Thermodynamique

TD TH3 Diffusion thermique – *Corrigé*

I Régime stationnaire sans source interne

Exercice n°1 Isolation du mur d'une maison ♪

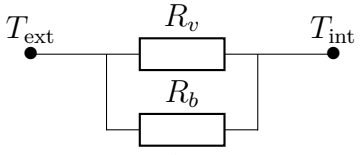
On s'intéresse à l'isolation d'un mur donnant sur la rue. On considère qu'il n'y a d'échanges d'énergie qu'à travers le mur. La température intérieure est de $T_{\text{int}} = 20\,°\text{C}$ alors que la température extérieure est de $T_{\text{ext}} = 0\,°\text{C}$. Les phénomènes sont supposés s'effectuer en régime stationnaire.

Le mur, mal isolé, est composé :

- d'une fenêtre de surface $S_v = 1\,\text{m}^2$ constitué de verre d'épaisseur $e_v = 2\,\text{mm}$ et de conductivité thermique $\lambda_v = 0,7\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$,
- d'un mur de surface $S_b = 15\,\text{m}^2$ constitué de béton d'épaisseur $e_b = 20\,\text{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_b = 1,4\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$,

R1. Proposer un modèle d'association de résistances correspondant à cette situation.

Solution: Le mur et la fenêtre sont soumis à la même différence de température, mais ne sont pas traversés par le même flux thermique. Ils sont en parallèle.



Avec $R_b = \dfrac{e_b}{\lambda_b S_b} = 9,5.10^{-3}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$ et $R_v = \dfrac{e_v}{\lambda_v S_v} = 2,9.10^{-3}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$

R2. Exprimer la résistance thermique de la paroi R_p. La calculer numériquement.

Solution: Par association : $\boxed{R_p = \dfrac{R_v R_b}{R_v + R_b}} = 2,2.10^{-3}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$

R3. Calculer la puissance perdue à travers cette paroi.

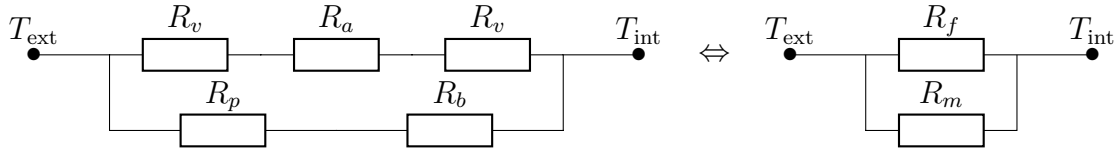
Solution: La puissance perdue est donnée par la « loi d'Ohm » : $\boxed{\Phi_p = \dfrac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_p}} = 9,1\,\text{kW}$

La propriétaire décide d'isoler cette paroi :

- la fenêtre est remplacée par une fenêtre en double vitrage composé de deux plaques de verre séparées d'une épaisseur $e_a = 10\,\text{mm}$ d'air et de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$,
- le mur de béton est recouvert d'une épaisseur $e_p = 10\,\text{cm}$ de polystyrène de conductivité thermique $\lambda_p = 0,036\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$,

R4. Proposer un modèle d'association de résistances correspondant à cette situation.

Solution:



$$R_a = \frac{e_a}{\lambda_a S_v} = 0,38 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$R_p = \frac{e_p}{\lambda_p S_b} = 0,19 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

R5. Exprimer la résistance thermique de la paroi R'_p. La calculer numériquement.

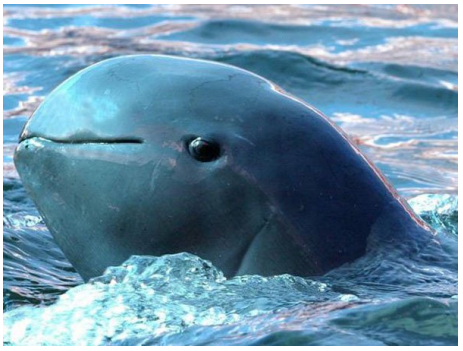
Solution: Par associations série $R_m = R_p + R_b$ et $R_f = 2R_v + R_a$, puis parallèle : $R'_p = \dfrac{R_m R_f}{R_m + R_f} = 0,13 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

R6. Calculer la puissance perdue à travers cette paroi. Commenter.

Solution: La puissance perdue est donnée par la « loi d'Ohm » : $\boxed{\Phi'_p = \dfrac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R'_p}} = 158 \text{ W}$

La puissance perdue a été divisée par 58 grâce à l'isolation !

Exercice n°2 Mammifères marins



Les mammifères sont des animaux à sang chaud dont la température reste constante. Pour maintenir leur température constante, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique $a = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$.
Loin du mammifère la température est de $T_0 = 293$ K. Près du mammifère la température est notée T_C. On modélise le mammifère par une sphère de rayon R.
On note r la distance au centre de l'animal. On étudie la température de l'eau (ou de l'air) au voisinage de l'animal en se plaçant en régime stationnaire.

R1. Que peut-on dire du flux thermique ϕ_{th} ? L'exprimer en fonction de r, $\dfrac{\text{d}T}{\text{d}r}$ et λ.

Solution: On étudie la température dans l'eau, il n'y a pas de source interne, et on se place en régime permanent. Ainsi, le flux thermique se conserve à travers toute sphère de rayon $r > R$.
L'animal étant représenté par une sphère, on peut raisonnablement considérer que le problème est invariant par toute rotation de centre O, donc T ne dépend que de r.
D'après la loi de Fourier, et par définition du flux : $\boxed{\phi_{th} = -\lambda \dfrac{\text{d}T}{\text{d}r} \times 4\pi r^2}$

R2. Relier ϕ_{th} à a et R.

Solution: La température du mammifère reste constante, or il produit $a \times \dfrac{4}{3}\pi R^3$ et perd ϕ_{th}, donc par conservation (1^{er} principe à l'animal de température constante) : $\boxed{\dfrac{4}{3}\pi R^3 a = \phi_{th}}$

R3. Exprimer le champ de température T en fonction de a, R, λ, r, et T_0.

Solution: $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\phi_{th}}{4\pi\lambda r^2} = -\dfrac{aR^3}{3\lambda r^2}$

Par intégration : $T(r) = \dfrac{aR^3}{3\lambda r} + B$, or $T(r=\infty) = T_0 = B$

Ainsi $\boxed{T(r) = T_0 + \dfrac{aR^3}{3\lambda r}}$

R4. Exprimer la température T_C à proximité du mammifère en fonction de a, λ, R et T_0.
Commenter la dépendance de T_C avec λ à R fixé puis avec R à λ fixé.

Solution: À proximité : $\boxed{T_C = T(R) = T_0 + \dfrac{aR^2}{3\lambda}}$

Si la conductivité du fluide augmente, la température à proximité diminue. T_C est d'autant plus élevée que l'animal est gros.

R5. Déterminer le rayon minimal d'un mammifère marin et terrestre pour que la température à sa proximité soit de 30 °C.
Pourquoi n'existe-t-il pas de mammifères marin de petite taille ? Pour information, le plus petit est le marsouin du pacifique mesure à peu près 1 m de long.

Solution: $R = \sqrt{\dfrac{3\lambda(T_C - T_0)}{a}}$

Dans l'air : $R = 1,2$ m et dans l'eau : $R = 12$ m

Il n'existe donc pas de petits animaux marins !

Données –

$\lambda_{\text{eau}} = 5,0.10^2$ W · m^{-1} · K^{-1} pour l'eau et $\lambda_{\text{air}} = 5,0$ W · m^{-1} · K^{-1} pour l'air.

Exercice n°3 Isolation thermique d'un ballon d'eau chaude ♪ ♪

Le ballon d'eau chaude est modélisé par un cylindre creux en acier d'épaisseur $e = 30$ mm, de hauteur $h = 157$ cm et de rayon intérieur $\ell = 57$ cm dont les parois planes sont parfaitement calorifugées.

R1. Montrer que le flux thermique sortant d'un cylindre de rayon r (avec $\ell < r < \ell + e$) ne dépend pas de r en régime stationnaire.

Solution: On considère une pellicule cylindrique entre r et $r + \mathrm{d}r$ **au sein de l'épaisseur** e.
On lui applique le premier principe entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathrm{d}(\delta U)}_{=0 \quad \text{RP}} &= \delta Q_{\text{ext}\to\Sigma} + \underbrace{\delta Q_p}_{=0} + \underbrace{\delta W}_{=0} \\ 0 &= \phi_{th}(r)\mathrm{d}t - \phi_{th}(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}t \\ \phi_{th}(r+\mathrm{d}r) &= \phi_{th}(r) \end{aligned}$$

Le flux sortant $phi_{th}(r)$ se conserve donc au sein de l'épaisseur e du ballon.

R2. Établir l'expression de la température dans l'épaisseur d'acier en fonction de ϕ, $T_i = T(\ell)$, h, λ, ℓ et r.

Solution: D'après la loi de Fourier et par définition du flux thermique : $\phi_{th} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 2\pi r h$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\phi_{th}}{2\pi r h \lambda}$

On intègre : $T(r) = -\dfrac{\phi_{th}}{2\pi h \lambda} \ln(r) + B$

Or $T(\ell) = T_i = -\dfrac{\phi_{th}}{2\pi h \lambda} \ln(\ell) + B$

Ainsi $\boxed{T(r) = T_i - \dfrac{\phi_{th}}{2\pi h \lambda} \ln \dfrac{r}{\ell}}$

R3. En déduire l'expression de ϕ en fonction de $T_i - T_e$ (avec $T_e = T(\ell + e)$), h, λ, ℓ, e.

Solution: $T_e = T(\ell+e) = T_i - \dfrac{\phi_{th}}{2\pi h \lambda} \ln \dfrac{\ell + e}{\ell}$, donc $T_i - T_e = \dfrac{\phi_{th}}{2\pi h \lambda} \ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right)$, donc $\boxed{\phi_{th} = \dfrac{2\pi h \lambda (T_i - T_e)}{\ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right)}}$

R4. Par une analogie à préciser, en déduire la résistance thermique du ballon. La calculer numériquement.

Solution: On identifie la résistance thermique : $R_{th} = \dfrac{T_i - T_e}{\phi_{th}}$ soit $\boxed{R_{th} = \dfrac{1}{2\pi h \lambda} \ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right)}$

A.N. $R_{th} =$ K · W^{-1}

On décide d'isoler le dispositif. Une première solution consiste à utiliser de la laine de verre d'épaisseur $e' = 300$ mm. Une autre possibilité est de choisir du polyester d'épaisseur $e'' = 50$ mm.

R5. Calculer la nouvelle résistance thermique.

Solution: On peut considérer que les deux résistances sont en série car traversées par le même flux, les résistances se somment : $R' = \dfrac{1}{2\pi h \lambda} \left[\ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{e'}{\ell + e}\right)\right]$

ou $R'' = \dfrac{1}{2\pi h \lambda} \left[\ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{e''}{\ell + e}\right)\right]$

R6. Quel est le meilleur choix ?

Solution: Il faut choisir la solution de résistance thermique totale la plus élevée qui assure la meilleure isolation thermique.

Données – Conductivités thermiques

- Acier : $\lambda = 50$ W · m^{-1} · K^{-1} ;
- Laine de verre : $\lambda' = 0,035$ W · m^{-1} · K^{-1} ;
- Polyester : $\lambda'' = 0,022$ W · m^{-1} · K^{-1}.

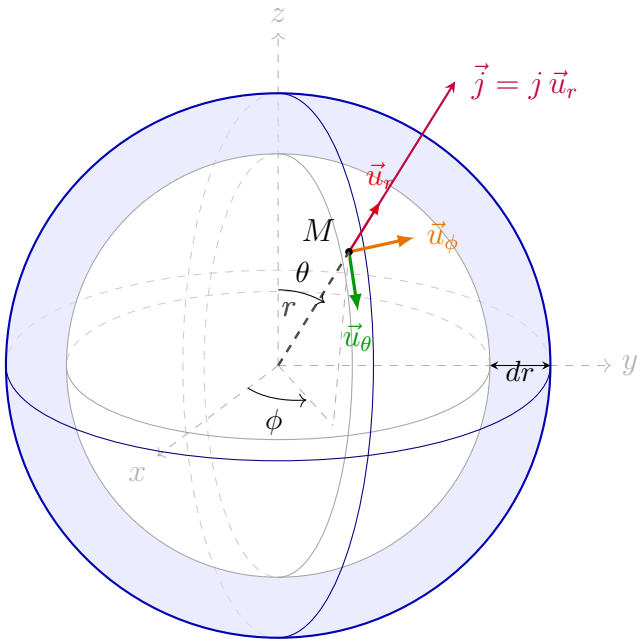
II Équation de diffusion

Exercice n°4 Température dans une botte de paille

On étudie une botte de paille, que l'on assimile à une sphère de rayon R. La fermentation au sein de la paille fournit une puissance volumique P_b uniforme. On étudie la température dans la botte de paille. On se place en régime permanent (sauf dans la dernière question).

R1. Par un bilan local à un système judicieusement choisi, établir l'équation différentielle vérifiée par T au sein de la botte de paille : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{P_b}{\lambda_b}r^2$

Solution: La botte de paille étant sphérique, on peut supposer $T(r)$.



On considère le système Σ constitué de la pellicule sphérique située entre r et $r+\mathrm{d}r$.
On lui applique le premier principe, en régime stationnaire :

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\underbrace{\mathrm{d}(\delta U)}_{=0}}_{\text{RS}} &= \delta Q_{\text{ext}\to\Sigma} + \delta Q_p + \underbrace{\underbrace{\delta W}_{=0}}_{\text{isochore}} \\
0 &= \iint_{S(r)} \overrightarrow{j_{th}}(r)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t + \iint_{S(r+\mathrm{d}r)} \overrightarrow{j_{th}}(r+\mathrm{d}r)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t + P_b\times 4\pi r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}t \\
0 &= j_{th}(r)S(r) - j_{th}(r+\mathrm{d}r)S(r+\mathrm{d}r) + 4\pi r^2 P_b\mathrm{d}r \\
0 &= -\frac{\mathrm{d}(S(r)j_{th}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r + 4\pi r^2 P_b\mathrm{d}r \\
0 &= -\frac{\mathrm{d}(4\pi r^2 j_{th})}{\mathrm{d}r} + 4\pi P_b r^2 \\
0 &= -\frac{\mathrm{d}(r^2 j_{th})}{\mathrm{d}r} + P_b r^2 \\
0 &\underset{\text{Fourier}}{=} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) + P_b r^2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) &= -\frac{P_b}{\lambda_b}r^2
\end{aligned}
$$

R2. Établir l'expression de la température $T(r)$ dans la botte de paille en régime stationnaire, en prenant $T(R) = T_{\text{ext}}$, puis représenter l'allure de T en fonction de r.

Solution: Par intégration : $r^2\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{P_b r^3}{2\lambda_b} + A$

En $r = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ ne peut pas diverger, donc $0 = 0 + A$, soit $A = 0$

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{P_b r}{2\lambda_b}$

Par intégration : $T(r) = -\dfrac{P_b r^2}{4\lambda_b} + B$

Or $T(R) = T_{\text{ext}} = -\dfrac{P_b R^2}{4\lambda_b} + B$

Ainsi $\boxed{T(r) = T_{\text{ext}} + \dfrac{P_b}{4\lambda_b}(R^2 - r^2)}$

R3. Quelle est la température au centre de la botte ?

Solution: Au centre de la botte : $T(0) = T_{\text{ext}} + \dfrac{P_b}{4\lambda_b} R^2$

R4. Quand la fermentation s'arrête, combien de temps faut-il à la botte pour se refroidir ?

Solution: Équation de diffusion sans source : $\rho_b c_b \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda_b \Delta T$

En ordre de grandeur : $\dfrac{\rho_b c_b}{\tau} \sim \dfrac{\lambda_b}{R^2}$, soit $\tau \sim \dfrac{R^2 \rho_b c_b}{\lambda_b} = 6,7.10^5 \text{ s} = 7,7 \text{ jours}$

Données – Pour la paille

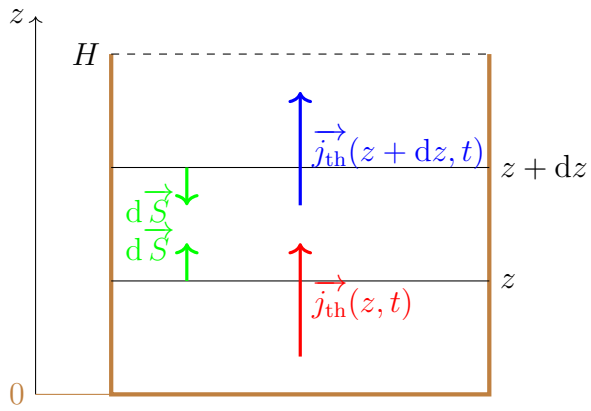
- $\rho_b = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de la paille,
- $c_b = 1600 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique de la paille,
- $\lambda_b = 0,060 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ sa conductivité thermique massique de la paille,
- $R = 0,5 \text{ m}$
- $P_b = 40 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$

Exercice n°5 Compost ♪ ♪

Du fait de la décomposition des aliments, un bloc de compost de grande surface S et de hauteur H produit une puissance volumique $\mathscr{P}_{\text{v}} = a \sin\left(\dfrac{\pi z}{H}\right)$. L'axe (Oz) est choisi ascendant.
La surface en $z = 0$ (au bas du compost) est parfaitement isolée thermique. Celle en $z = H$ subit un échange conducto-convectif, de coefficient h, avec l'air extérieur, dont la température est notée T_a.
On note λ la conductivité thermique du compost, c la capacité thermique massique du compost, ρ sa masse volumique.

R1. Établir l'équation vérifiée par la température $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mathscr{P}_{\text{v}}$

Solution:



On étudie le système Σ mésoscopique entre z et $z+\mathrm{d}z$. On applique le premier principe entre t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\delta U) &= \delta Q_{\text{ext}\to\Sigma} + \delta Q_p + \underbrace{\delta W}_{\substack{=0 \text{ isochore, pas de travail mécanique}}} \\
\delta mc(T(z,t+\mathrm{d}t)-T(z,t)) &= \iint_{S_z} \overrightarrow{j_{\text{th}}}(z,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{ext}\to\Sigma}}\mathrm{d}t + \iint_{S_{z+\mathrm{d}z}} \overrightarrow{j_{\text{th}}}(z+\mathrm{d}z,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{ext}\to\Sigma}}\mathrm{d}t + \mathscr{P}_v S\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
\rho S\mathrm{d}z c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t &= j_{th}(z,t)S\mathrm{d}t - j_{th}(z+\mathrm{d}z,t)S\mathrm{d}t + \mathscr{P}_v S\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
\rho S\mathrm{d}z c\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t &= -\frac{\partial j_{th}}{\partial z}\mathrm{d}z S\mathrm{d}t + \mathscr{P}_v S\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\
\rho c\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{th}}{\partial z} + \mathscr{P}_v
\end{aligned}$$

D'après la loi de Fourier : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(T) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

Ainsi, on trouve bien $\boxed{\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mathscr{P}_{\text{v}}}$

R2. ♪ ♪ Résolution.

(a) Exprimer $T(z)$, en fonction de deux constantes d'intégration.

(b) Exprimer $j_{th}(z=0)$. Que doit-il valoir ? En déduire une des deux constantes.

(c) Exprimer $j_{th}(z=H)$. À quoi est-il égal ? En déduire l'autre constante.

(d) Exprimer $T(z)$.

(e) Représenter l'allure de T.

Solution: En régime stationnaire :

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} + \mathscr{P}_{\text{v}} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} &= -\frac{\mathscr{P}_{\text{v}}}{\lambda} \\
\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} &= -\frac{a}{\lambda}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} &= \frac{aH}{\lambda\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + A \\
T(z) &= \frac{aH^2}{\lambda\pi^2}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + Az + B
\end{aligned}$$

Par continuité du flux en $z=0$ (parfaitement isolé) : $j_{th}(z=0) = 0 =$, soit $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(0) = 0 = \frac{aH}{\lambda\pi} + A$, donc

$A = -\dfrac{aH}{\lambda\pi}$
Par continuité du flux en $z = H$:

$$\begin{aligned} j_{th}(z = H^-) &= j_{cc} = h(T(H) - T_a) \\ -\lambda\frac{aH}{\lambda\pi}\cos\left(\frac{\pi H}{H}\right) + \lambda\frac{aH}{\lambda\pi} &= h\left(\frac{aH^2}{\lambda\pi^2}\sin\left(\frac{\pi H}{H}\right) - \frac{aH}{\lambda\pi}\times H + B - T_a\right) \\ \frac{2aH}{\pi} &= h\left(0 - \frac{aH^2}{\lambda\pi} + B - T_a\right) \\ B &= T_a + \frac{2aH}{h\pi} + \frac{aH^2}{\lambda\pi} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{T(z) = \dfrac{aH^2}{\lambda\pi^2}\left(\pi + \sin\left(\dfrac{\pi z}{H}\right)\right) - \dfrac{aH}{\lambda\pi}z + T_a + \dfrac{2aH}{h\pi}}$

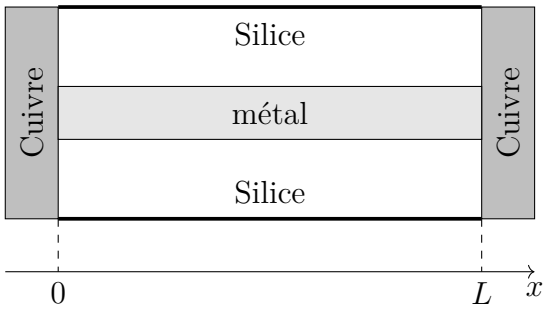
R3. Exprimer la puissance dégagée par le compost.

Solution: La puissance dégagée par le compost vaut : $\boxed{\mathscr{P} = h(T(H) - T_a)S = j_{th}(H)S = \dfrac{2aHS}{\pi}}$

Exercice n°6 Fusible ♪ ♪ ♪

Le coupe-circuit à fusible, en abrégé fusible, est, en électricité et électronique, un organe de sécurité dont le rôle est d'ouvrir un circuit électrique lorsque le courant électrique dans celui-ci atteint une valeur d'intensité donnée pendant un certain temps. Son nom vient du fait qu'il fonctionne par fusion d'un filament conducteur, sous l'effet de l'élévation de température provoquée par la surintensité

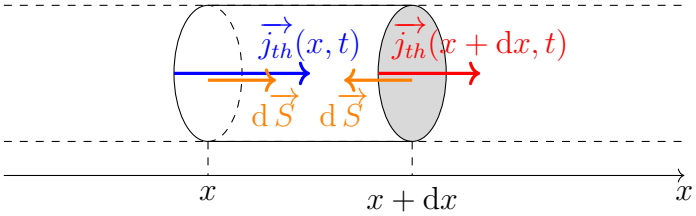
Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S, de longueur L et de conductivités thermique λ et électrique γ, uniformes au sein du fil.
Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0. Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite.
Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I.
On se place en régime permanent.



R1. En effectuant un bilan d'énergie, établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I^2}{\gamma\lambda S^2}$$

Solution: Système Σ : portion infinitésimale x et $x + \mathrm{d}x$, entre t et $t + \mathrm{d}t$.



On applique le premier principe à Σ entre t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\mathrm{d}(\delta U)}_{=0 \quad \text{RS}} &= \delta Q_{\text{ext}\to\Sigma} + \delta Q_p + \underbrace{\delta W}_{=0 \quad \text{isochore}} \\
0 &= \iint_{S_x} \overrightarrow{j_{th}}(x,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t + \iint_{S_{x+\mathrm{d}x}} \overrightarrow{j_{th}}(x+\mathrm{d}x,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t + \delta R I^2 \mathrm{d}t + 0 \\
0 &= j_{th}(x,t)S\mathrm{d}t - j_{th}(x+\mathrm{d}x,t)S\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}x}{S\gamma} I^2 \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{d}j_{th}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x S\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}x}{S\gamma} I^2 \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{d}j_{th}}{\mathrm{d}x} S + \frac{1}{S\gamma} I^2
\end{aligned}$$

D'après la loi de Fourier : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\,(D) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}$

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{I^2}{\lambda S^2 \gamma}$

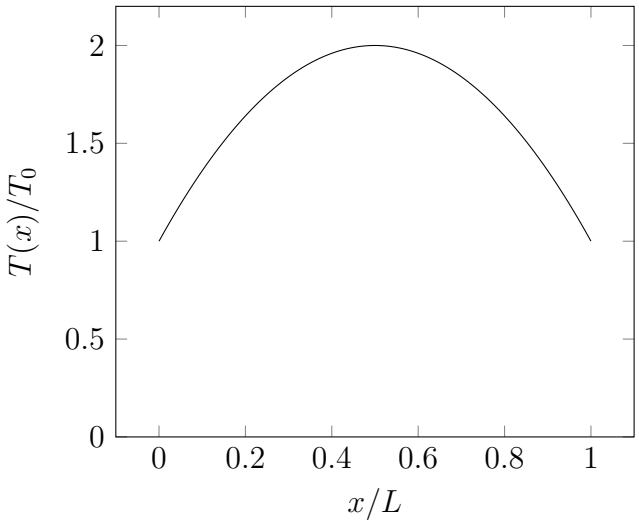
R2. Déterminer l'évolution de la température en fonction de x.

Solution: Deux intégrations : $T(x) = -\dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2}x^2 + Ax + B$

Or $T(0) = T_0 = B$ et $T(L) = T_0 = -\dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2}L^2 + AL + T_0$

Ainsi $\boxed{T(x) = -\dfrac{I^2}{2\lambda\gamma S^2}(x^2 - xL) + T_0}$

R3. Tracer l'allure de $T(x)$. Où la température est-elle maximale ?



Solution:

La température est maximale en $\dfrac{L}{2}$.

R4. Déterminer le diamètre du fil de plomb à prévoir pour qu'il fonde (à la température T_F) quand l'intensité du courant dépasse l'intensité maximale $I_{\max}$ autorisée.

Faire l'application numérique.

Solution: Le fil va fondre au centre, en $\frac{L}{2}$, il faut donc chercher la condition pour que si $I = I_{\max}$, $T(L/2) = T_F$:

$$\begin{aligned}
-\frac{I_{\max}^2}{2\lambda\gamma S^2}\left(\frac{L^2}{4}-\frac{L^2}{2}\right)+T_0 &= T_F \\
\frac{I_{\max}^2 L^2}{8\lambda\gamma S^2} &= T_F - T_0 \\
S^2 &= \frac{I_{\max}^2 L^2}{8\lambda\gamma(T_F-T_0)} \\
S &= \frac{I_{\max} L}{\sqrt{8\lambda\gamma(T_F-T_0)}} \\
\frac{\pi d^2}{4} &= \frac{I_{\max} L}{\sqrt{8\lambda\gamma(T_F-T_0)}} \\
d^2 &= \frac{4}{\pi}\frac{I_{\max} L}{\sqrt{8\lambda\gamma(T_F-T_0)}} \\
d^2 &= \frac{2}{\pi}\frac{I_{\max} L}{\sqrt{2\lambda\gamma(T_F-T_0)}} \\
d &= \sqrt{\frac{2I_{\max} L}{\pi\sqrt{2\lambda\gamma(T_F-T_0)}}}
\end{aligned}$$

A.N. : $d = 0,61.10^{-3}$ m $= 0,61$ mm

R5. Bilan de puissance

(a) Exprimer littéralement la puissance thermique $\mathscr{P}_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil.

Solution:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{th}(x=0) &= \iint_S \overrightarrow{j_{th}}(x=0)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \\
&= j_{th}(0)S \\
&= -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=0)S \\
&= -\frac{I^2 L}{2\gamma S} < 0
\end{aligned}$$

Cette puissance est définie algébriquement selon $+\overrightarrow{u_x}$, donc dirigée vers le fil. Comme elle est négative, elle est réellement fournie par le fil.

> **Attention –**
> Algébrisation, sens du flux défini !

(b) Même question pour la puissance thermique $P_{th}(L)$ transférée en $x = L$.

Solution:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{th}(x=0) &= \iint_S \overrightarrow{j_{th}}(x=L)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}\\ &= j_{th}(L)S\\ &= -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=L)S\\ &= -\lambda\left(-\frac{I^2}{\lambda\gamma S^2}L+\frac{I^2L}{2\lambda\gamma S^2}\right)S\\ &= \frac{I^2L}{2\gamma S}>0\end{aligned}$$

Cette puissance est définie algébriquement selon $+\overrightarrow{u_x}$, donc dirigée vers l'extérieur du fil. Comme elle est positive, elle est réellement fournie par le fil.

Attention –
Algébrisation, sens du flux défini !

(c) Quelle relation a-t-on entre $P_{th}(0)$, $P_{th}(L)$ et la puissance électrique P_e fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

Solution:
Puissance électrique fournie à l'ensemble du fil, et donc reçue par le fil : $\mathscr{P}_e = RI^2 = \dfrac{L}{\gamma S}I^2$
Ainsi $\mathscr{P}_e = \mathscr{P}_{th}(x=0) + \mathscr{P}(x=L)$

Données –

- Résistance électrique d'un conducteur ohmique de conductivité électrique γ, de section S et de longueur $\mathrm{d}x$: $\delta R = \dfrac{\mathrm{d}x}{\gamma S}$
- Conductivité électrique du Plomb : $\gamma = 2,21.10^6\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}$;
- Conductivité thermique du Plomb : $\lambda(Pb) = 34\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$;
- Température ambiante : $T_0 = 26\ °\mathrm{C}$;
- Température de fusion du plomb : $T_F = 328\ °\mathrm{C}$;
- Longueur du fusible : $L = 2,5\ \mathrm{cm}$;
- Intensité maximale : $I_{\max} = 5\ \mathrm{A}$.

Exercice n°7 Effet Cave ♪ ♪ ♪

Exercice « plus facile » après avoir traité le chapitre sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique.

Le vin (à consommer avec modération) doit être conservé à une température constante, de l'ordre de 14 °C. Or la température extérieure varie au cours d'une journée et au cours de l'année. À quelle profondeur doit-on placer une cave pour y stocker du vin ?

On étudie l'évolution de la température dans le sol, avec l'axe (Oz) descendant. La température en $z = 0$ varie dans le temps (variations journalière et annuelle). Grâce à la théorie de Fourier (toujours le même !), on peut mener l'étude dans le cas où la température varie sinusoïdalement dans le temps : $T(z=0,t) = T_0 + T_m\cos(\omega t)$, avec T_0 la température moyenne et T_m l'amplitude de la variation.

R1. Écrire l'équation de diffusion dans le sol.

Solution: $\rho c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

On recherche la solution de l'équation de diffusion sous la forme : $T(z,t) = T_0 + \theta(z,t) = T_0 + \theta(z)\cos(\omega t + \varphi(z))$.
Par linéarité de l'équation, on peut utiliser la notation complexe : $\underline{\theta}(z,t) = \theta_m e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$

R2. En déduire que $\underline{k}$ vérifie la relation $\underline{k}^2 = -i\dfrac{\rho c\omega}{\lambda}$

Solution: On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
\rho c i\omega\theta_m e^{i(\omega t-\underline{k}z)} &= \lambda(-i\underline{k})^2\theta_m e^{i(\omega t-\underline{k}z)}\\
\rho c i\omega &= -\lambda\underline{k}^2\\
\underline{k}^2 &= -i\frac{\rho c}{\lambda}\omega
\end{aligned}$$

R3. En déduire $\underline{k}$ (on pourra astucieusement utiliser le fait que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$).

Solution:

$$\begin{aligned}
\underline{k}^2 &= -i\frac{\rho c}{\lambda}\omega\\
\underline{k}^2 &= \frac{\rho c}{\lambda}\omega e^{-i\frac{\pi}{2}}\\
\underline{k} &= \pm\sqrt{\frac{\rho c\omega}{\lambda}}e^{-\frac{i\pi}{4}}\\
\underline{k} &= \pm\sqrt{\frac{\rho c\omega}{\lambda}}\frac{1-i}{\sqrt{2}}\\
\underline{k} &= \pm\sqrt{\frac{\rho c\omega}{2\lambda}}(1-i)
\end{aligned}$$

R4. En déduire l'expression de $\underline{\theta}$, puis $\theta(z,t)$ que l'on écrira sous la forme : $\theta(z,t) = \theta_m e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \dfrac{z}{\delta}\right)$
Identifier la distance caractéristique δ que l'on exprimera en fonction des constante du problème.

Solution:

$$\begin{aligned}
\underline{\theta}(z,t) &= \theta_m\exp\left(i\left(\omega t \mp\sqrt{\frac{\rho c\omega}{2\lambda}}(1-i)\right)z\right)\\
\underline{\theta}(z,t) &= \theta_m\exp\left(i\left(\omega t \mp\sqrt{\frac{\rho c\omega}{2\lambda}}\right)z \mp\sqrt{\frac{\rho c\omega}{2\lambda}}z\right)\\
\underline{\theta}(z,t) &= \theta_m\exp\left(\mp\sqrt{\frac{\rho c\omega}{2\lambda}}z\right)\exp\left(i\left(\omega t \mp\sqrt{\frac{\rho c\omega}{2\lambda}}\right)z\right)
\end{aligned}$$

On garde la solution avec le $-$ (qui vient du $+$ de $\underline{k}$) car θ ne peut pas diverger pour $z > 0$).

Ainsi, en passant à la partie réelle $\boxed{\theta(z,t) = \theta_m\exp\left(\mp\sqrt{\dfrac{\rho c\omega}{2\lambda}}z\right)\cos\left(\omega t \mp\sqrt{\dfrac{\rho c\omega}{2\lambda}}z\right)}$

On identifie $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c\omega}}$

R5. Évaluer ω pour des variations journalières et annuelles. Calculer δ dans ces deux cas. Conclure.

Solution: Variation journalière $T_j = 24$ h, donc $\omega_j = 7,3.10^{-5}$ rad $\cdot$ s^{-1} , soit $\delta_j = 0,11$ m
Variation annuelle $T_a = 365$ jours, donc $\omega_j = 2.10^{-7}$ rad $\cdot$ s^{-1} , soit $\delta_j = 2,1$ m
Une cave enfouit à quelques dizaines de centimètres de profondeur permet de maintenir la température constante à l'échelle de la journée, mais pas de l'année. Pour garder une température constante sur l'année, il faut qu'elle soit à 6 à 10 m de profondeur (C'est ainsi pourquoi dans les grottes il fait toujours la même température !).

Données – Sol

- Conductivité thermique $\lambda = 0,8$ W $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ m^{-1}
- Capacité thermique massique $c = 900$ J $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ kg^{-1}
- Masse volumique $\rho = 2,0.10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}

III Résolution de problème

Exercice n°8 Ordres de grandeur ♪ ♪

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure 3 minutes. Un œuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 g. Quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1,2 et 1,8 kg ?

Solution: La durée caractéristique de diffusion est $\tau \sim \dfrac{R^2}{D}$ où R est le rayon de l'œuf. On peut considérer que l'œuf est à la coque quand la diffusion n'a pas le temps d'atteindre le cœur de ł'oe uf.

On peut supposer que les œufs de poule et d'autruche sont similaires en terme de constitution (même λ, ρ, D, c).

Masse d'un œuf $m = \rho \times \dfrac{4\pi R^3}{3}$, donc $R = \left(\dfrac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$

Faisons le rapport du temps de cuisson de l'œuf d'autruche et de la poule :

$$\begin{aligned}\frac{\tau_a}{\tau_p} &\sim \frac{R_a^2}{R_p^2} \\ &\sim \left(\frac{m_a}{m_p}\right)^{2/3} \\ &\sim 8,5\end{aligned}$$

Donc il faudra compter environ 25 à 26 minutes de cuisson.

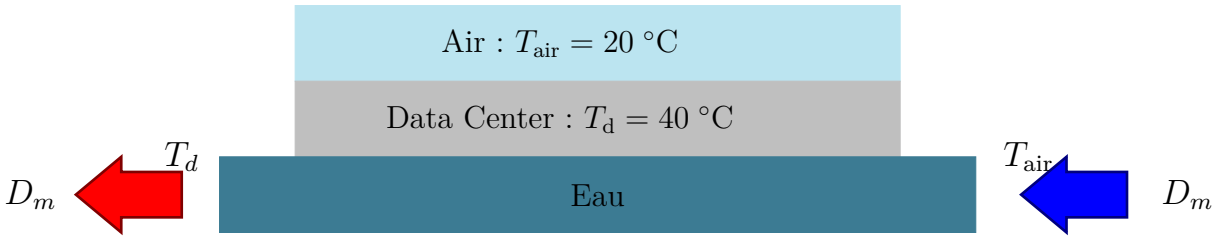
Exercice n°9 Data Center ♪ ♪ ♪

On considère un système de refroidissement d'un data center parallélépipédique. Il est en contact sur sa face supérieure avec l'air à la température T_{air} et sur sa face inférieure avec un circuit d'eau.

Les échanges thermiques entre le data center et l'air obéissent à la loi de Newton.

L'eau, qui parcourt le circuit avec un débit massique D_m, y pénètre à la température T_{air} de l'air et en ressort à la température T_d.

Sachant que le data center consomme une puissance électrique $\mathscr{P} = 20$ MW, quel est le débit massique D_m à imposer dans le circuit d'eau pour que la température du data center reste uniforme et constante à la valeur T_d ?



Données –

- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c = 4,18$ kJ · K^{-1} · kg^{-1}
- Coefficient conducto-convectif (loi de Newton) : $h = 10$ W · m^{-2} · K^{-1}
- Surface d'échange entre le Data Center et l'air $S = 10^4$ m^2
- Température de l'air : $T_{\text{air}} = 20$ °C ; Température du Data Center : $T_d = 40$ °C

Solution: Il y a plusieurs systèmes en présence, il faut bien les identifier, et il faut les étudier séparément.

■ 1er principe pour un fluide en écoulement à l'eau entre l'entrée et la sortie : $\Delta_{es}h = w_u + q$, or il n'y a pas de pièce mobile donc $w_u = 0$.
Donc l'eau reçoit de la part du Data Center le transfert thermique massique $q = \Delta_{es}h = c(T_d - T_{\text{air}})$, soit une puissance $\boxed{\mathscr{P}_{th,DT\to eau} = D_m c(T_d - T_{\text{air}})}$

■ 1er principe au data center entre t et $t + \mathrm{d}t$: $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$, avec :
- $\delta W = \mathscr{P}\mathrm{d}t$,
- $\mathrm{d}U = 0$ (température constante)
- il échange du transfert thermique :
avec l'eau : $\mathscr{P}_{th,eau\to DT} = -\mathscr{P}_{th,DT\to eau}$
et avec l'air : $\mathscr{P}_{th,air\to DT} = -h(T_d - T_{\text{air}})S < 0$, si $T_d > T_{\text{air}}$, la puissance est reçue par l'air de la part du Data Center.

Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathscr{P} - \mathscr{P}_{th,DT\to eau} - h(T_d - T_{\text{air}})S \\ 0 &= \mathscr{P} - D_m c(T_d - T_{\text{air}}) - h(T_d - T_{\text{air}})S \\ D_m &= \frac{\mathscr{P} - h(T_d - T_{\text{air}})S}{c(T_d - T_{\text{air}})} \\ &= 215 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Exercice n°10 Température d'une cuillère ♪ ♪ ♪

Une cuillère est plongée dans un thé. Une partie de son manche échange par convection avec l'air ambiant. Le coefficient de convection vaut $h = 5$ W · m^{-2} · K^{-1}.
Quelle est la température de l'extrémité de la cuillère en aluminium ($\lambda = 240$ W · m^{-1} · K^{-1}) ?

Solution: Idée : même raisonnement que pour l'ailette de refroidissement, il faut ensuite calculer la température au bout de la cuillère. On peut faire l'approximation de la « longue cuillère » pour effectuer des calculs plus facilement.