Électromagnétisme

# TD EM4 Dipôle magnétostatique

| Capacités \ Exercice n° | § | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique. | I.3.a) | | | | | ✎ |
| Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. | I.3.b) | | | | ✎ | |
| Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent. | I.4 | | | | | |
| Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. | II.1 | | ✎ | ✎ | ✎ | ✎ |
| Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux. | II.3 | | | ✎ | | |
| Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. | II.2 | | | | ✎ | |
| Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. | II.2.b) | ✎ | ✎ | | ✎ | ✎ |

## Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : 1, 2.

♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : 1, 2, 3

♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : 2, 3, 4, 5.

## Données –

- Permittivité absolue du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m$^{-1}$.
- Perméabilité absolue du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H $\cdot$ m$^{-1}$.
- Charge élémentaire $e = 1,609.10^{-19}$ C
- Constante de Boltzmann $k_B = 1,38.10^{-23}$ J $\cdot$ K$^{-1}$
- La résultante des actions subies par un dipôle magnétostatique plongé dans un champ magnétostatique extérieur $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ (pouvant être non uniforme) s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$$

- Le moment des actions subies par un dipôle magnétostatique plongé dans un champ magnétostatique extérieur $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ (pouvant être non uniforme) s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}(O)$$

- L'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique extérieur $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ (pouvant être non uniforme) s'écrit :

$$\mathscr{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}}(O)$$

# I Exercices d'application

## Exercice n°1 Mesure du champ magnétique terrestre ♪

On dispose d'un solénoïde comportant $n = 100$ spires/mètre, parcouru par un courant d'intensité $I = 100$ mA, qui crée le champ $B = \mu_0 nI$. On le place sur un support horizontal et on oriente son axe dans la direction Est-Ouest. On introduit à l'intérieur une aiguille aimantée mobile en rotation autour d'un axe vertical. Cette aiguille s'oriente parallèlement à la composante horizontale du champ existant à l'endroit où elle se trouve.

Q1. Calculer l'intensité du champ magnétique créé par le solénoïde.

Q2. Sachant que l'aiguille aimantée fait un angle $\theta = 58°$ avec l'axe du solénoïde, déterminer la valeur de la composante horizontale $\overrightarrow{B_H}$ du champ magnétique terrestre.

## Exercice n°2 Mesure d'un champ magnétique ♪

On considère une boussole (de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, de moment d'inertie $J$ par rapport à un axe passant par son centre de gravité $G$). Cette boussole est posée sur une pointe située en $G$ l'autorisant à tourner uniquement dans un plan horizontal. Elle est soumise à l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme situé dans le plan horizontal.

Q1. La boussole est légèrement écartée de sa position d'équilibre tout en restant dans le plan horizontal puis elle évolue librement. Exprimer la période des petites oscillations.

Afin de déduire la valeur de la norme de $\overrightarrow{B}$ (notée $B$), sans connaître ni le moment d'inertie $J$ ni le moment magnétique $\mathcal{M}$, on ajoute un champ magnétique $\overrightarrow{B'}$ (de norme $B'$) crée par une bobine longue. On place d'abord la bobine telle que $\overrightarrow{B'}$ et le champ $\overrightarrow{B}$ soient parallèle et de même sens et on mesure la période $T_1$ des petites oscillations de la boussole. On inverse ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur $T_2$ de la période des petites oscillations.

Q2. En déduire $B$ en fonction de $B'$, $T_1$ et $T_2$ sachant que $B < B'$.

## Exercice n°3 Expérience de Stern et Gerlach ♪ ♪

On poursuit l'étude de l'expérience de Stern et Gerlach décrite dans le cours.

**Données –**

- longueur de l'électroaimant $\ell = 3,5$ cm,
- distance $D = \ell/2$ entre le centre de l'électroaimant et l'écran (directement à la sortie de l'aimant),
- champ magnétique $\overrightarrow{B} = az\overrightarrow{u_z}$, de gradient constant de champ magnétique $\dfrac{\partial B_z}{\partial z} \approx 5.10^2$ T · m$^{-1}$
- température du jet $T = 1000$ °C
- Masse molaire de l'argent $M = 107$ g · mol$^{-1}$
- constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K$^{-1}$
- constante d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathcal{A} = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol$^{-1}$

Q1. Calculer la vitesse quadratique moyenne $u$ des atomes d'argent.

Q2. Dans l'électroaimant utilisé et schématisé, au voisinage de quel pôle le champ magnétostatique est-il le plus intense ? Dans quel sens le gradient de $B_z$ est-il orienté ?

Q3. Exprimer la force magnétique subie par les atomes en fonction de $\mathcal{M}_z$, $a$ et $\overrightarrow{u_z}$.

Q4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un atome d'argent, montrer que la trajectoire dans la zone de l'électroaimant est $z(y) = \dfrac{\mathcal{M}_z a}{2m}\left(\dfrac{y}{u}\right)^2$

Q5. En déduire la cote $Z$ d'impact sur l'écran.

Q6. Dans l'expérience de Stern et Gerlach, $Z_1 \approx 0,1$ mm. Estimer les valeurs possibles de $\mathcal{M}_z$.

Q7. Montrer qu'il est légitime de négliger l'effet de la pesanteur sur la trajectoire du jet atomique.

# II Exercices d'approfondissement

## Exercice n°4 Interaction entre deux moments magnétiques ♪ ♪

On donne le champ magnétique créé en un point $P$ par un dipôle de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ placé en $A$ :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\overrightarrow{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{u_{AP}}\right)\overrightarrow{u_{AP}} - \overrightarrow{\mathcal{M}}}{AP^3} \text{ où } \overrightarrow{u_{AP}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}$$

Deux dipôles magnétiques de moments $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont respectivement en $O$ et en $M$.

Q1. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$, $\overrightarrow{OM}$ et $OM$.

Q2. On suppose que $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OM}$. Exprimer la force entre les dipôles. À quelle condition est-elle attractive ?

Q3. Même question si $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires $\overrightarrow{OM}$.

Q4. Établir puis évaluer numériquement l'ordre de grandeur du magnéton de Bohr en utilisant l'analyse dimensionnelle.

Q5. Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique.
À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique $k_BT$ ?
Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

## Exercice n°5 Précession de Larmor ♪ ♪ ♪

Aux électrons, noyaux atomiques ou atomes sont associés au niveau microscopique des moments cinétiques $\overrightarrow{L}$ et des moments magnétiques $\overrightarrow{m}$ liés par la relation $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \gamma\overrightarrow{L}$ avec $\gamma$ rapport gyromagnétique de l'entité considérée.

On soumet une assemblée de protons (rapport gyromagnétique $\gamma = 2,7\cdot10^8$ C $\cdot$ kg$^{-1}$) de moments magnétiques individuels $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ à un champ magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$.

On ne prendra en compte dans la suite que l'action de ce champ magnétostatique.

Q1. En appliquant le théorème du moment cinétique à l'un de ces protons dans le référentiel d'étude supposé galiléen, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\omega_L}\wedge\overrightarrow{\mathcal{M}}$ où on exprimera $\overrightarrow{\omega_L}$

On considère qu'initialement le moment magnétique fait avec l'axe $(Oz)$ l'angle $\theta$ et que sa norme initiale est $\mathcal{M}_0$.

Q2. En utilisant l'équation différentielle précédente, montrer que la norme du moment magnétique* reste constante au cours du temps.

Q3. Montrer de même que la projection $\mathcal{M}_z$ du moment magnétique sur l'axe $(Oz)$ est constante.

On pose $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_z\overrightarrow{u_z} + \mathcal{M}_u\overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dans le plan perpendiculaire à $(Oz)$.

Q4. Montrer que $\overrightarrow{u}$ vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\omega_L}\wedge\overrightarrow{u}$

Q5. Sur un schéma, représenter $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\omega_L}\wedge\overrightarrow{u}$. En déduire l'évolution temporelle de $\overrightarrow{u}$ dans le plan orthogonal à l'axe $(Oz)$.

Q6. En déduire le mouvement de ce moment magnétique.

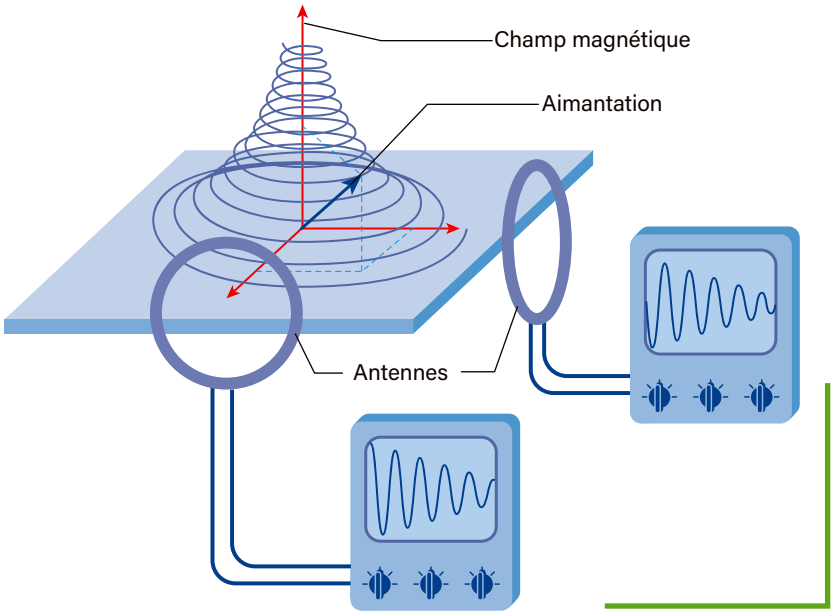
Q7. Faire l'application numérique de $\omega_L$ pour $B_0 = 1,5$ T. Dans quel domaine spectral se situe la fréquence $f_L$ ?
Dans quel dispositif médical ce mouvement de précession est-il employé ?

---

∗. Exprimer la dérivée de $\|\overrightarrow{\mathcal{M}}\|^2$ et conclure.

## LA SPIRALE DU SPIN

**Lors d'une IRM, soumise à une onde radio, l'aimantation des noyaux *(flèche bleue)* s'est éloignée de la direction du champ magnétique jusqu'à être orthogonale. Elle y revient en suivant une trajectoire en spirale, car tout en effectuant une précession autour de l'axe du champ magnétique *(vertical)*, elle décroît dans le plan horizontal et croît dans la direction verticale. Deux antennes *(les cercles bleus)* mesurent l'évolution de cette aimantation. À partir des informations obtenues dans différents plans de coupe, on obtient une image.**




D'après Idées de Physique, Pour la Science n°360, Juin 2024
Article complet sur cahier de prépa : 3 pages sans équations