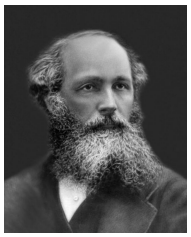
Électromagnétisme

# Chapitre EM5 Équations de Maxwell



James Clerk Maxwell (1831-1879) est un physicien et mathématicien écossais. Il a unifié l'électricité et le magnétisme qui étaient distincts jusqu'à la fin du XVIII$^{e}$ siècle. Le lien a été fait par Volta par l'invention sa pile, par Œrsted qui observa la déviation d'une aiguille aimantée par un fil parcouru par un courant. Puis il a été confirmé en 1831 par Faraday qui a créé un courant électrique dans un conducteur plongé dans un champ magnétique non stationnaire. En 1865, Maxwell fait une synthèse des différentes lois expérimentales de l'électrostatique, de la magnétostatique, et de l'induction sous forme de vingt équations, maintenant réduites à quatre équations.



Carl-Friedrich Gauss
(1777-1855)



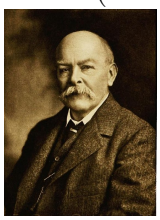
Joseph John Thomson
(1856-1940)



Michael Faraday
(1791-1867)



André-Marie Ampère
(1775-1836)



John Henry Poynting (1852-1914) est un physicien anglais qui a travaillé notamment sur les ondes électromagnétiques. Il définit ce qu'on appelle maintenant le vecteur de Poynting qui représente la puissance par unité de surface que transporte une onde électromagnétique et la direction de ce flux d'énergie. Ce vecteur est utilisé dans le théorème de Poynting, qui établit la conservation d'énergie des champs électriques et magnétiques.

## Pré-requis

- PCSI : Induction (loi de Faraday)
- PC : chap EM1. Électrostatique, chap EM3. Magnétostatique ; Toute l'analyse vectorielle.

## Objectifs du chapitre

- Énoncer et interpréter les équations de Maxwell locales et intégrales. Faire le lien avec les résultats de l'électro-, magnéto-statique et de l'induction.
- Effectuer des bilans d'énergie en introduisant le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie EM.
- Énoncer le cadre de l'ARQS magnétique et en étudier les conséquences.

## Plan du cours

**I Équations de Maxwell** **3**
I.1 Définition du champ électromagnétique . . 3
I.2 Équations de Maxwell . . . . . 3
I.3 Équations sous forme intégrale . . . . . 4
I.3.a) MG → Théorème de Gauss . . . . . 4
I.3.b) MT → Conservation du flux de $\vec{B}$ . 4
I.3.c) MF → Loi de Faraday . . . . . 4
I.3.d) MA → Théorème d'Ampère généralisé 5

**II Équation de conservation de la charge** **5**
II.1 Bilan à 1D . . . . . 5
II.2 Généralisation . . . . . 6
II.3 Conséquence en régime stationnaire . . . . 6
II.4 Loi des nœuds . . . . . 6

**III ARQS magnétique** **7**
III.1 Cadre de l'ARQS magnétique . . . . . 7
III.2 Équations de Maxwell . . . . . 8
III.3 Équation de conservation de la charge . . . 9

**IV Aspects énergétiques** **9**
IV.1 Densité volumique d'énergie EM . . . . . 9
IV.2 Vecteur de Poynting . . . . . 9
IV.3 Puissance volumique cédée par le champ EM 10
IV.4 Bilan d'énergie électromagnétique . . . . . 10

# Programme officiel

| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|---|---|
| **5.1 Sources du champ électromagnétique** | |
| **5.1.2 Conservation de la charge** | |
| Équation locale de conservation de la charge. | Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne.<br>Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie.<br>Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire ; relier cette propriété à la loi des nœuds de l'électrocinétique. |
| **5.4. Équations de Maxwell** | |
| **5.4.1. Postulats de l'électromagnétisme** | |
| Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales. | Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale.<br>Relier l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.<br>Établir l'équation locale de la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.<br>Utiliser une méthode de superposition.<br>**Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant des capteurs inductifs.** |
| **5.4.2. Aspects énergétiques** | |
| Vecteur de Poynting. Densité volumique d'énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting. | Utiliser les grandeurs énergétiques pour conduire des bilans d'énergie électromagnétique.<br>Associer le vecteur de Poynting et l'intensité lumineuse utilisée dans le domaine de l'optique. |
| **5.4.3. Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques** | |
| ARQS magnétique. | Discuter l'approximation des régimes quasi-stationnaires.<br>Simplifier et utiliser les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'approximation du régime quasi-stationnaire.<br>Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques en régime stationnaire. |

# Ai-je bien appris mon cours ?

1 – ☺ – ☹ – Établir l'équation de conservation de la charge en unidimensionnel en cartésien.

2 – ☺ – ☹ – Donner l'équation de conservation de la charge en géométrie quelconque.

3 – ☺ – ☹ – Que peut-on dire du vecteur densité de courant en régime stationnaire ? Quelles en sont les conséquences ? Quelle loi de l'électrocinétique trouve-t-on ?

4 – ☺ – ☹ – Donner et nommer les équations de Maxwell sous forme locale et intégrale.

5 – ☺ – ☹ – Obtenir la loi de Faraday à partir de l'équation de Maxwell-Faraday.

6 – ☺ – ☹ – Établir l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.

7 – ☺ – ☹ – Donner l'expression de la densité volumique de l'énergie électromagnétique, en distinguant les densités volumiques électrique et magnétique.

8 – ☺ – ☹ – Donner l'expression du vecteur de Poyting. Quelle information contient sa direction ? Quelle est l'unité de sa norme ?

9 – ☺ – ☹ – Que représente le flux du vecteur de Poynting ?

10 – ☺ – ☹ – Donner l'expression de la puissance volumique cédée aux porteurs de charge.

11 – ☺ – ☹ – Écrire l'équation locale de Poynting et interpréter les différents termes.

12 – ☺ – ☹ – Définir le cadre de l'ARQS magnétique.

13 – ☺ – ☹ – Écrire les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS magnétique.

14 – ☺ – ☹ – Comment s'écrit l'équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS magnétique ? Que retrouve-t-on alors ?

FlashCards :

# I Équations de Maxwell

## I.1 Définition du champ électromagnétique

**À retenir – Force de Lorentz**

Le champ électromagnétique est défini par son action sur une charge ponctuelle $q$. Dans un référentiel $\mathscr{R}$ où cette particule se trouve au point $M$ à l'instant $t$, animée de la vitesse $\overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}}(t)$, la force de Lorentz qu'elle subit de la part du champ électromagnétique est donnée par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{f} = q\left(\overrightarrow{E}_{/\mathscr{R}}(M,t) + \overrightarrow{v}_{/\mathscr{R}}(t) \wedge \overrightarrow{B}_{/\mathscr{R}}(M,t)\right)$$

Cette relation définit le champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E}_{/\mathscr{R}}(M,t), \overrightarrow{B}_{/\mathscr{R}}(M,t)\right)$ au point $M$, à l'instant $t$, dans le référentiel $\mathscr{R}$.

## I.2 Équations de Maxwell

**À retenir – Équations de Maxwell**

Les équations de Maxwell relient la densité volumique de charge $\rho(M,t)$, le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}(M,t)$ aux champs électriques $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$.

$$\begin{cases} \text{Maxwell-Gauss} & \operatorname{div}\left(\overrightarrow{E}(M,t)\right) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \\ \text{Maxwell-Thomson} & \operatorname{div}\left(\overrightarrow{B}(M,t)\right) = 0 \\ \text{Maxwell-Faraday} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{E}(M,t)\right) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t) \\ \text{Maxwell-Ampère} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{B}(M,t)\right) = \mu_0 \overrightarrow{j}(M,t) + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t) \end{cases}$$

**Remarques –**

- Les équations de Maxwell sont des équations linéaires, le principe de superposition s'applique donc au champ électromagnétique.
- Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère relient le champ électromagnétique à ses sources « matérielles», à savoir $\rho(M,t)$ et $\overrightarrow{j}(M,t)$.
- L'équation de Maxwell-Faraday et l'équation de Maxwell-Ampère relient un des vecteurs (électrique ou magnétique) du champ électromagnétique aux variations temporelles de l'autre. **Donc un champ magnétique (resp. électrique) variable est une source d'un champ électrique (resp. magnétique).**

  S'il existe un champ magnétique dépendant du temps, c'est que quelque part dans le milieu étudié, il existe une densité de courant dépendant du temps.
- En conclusion, nous pouvons dire que l'ensemble d'**une densité volumique de charges** $\rho(M,t)$ **et d'une densité de courant** $\overrightarrow{j}(M,t)$ **constitue la source du champ électromagnétique** $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$**.**

### Activité n°1 – Utilisation de l'équation de Maxwell-Gauss : sphère chargée

On considère une boule de rayon $a$ uniformément chargé en volume avec la densité volumique $\rho$.

Q1. Déterminer la forme générale du champ électrique.

Q2. Déterminer le champ électrique créé à l'intérieur de la boule.

Q3. En admettant la continuité du champ électrique, établir le champ électrique à l'extérieur de la boule.

### Activité n°2 – Utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday : Cylindre conducteur dans $\vec{B}$

On considère un cylindre conducteur d'axe $(Oz)$ de rayon $a$ et de hauteur $h$ ($h \gg a$) plongé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.

Q1. Pourquoi existe-t-il un champ électrique ? Déterminer, par étude des symétries et invariances, la forme générale du champ électrique.

Q2. Par application de la loi de Maxwell-Faraday déterminer le champ électrique.

### Activité n°3 – Utilisation de l'équation de Maxwell-Ampère : câble infini

On considère un câble infini de rayon $a$ parcouru par un courant stationnaire de vecteur densité $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{u_z}$ uniformément réparti en volume.

Q1. Déterminer la forme générale du champ magnétique.

Q2. Par utilisation de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace. On admet la continuité de $\overrightarrow{B}$.

## I.3 Équations sous forme intégrale

### I.3.a) Équation de Maxwell-Gauss → Théorème de Gauss

#### À retenir – Théorème de Gauss en régime variable

Par intégration de l'équation de Maxwell-Gauss sur un volume $\mathscr{V}$ délimitée par une surface fermée $\mathscr{S}$ orientée vers l'extérieur et utilisation du théorème d'Ostrogradski :

$$\iint_{P\in\mathscr{S}} \overrightarrow{E}(P,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{ext}}} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}$$

**Le théorème de Gauss est inchangé en régime variable.**

### I.3.b) Équation de Maxwell-Thomson et conservation du flux de $\vec{B}$

#### À retenir – Conservation du flux du champ magnétique

L'équation de Maxwell-Thomson (ou Maxwell-flux) est inchangée en régime variable par rapport au régime stationnaire, donc le champ magnétique est à **flux conservatif** quelque soit le régime :

$$\iint_{P\in\mathscr{S}} \overrightarrow{B}(P,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{ext}}} = 0$$

### I.3.c) Équation de Maxwell-Faraday → Loi de Faraday

#### Attention – Pas de potentiel $V$ en régime variable !

L'équation de Maxwell-Faraday est très différente en régime variable, comme le rotationnel de $\overrightarrow{E}$ n'est pas nul, $\overrightarrow{E}$ n'est pas à circulation conservative, donc $\overrightarrow{E}$ ne dérive pas d'un potentiel en régime variable.

### Démonstration à maîtriser n°4 – Équation de de Maxwell-Faraday → Loi de Faraday

Q1. Intégrer l'équation de Maxwell-Faraday à travers une surface $\mathscr{S}$ qui s'appuie sur un contour fermé $\Gamma$ orienté par la règle de la main droite, et utiliser le théorème de Stokes.

Q2. À quoi pouvez-vous identifier la circulation de $\vec{E}$ pour retrouver la loi de Faraday ?

### À retenir – Loi de Faraday

Dans un circuit fermé $\Gamma$ (sur lequel s'appuie une surface $\mathscr{S}$ orientée d'après la règle de la main droite) plongé dans un champ magnétique variable, une force électromotrice induite apparaît et elle s'écrit :

$$\begin{aligned} e &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \\ \oint_{M\in\Gamma} \vec{E}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell_M} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{P\in\mathscr{S}} \vec{B}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S_P}\right) \end{aligned}$$

$e$ est orientée en convention générateur avec le sens d'orientation de $\Gamma$.

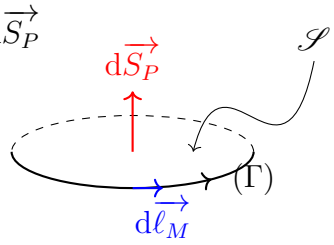
### Activité n°5 – Cylindre conducteur dans $\vec{B}$

On considère un cylindre conducteur d'axe $(Oz)$ de rayon $a$ et de hauteur $h$ ($h \gg a$) plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t) = B_0\cos(\omega t)\vec{u_z}$.
Par application de la loi de Faraday à l'aide d'un contour bien choisi, établir l'expression du champ électrique.

#### I.3.d) Équation de Maxwell-Ampère → Théorème d'Ampère généralisé

L'intégration de l'équation de Maxwell-Ampère travers une surface $\mathscr{S}$ qui s'appuie sur un contour fermé $\Gamma$ orienté par la règle de la main droite :

$$\begin{aligned} \iint_{P\in\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{B(P,t)}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S_P} &= \mu_0 \iint_{P\in\mathscr{S}} \vec{j}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S_P} + \varepsilon_0\mu_0 \iint_{P\in\mathscr{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S_P} \\ \text{Stokes}\quad \oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell_M} &= \mu_0 I_{\text{enlacé par }\Gamma}(t) + \varepsilon_0\mu_0 \iint_{P\in\mathscr{S}} \frac{\partial \vec{E}(P,t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S_P} \\ \oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell_M} &= \mu_0 I_{\text{enlacé par }\Gamma}(t) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{P\in\mathscr{S}} \vec{E}(P,t)\cdot \mathrm{d}\vec{S_P}\right) \\ \mathscr{C}_B(t) &= \mu_0 I_{\text{enlacé par }\Gamma}(t) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$




Le théorème d'Ampère est modifié en régime variable, avec un terme supplémentaire.

## II Équation de conservation de la charge

L'un des **postulats de l'électromagnétisme** est la **conservation de charge électrique** : la charge électrique d'un système isolé est constante. Il ne peut y avoir ni création ni disparition de charge.

### II.1 Bilan à 1D

### Démonstration à maîtriser n°6 – Équation de conservation de la charge

On considère un milieu dans lequel la conduction électrique se fait suivant une seule direction notée $Ox$.
La densité volumique de charges est $\rho(x,t)$ et le vecteur densité de courant est dirigé suivant $\vec{u_x}$ et ne dépend que de $x$ et $t$, soit : $\vec{j}(x,t) = j_x(x,t)\vec{u_x}$.

Q1. Définir le système auquel effectuer le bilan de charges électriques. Faire un schéma.

Q2. En procédant de la même façon que pour les bilans de particules et d'énergie, établir l'équation de conservation de la charge.

## II.2 Généralisation

**À retenir – Équation de conservation de la charge**

En géométrie quelconque, l'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}\left(\vec{j}(M,t)\right) = 0$$

Maxwell a ajouté un terme à l'équation de Maxwell-Ampère statique pour qu'elle soit compatible avec l'équation de conservation de la charge aussi en régime variable. Les conclusions théoriques découlant de cette idée d'ajout d'un terme supplémentaire ont été conformes à l'expérience par la suite.

**Démonstration à maîtriser n°7 – Lien avec les équations de Maxwell**

Exprimer la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère et obtenir l'équation de conservation de la charge.

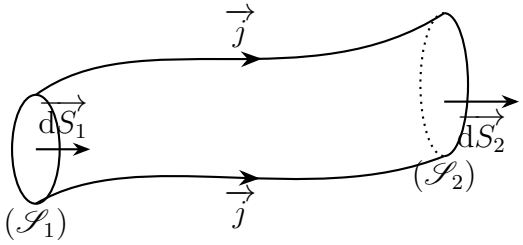
## II.3 Conséquence en régime stationnaire

**À retenir – En régime stationnaire**

**En régime stationnaire**, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, donc $\boxed{\text{div}\,(\vec{j}) = 0}$, donc le **vecteur densité de courant électrique est à flux conservatif.**

Considérons un conducteur linéaire sans nœud. Les bords du conducteur forment un tube de champ de $\vec{j}$. D'après le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned}
\oiint_{\mathscr{S}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{ext}}} &= 0 \\
-\iint_{\mathscr{S}_1} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S_1} + \iint_{\mathscr{S}_2} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S_2} + \iint_{\mathscr{S}_{\text{lat}}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{lat}}} &= 0 \\
\iint_{\mathscr{S}_1} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S_1} &= \iint_{\mathscr{S}_2} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S_2} \\
I_{\mathscr{S}_1} &= I_{\mathscr{S}_2}
\end{aligned}$$

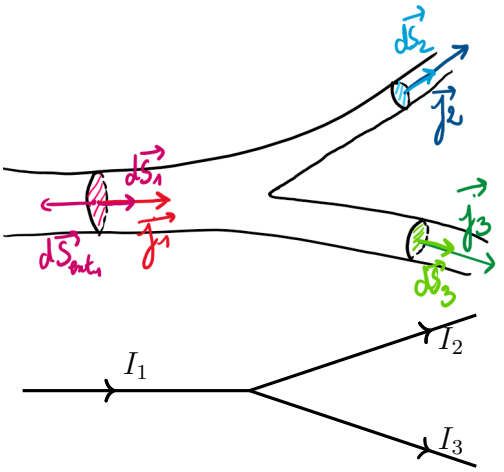



Le flux de $\vec{j}$ à travers toute section d'un même tube de champ se conserve.

## II.4 Loi des nœuds

Au niveau d'un nœud, plusieurs conducteurs sont connectés.
En exploitant la nullité du flux de $\vec{j}$ sortant de la surface fermée $\mathscr{S}$ :

$$\begin{aligned}
\oiint_{\mathscr{S}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{ext}}} &= 0 \\
\iint_{\mathscr{S}_1} \vec{j_1} \cdot \mathrm{d}\vec{S_1} &= \iint_{\mathscr{S}_2} \vec{j_2} \cdot \mathrm{d}\vec{S_2} + \iint_{\mathscr{S}_3} \vec{j_3} \cdot \mathrm{d}\vec{S_3} \\
I_{\mathscr{S}_1} &= I_{\mathscr{S}_2} + I_{\mathscr{S}_3} \\
I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\
\sum_k \varepsilon_k I_k &= 0
\end{aligned}$$



**À retenir – Loi des nœuds en régime stationnaire**

**En régime stationnaire**, les flux entrant dans un nœud doivent compenser les flux sortants : $\sum_k \varepsilon_k I_k = 0$, avec

- $\varepsilon_k = +1$ si le conducteur est orienté vers le nœud,
- $\varepsilon_k = -1$ si le conducteur est orienté depuis le nœud.

# III Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques

Nous montrerons dans le prochain chapitre (Physique des ondes PO1. Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide) que le **champ électromagnétique se propage à la célérité** $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$**, celle de la lumière dans le vide**. Les interactions électromagnétiques ne sont pas instantanées.
On note :

- $D^*$ la distance caractéristique de propagation,
- $d^*$ la distance caractéristique de variation des courants, des charges et des champs, souvent $d^* \sim D^*$,
- $T^*$ le temps caractéristique de variation des charges, des courants et des champs,
- $A^*$ l'ordre de grandeur caractéristique du champ $A$ (pour $\rho$, $j$, $E$, $B$),
- On écrira $A \sim A^*$ pour dire que l'ordre de grandeur de $A$ est $A^*$.

## III.1 Cadre de l'ARQS magnétique

Le cadre de l'ARQS a déjà été défini en PCSI, c'est le cadre dans lequel vous vous êtes placés · es pour étudier les circuits électriques et l'induction. L'objectif de cette partie est de préciser le cadre et d'en énoncer les conséquences sur les équations de Maxwell.

**À retenir – Cadre de l'ARQS**

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** consiste à négliger les phénomènes de propagation du champ électromagnétique.
Soit $D^*$ la distance typique de propagation, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est valable si la durée de propagation $\tau_{\text{prop}} = \dfrac{D^*}{c}$ est négligeable devant le temps caractéristique $T^*$ d'évolution des distributions de charges et de courants, soit si :

$$\frac{D^*}{c} \ll T^* \Leftrightarrow D^* \ll cT^*$$

Cela revient à considérer qu'on se place à une distance des sources suffisamment faible pour que leurs variations soient instantanément ressenties.

**Activité n°8 –**

Q1. Quelle condition doit vérifier la fréquence des signaux des circuits électriques usuels pour qu'ils soient étudiés dans le cadre de l'ARQS ?

Q2. Que dire des circuits de détection ou de télécommunication utilisant les micro-ondes de fréquences comprises entre 300 MHz et 300 GHz ?

Q3. Les lignes haute-tension peuvent-elles être étudiées dans le cadre de l'ARQS ?

La source du champ électromagnétique en un point $M$ de l'espace, à la date $t$, $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$ est une densité volumique de charges $\rho(P,t)$ et une densité volumique de courant $\overrightarrow{j}(P,t)$. L'effet des charges et celui des courants n'est pas toujours du même ordre de grandeur. On note $j^*$ l'ordre de grandeur de la densité volumique de courant et $\rho^*$ celui de la densité volumique de charges.

### À retenir – ARQS magnétique

La description des circuits usuels et des phénomènes d'induction se fait bien dans le cadre de l'**ARQS magnétique** où on peut négliger les phénomènes de propagation (ARQS) et où les effets des distributions des courants dominent ceux des distributions de charges : :

$$\text{l'ARQS} \quad d^* \ll cT^* \Leftrightarrow \frac{d^*}{cT^*} \ll 1 \tag{1}$$

$$\text{magnétique} \quad j^* \gg \rho^* c \Leftrightarrow \frac{\rho^* c}{j^*} \ll 1 \tag{2}$$

## III.2 Équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique

### Démonstration à maîtriser n°9 – Équations de Maxwell dans l'ARQS magnétique

Q1. Écrire les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday en ordre de grandeur. En déduire $\dfrac{E^*}{cB^*}$.

Q2. Écrire l'équation de Maxwell-Gauss en ordre de grandeur, en déduire $\dfrac{\varepsilon_0 E^*}{\rho^*}$

Q3. Comparer en ordre de grandeur $\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ avec les deux autres termes de l'équation de Maxwell-Ampère. Conclure.

### À retenir – Équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS magnétique

L'équation de Maxwell-Ampère est la seule modifiée dans le cadre de l'ARQS magnétique.
Elle s'écrit comme en régime stationnaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{B}(M,t)\right) = \mu_0\,\overrightarrow{j}(M,t)$$

Le théorème d'Ampère s'écrit dans l'ARQS comme en régime stationnaire :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}(P,t)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell_P} = \mu_0 I_{\text{enlacée par }\Gamma}(t)$$

**Les expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire sont également valables dans le cadre de l'ARQS magnétique.**

### Activité n°10 – Bobine en régime variable dans l'ARQS magnétique

On étudie une bobine, d'axe $(Oz)$ de longueur $\ell$ et de rayon $a$ de $N$ spires jointives. Le fil est parcouru par un courant $i(t) = I\cos(\omega t)$. On l'étudie dans le cadre de l'ARQS magnétique

Q1. À quelle condition peut-on considérer que la bobine est « infinie » ? À quelle condition sur $\omega$ peut-on se placer dans le cadre de l'ARQS ? On se place dans ces deux cas dans la suite.

Q2. Déterminer les formes générales du champ magnétique et du champ électrique.

Q3. Établir le champ magnétique en tout point dans la bobine en admettant le champ nul à l'extérieur.

Q4. Par une méthode de votre choix, déterminer le champ électrique au sein de la bobine.

### III.3 Équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS magnétique

**Démonstration à maîtriser n°11 –**

Q1. Évaluer les ordres de grandeur des deux termes de l'équation de conservation de la charge.

Q2. Comparer ces deux termes dans le cadre de l'ARQS magnétique.

Q3. Conclure sur l'écriture de l'équation de conservation de la charge. Commenter.

**À retenir – Équation de conservation de la charge dans l'ARQS magnétique**

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, l'équation de conservation de la charge s'écrit comme en régime stationnaire :

$$\text{div}\,(\overrightarrow{j}) = 0$$

Le vecteurs densité de courant est donc également à flux conservatif dans le cadre de l'ARQS magnétique. **La loi des nœuds est donc valable dans le cadre de l'ARQS magnétique** (cadre de l'électrocinétique de PCSI).

## IV Aspects énergétiques

### IV.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Dans les chapitres EM1 et EM3 nous avons introduit sur des exemples les densités volumiques d'énergie électrostatique et magnétostatique. Elles sont générales, y compris en régime variable.

**À retenir – Densité volumique d'énergie électromagnétique**

$$\begin{array}{rcccc} u_{em}(M,t) & = & u_e(M,t) & + & u_m(M,t) \\ u_{em}(M,t) & = & \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left\|\overrightarrow{E}(M,t)\right\|^2 & + & \dfrac{1}{2\mu_0}\left\|\overrightarrow{B}(M,t)\right\|^2 \end{array}$$

C'est une énergie volumique, qui s'exprime donc en $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$

### IV.2 Vecteur de Poynting

**À retenir – Vecteur de Poynting**

- Le **vecteur de Poynting** est défini par :

$$\overrightarrow{\Pi}(M,t) = \frac{\overrightarrow{E}(M,t)\wedge\overrightarrow{B}(M,t)}{\mu_0}$$

C'est une puissance surfacique, sa norme s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$
Sa direction et son sens indiquent la **direction et le sens de propagation de l'énergie** électromagnétique (c'est-à-dire de l'onde électromagnétique)

- Le **flux du vecteur de Poynting** à travers une surface $\mathscr{S}$ orientée est la puissance traversant $\mathscr{S}$ :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{S}}(t) = \iint_{M\in\mathscr{S}} \overrightarrow{\Pi}(M,t)\cdot\text{d}\overrightarrow{S_M}$$

**À retenir – Lien avec l'optique**

L'**intensité lumineuse** (chap O1) est la **moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting** : $I = \left\langle\left\|\overrightarrow{\Pi}\right\|\right\rangle$. **La direction et le sens du rayon lumineux est la direction et le sens du vecteur de Poynting**.

## IV.3 Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge

### À retenir – Puissance volumique cédée aux porteurs de charge

- La puissance volumique cédée par le champ électrique aux porteurs de charge est :

$$\mathscr{P}_{\text{vol}}(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \vec{E}(M,t)$$

- **Dans un conducteur ohmique** (en régime permanent ou lentement variable) la loi de Joule locale donne $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, avec $\gamma_0$ la conductivité électrique du conducteur (cf chapitre PO2).
  La puissance volumique cédée par le champ électrique s'écrit :

$$\mathscr{P}_{\text{vol}}(M,t) = \gamma_0 E^2(M,t) = \frac{j(M,t)^2}{\gamma_0} > 0$$

### Activité n°12 – Cylindre conducteur (Suite de l'activité du § I.3.c))

On admet que pour $f \ll 10^{14}$ Hz, le vecteur densité de courant est relié au champ électrique par : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$.

Q1. Exprimer la **puissance volumique** cédée au cylindre conducteur.

Q2. Exprimer la **puissance** reçue par le cylindre.

Q3. En exprimer la moyenne temporelle de la puissance reçue.

## IV.4 Bilan d'énergie électromagnétique

### À retenir – Équation locale de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique sous forme locale est donné par l'équation locale de Poynting :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}\,(\vec{\Pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Les termes sont des **puissances volumiques** (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$).

- $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t}$ traduit la variation temporelle de l'énergie volumique électromagnétique,
- $\text{div}\,(\vec{\Pi})$ traduit le transport d'énergie,
- $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ correspond à la consommation locale, c'est un terme source : la puissance volumique cédée aux charges du milieu.

### Activité n°13 – Bobine en régime variable dans le cadre de l'ARQS (suite de l'activité §III.2)

On étudie une bobine, d'axe $(Oz)$ de longueur $\ell$ et de rayon $a$ de $N$ spires jointives. Le fil est parcouru par un courant $i(t) = I\cos(\omega t)$.

Q1. Exprimer les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique. Les comparer dans le cadre de l'ARQS magnétique.

Q2. Exprimer le vecteur de Poynting. Quels sont sa direction et son sens ?

Q3. Comparer $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t}$ (dans le cadre de l'ARQS magnétique) et $\text{div}\,(\vec{\Pi})$. Conclure.

### Remarques – Densités volumiques d'énergie

$$\frac{u_e}{u_m} = \frac{\varepsilon_0 E^2/2}{B^2/(2\mu_0)} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{E^2}{B^2} \sim \frac{1}{c^2} \times \frac{d^{*2}}{T^{*2}} \sim \frac{d^{*2}}{(cT^*)^2} \ll 1$$

L'énergie électromagnétique est donc majoritairement présente sous forme magnétique ce qui justifie le terme d'ARQS « magnétique »