créé.

Q1. Plan infini uniformément chargé en surface.

Q2. Cylindre infini d'axe (Oz) uniformément chargé en volume.

Q3. Charge ponctuelle.

IV Calculs de champ électrostatique

IV.1 Application du théorème de Gauss

Méthode – Comment appliquer le théorème de Gauss ?

1. Faire un **schéma** du système étudié, et placer un point M à un endroit quelconque (où on souhaite exprimer le champ).
2. Choisir le **système de coordonnées adapté**, **représenter** les coordonnées de M sur le schéma, et la **base** correspondante.
3. **Étudier les symétries et invariances** DE LA DISTRIBUTION pour déterminer la forme générale du champ (cf. §III.4).
4. Énoncer le théorème de Gauss.
5. **Choisir la surface de Gauss adaptée**, qui doit :
   a) être **fermée**,
   b) **passer par** M, le point où on veut déterminer $\vec{E}$,
   c) permettre le calcul du flux de $\vec{E}$ alors qu'il est inconnu, pour cela :
      i. $\vec{E}$ doit être normal et uniforme sur la surface choisie,
      ii. si besoin, la fermer par des surfaces où le flux de $\vec{E}$ est nul à travers (la surface doit être tangente à $\vec{E}$, de sorte que $\mathrm{d}\vec{S} \perp \vec{E}$).

   La représenter sur le schéma précédent.
6. **Exprimer le flux** du champ électrostatique à travers cette surface fermée.
7. **Exprimer la charge** Q_{int} de la distribution de charges qui est à l'**intérieur** de la surface de Gauss. **Il sera parfois nécessaire de distinguer plusieurs cas.**
8. Conclure.

Exercice à maîtriser n°9 – Cylindre infini

Soit un cylindre de rayon R, de longueur « infinie » est uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charges ρ.
Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace.

IV.2 Analogie avec la gravitation

À retenir – Analogie

	Électrostatique	Gravitation
Source du champ	distribution de charges	distribution de masses
Force d'interaction	$\overrightarrow{F_{\text{é},A\to M}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_A q}{AM^2}\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$	$\overrightarrow{F_{g,A\to M}} = -G\dfrac{m_A m}{AM^2}\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$
Constante associée	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$
Lien entre force et champ	$\overrightarrow{F_{\text{é},A\to M}} = q\vec{E}(M)$	$\overrightarrow{F_{g,A\to M}} = m\vec{\mathscr{G}}(M)$
Théorème de Gauss	$\oiint_{M\in\mathscr{S}} \vec{E}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{M\in\mathscr{S}} \vec{\mathscr{G}}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = -4\pi G M_{\text{int}}$

La méthode d'étude des distributions de masses et d'application du théorème de Gauss gravitationnel est identique à celle utilisée pour les charges. La seule différence est qu'il n'existe pas de plan d'antisymétrie.

Exercice à maîtriser n°10 – Champ gravitationnel de la Terre

On considère la Terre assimilée à une sphère de rayon R_T et de mass de M_T au sein de laquelle la masse est uniformément répartie avec une masse volumique μ.

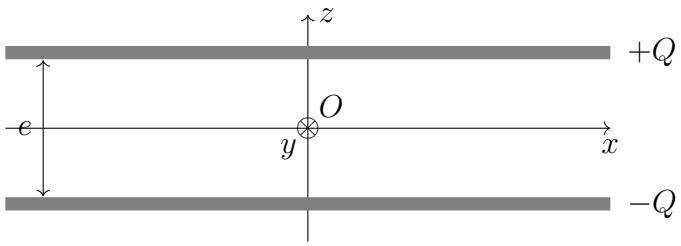
Q1. Déterminer le champ gravitationnel créé par la Terre en tous points de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur) en fonction, notamment de la masse M_T et du rayon R_T.

Q2. Calculer la valeur de $\mathscr{G}$ à la surface de la Terre.

IV.3 Condensateur plan

IV.3.a) Modélisation

Un condensateur plan est constitué de deux armatures planes, parallèles, identiques de surface S et espacées d'une distance e. Les deux plaques portent des charges opposées (Q et $-Q$), qui sont réparties uniformément en surface, les armatures portent respectivement les densités surfaciques de charge $+\sigma$ et $-\sigma$. Entre les deux armatures se trouve un isolant.



La distance e est très faible devant les dimensions des plaques ce qui nous permet de les considérer comme « infinies ». Ce modèle est convenable loin des bords de la plaque : on dit qu'**on néglige les effets de bord**.

Définition – Champ disruptif

Le **champ disruptif** est le champ électrique maximal qu'un isolant peut supporter avant de devenir conducteur et de créer un arc électrique.

À retenir – Champ disruptif de l'air

Le champ disruptif de l'air est de l'ordre de 3.10^6 V · m^{-1}. Il est plus faible en présence d'humidité.

Méthode – Comment exprimer le champ électrostatique créé par un condensateur plan ?

Pour calculer le champ et le potentiel électrostatiques créés par le condensateur plan, nous allons exploiter le **théorème de superposition**. Pour cela, nous allons :

1. Exprimer le champ électrostatique créé par l'une des deux armatures planes.
2. En déduire celui créé par l'autre par analogie (seul le signe de la charge change).
3. Utiliser le théorème de superposition pour exprimer le champ électrostatique créé par le condensateur plan.

IV.3.b) Champ électrostatique créé par un plan infini chargé en surface

On considère un plan « infini » uniformément chargé en surface avec la densité surfacique de charges σ. Il est confondu avec le plan (Oxy).

Exercice à maîtriser n°11 – Champ créé par un plan infini

Q1. Étudier les symétries et les invariances pour déterminer la forme du champ électrique en un point M quelconque de l'espace.

Q2. Trouver un plan de symétrie particulier, et en considérant deux points symétriques par rapport à ce plan et un schéma, déterminer la parité de la composante de $\overrightarrow{E}$.

Q3. Proposer une surface de Gauss.

Q4. En déduire le champ électrostatique pour $z > 0$, puis pour $z < 0$.

Q5. Que peut-on dire du champ à la traversée de la surface chargée ?

IV.3.c) Champ créé par le condensateur plan

La plaque 1 chargée positivement ($\sigma_1 = +\sigma > 0$) est placée en $z = +\dfrac{e}{2}$, et la plaque 2 chargée négativement ($\sigma_2 = -\sigma < 0$) est placée en $z = -\dfrac{e}{2}$.

Exercice à maîtriser n°12 – Champ créé par un condensateur plan

Q1. En exploitant le résultat de la partie précédente, déterminer les champs électrostatiques $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ créés par chaque plaque en tout point de l'espace.

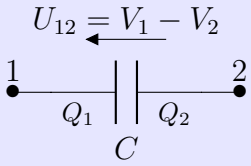
Q2. En déduire le champ créé par le condensateur plan en tout point de l'espace.

IV.3.d) Capacité

Définition – Capacité d'un condensateur

La capacité d'un condensateur plan est définie par :

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = \frac{Q_2}{U_{21}}$$



- Q_1 est la charge portée par la plaque 1,
- $U_{12} = V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre les deux plaques.
- C est une grandeur positive qui s'exprime en farad [a] (F).

a. Michael FARADAY, cf loi de Faraday

Exercice à maîtriser n°13 – Capacité du condensateur

Q1. Par calcul de la circulation du champ électrique, exprimer la tension U_{12}.

Q2. En déduire l'expression de la capacité du condensateur plan en fonction de e, S et ε_0.

IV.3.e) Aspect énergétique

Démonstration à maîtriser n°14 – Énergie électrostatique

Q1. Rappeler l'expression de l'énergie du condensateur soumis à une tension U vue en PCSI.

Q2. L'écrire sous la forme $\mathscr{E} = u_e \times V$, où V est le volume du condensateur et u_e la densité volumique d'énergie électrostatique.

À retenir – Densité volumique d'énergie électrostatique

La densité volumique d'énergie électrostatique s'exprime selon

$$u_e(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\| \vec{E}(M) \right\|^2$$

Activité n°15 – La terre : un condensateur sphérique

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère par un condensateur sphérique. La Terre, de rayon $R = 6,4 \cdot 10^3$ km, porte une charge négative $-Q$ uniformément répartie à sa surface. L'ionosphère est représentée par une surface sphérique de rayon $R + h$ ($h = 60$ km) porteuse d'une charge $+Q$. Les propriétés électromagnétiques de l'air sont assimilées à celles du vide.

Q1. Déterminer la forme générale du champ électrostatique créé en tous points de l'espace.

Q2. Exprimer le champ électrique entre les deux sphères.

Q3. Exprimer la tension $U = V_{\text{iono}} - V_{\text{Terre}}$.

Q4. Déterminer la capacité de ce condensateur.

Q5. Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques et commenter le résultat obtenu. La calculer numériquement.

V Noyau atomique

Le noyau d'un atome peut être modélisé (modèle simple) par une boule de rayon R et portant la charge $Q = +Ze$, répartie uniformément en volume.

On souhaite évaluer, simplement, l'énergie nécessaire pour créer le noyau. On admet que cette énergie nécessaire ne dépend pas de la façon dont on le crée : on le construit par couches sphériques concentriques successives.

Données –

Par analogie avec le champ gravitationnel calculé précédemment, nous pouvons obtenir (ce sera fait en TD), le champ électrostatique et le potentiel créé par une distribution sphérique de charge Q, hors de la distribution, à une distance r de son centre : $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$ et $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Démonstration à maîtriser n°16 – Énergie de constitution d'un noyau atomique

Q1. Exprimer la densité volumique de charge électrique ρ du noyau.

Q2. Exprimer la charge $q(r)$ de la sphère déjà construite de rayon r. En déduire le potentiel électrostatique qu'elle créée à l'extérieur.

Q3. Exprimer la charge $\delta q(r)$ de la couche de rayon r d'épaisseur dr.

Q4. Exprimer le travail de la force électrostatique lorsque la charge $\delta q(r)$ est amenée de l'infini vers la couche de rayon r.

Q5. En déduire le travail total de la force électrique au cours de la création du noyau.

Q6. En déduire le travail fourni par l'opérateur, en supposant que le processus est effectué très lentement, sans variation de l'énergie cinétique des charges.

Q7. Calculer l'énergie nécessaire pour constituer le noyau d'or $^{178}_{79}$Au, de rayon $R = R_0 A^{1/3}$, avec $R_0 = 1,4$ fm.