Électromagnétisme

# TD EM5 Équations de Maxwell

| Capacités \ Exercice n° | § | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. | II | | | | ✎ | ✎ | ✎ | ✎ | ✎ |
| Relier l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. | II.3.c) | | | | | | ✎ | | |
| Utiliser les grandeurs énergétiques pour conduire des bilans d'énergie électromagnétique. | III | | | | ✎ | | ✎ | | |
| Discuter l'approximation des régimes quasi-stationnaires. | IV.1 | | | | | | | ✎ | |
| Simplifier et utiliser les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'approximation du régime quasi-stationnaire. | IV.2 | | | | | | ✎ | ✎ | |
| Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques en régime stationnaire. | IV.2 | | | | | | ✎ | ✎ | |
| Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents. | PCSI | ✎ | | | | | | ✎ | |
| Conversion de puissance électrique ↔ puissance mécanique. Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. | PCSI | | ✎ | ✎ | | | | | |

## Parcours possibles

♪ Si vous avez des difficultés sur ce chapitre : n°1 (Q1 à Q3), n°2, n°4, n°5, n°6.

♪ ♪ Si vous vous sentez moyennement à l'aise, mais pas en difficulté : n°1, n°2, n°5, n°6.

♪ ♪ ♪ Si vous êtes à l'aise : n°1, n°3, n°5, n°7, n°8.

## I Révisions d'induction

### Exercice n°1 Chauffage par induction ♪ ♪

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être réalisé directement au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle même, située au fond de la casserole.
L'inducteur, de rayon 5 cm, possède 20 spires de cuivre de résistance $R_1 = 1,8 \times 10^{-2}\ \Omega$ et d'auto-inductance $L_1$. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$. La plaque de résistance $R_2 = 8,3\ \text{m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_2 = 0,24\ \mu\text{H}$, nommée induit, est assimilable à une spire refermée sur elle même. Le coefficient de mutuelle inductance est estimé à $M = 2,0\ \mu\text{H}$.

Q1. L'inducteur, alimenté en l'absence d'induit, sous une tension efficace de $V_{1\text{eff}} = 24\ \text{V}$, à la fréquence de $f = 25\ \text{kHz}$, est traversé par un courant de valeur efficace égale à $I_{1\text{eff}} = 5,1\ \text{A}$.

(a) Faire le circuit électrique de l'inducteur. Établir la relation, en complexe entre $\underline{v_1}$, $\underline{i_1}$, $R_1$, $L_1$ et $\omega$.

(b) En passant astucieusement au module, exprimer littéralement son auto-inductance $L_1$ en fonction de $V_{1,\text{eff}}$, $I_{1,\text{eff}}$ et $f$. Faire l'application numérique.

Q2. Faire un schéma électrique qui retranscrit la situation, sur lequel apparaît le circuit de l'inducteur (générateur, résistance, inductance $L_1$) et le circuit de l'induit (résistance $R_2$, inductance $L_2$), les deux circuits étant couplés par la mutuelle $M$. Faire ensuite le schéma électrique équivalent en introduisant les générateurs induits. Établir les équations différentielles couplées électriques relatives aux deux circuits.

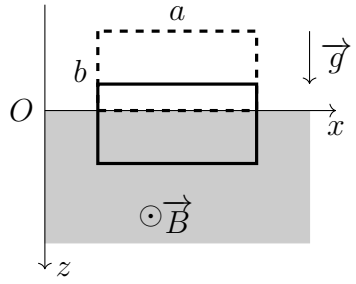
Q3. En déduire l'expression de $\dfrac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}$, puis celle du rapport des amplitudes $\left|\dfrac{I_{2m}}{I_{1m}}\right|$, que l'on simplifiera dans le cas où $R_2 \ll L_2\omega$. Faire l'application numérique.

Q4. Établir l'expression de $\underline{v_1}$ en fonction de $\underline{i_1}$ et de $R_1$, $R_2$, $L_1$, $L_2$, $M$, $\omega$. Simplifier l'expression dans le cas où $R_1 \ll L_1\omega$ et $R_2 \ll L_2\omega$.

Q5. En déduire que $I_{2,m} = V_{1,m} \times \dfrac{|M|}{(L_1L_2 - M^2)\omega}$. Faire l'application numérique de $I_{2m}$.

## Exercice n°2 Freinage par induction ♪ ♪

La plupart des manèges des parcs d'attraction utilisent des dispositifs de freinage inductif en plus du freinage par friction. On modélise dans cet exercice une attraction proposant aux passagers d'une cabine d'ascenseur de tomber en chute quasi-libre pendant quelques secondes avant d'être brutalement freinés. La première étape du freinage est magnétique.




Dans le châssis de la cabine d'ascenseur est placée un bobinage conducteur modélisé par une unique spire rectangulaire de côtés $a$ et $b$, de masse $m$ et de résistance $R$. Dans le demi-espace $z > 0$ règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent. À l'instant $t = 0$, la cabine se trouve dans la situation représentée en pointillés sur la figure ci-contre où $z = 0$, sa vitesse valant alors $\vec{v} = v_0\vec{u_z}$. À $t > 0$, sa position est repérée par la cote $z$ du bas de la spire. Elle est représentée en trait plein. Pour simplifier, les frottements de l'air seront négligés.

Q1. Mener une analyse physique des phénomènes mis en jeu.

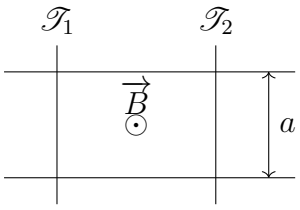
Q2. Établir une équation différentielle portant sur la vitesse $v$ de la cabine.

Q3. Résoudre cette équation. Que se passe-t-il lorsque $z = b$ ?

Q4. Effectuer un bilan d'énergie. Comparer la puissance de la force électromotrice induite et la puissance de la force de Laplace.

## Exercice n°3 Rails de Laplace couplés ♪ ♪

On considère deux barreaux $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ de résistance $R$ et de masse $m$ posés sur un rail et plongés dans un champ magnétique uniforme $B$. À $t = 0$, on lance $\mathscr{T}_1$ avec une vitesse $v_0$.




Q1. Mener une analyse physique de l'évolution du système.

Q2. Établir les équations couplées vérifiées par $v_1(t)$ et $v_2(t)$, on fera apparaître $\dfrac{mR}{(aB)^2}$.

Q3. Découpler et résoudre ces équations pour exprimer $v_1(t)$ et de $v_2(t)$.

# II Exercices d'application du cours

## Exercice n°4 Champ électromagnétique et aspect énergétique ♪

On considère le champ électrique suivant, régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courant : $\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\omega t + kz)\vec{e_x} + E_0\sin(\omega t + kz)\vec{e_y}$, avec $k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\omega$.

Q1. Vérifier la compatibilité de cette expression avec l'équation de Maxwell-Gauss.

Q2. Déterminer le champ magnétique associé.

Q3. Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

Q4. Déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique de ce champ.

### Exercice n°5 Une solution des équations de Maxwell ♪

On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courant est donné par l'expression suivante : $\overrightarrow{E}(M,t) = f(z)\exp(-\alpha t)\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{B}(M,t) = g(z)\exp(-\alpha t)\overrightarrow{u_y}$

Q1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson sont-elles vérifiées ?

Q2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

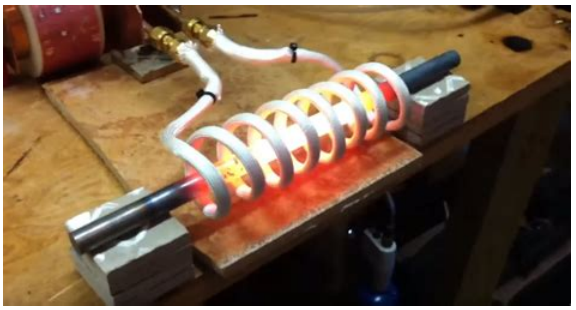
Q3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

Q4. En déduire $f(z)$ supposant que $f(z)$ est pair et que $\overrightarrow{E}(0,0) = E_0\overrightarrow{u_x}$. Donner l'expression du champ électromagnétique.

## III Exercices d'approfondissement

### Exercice n°6 Dispositif de soudure ♪ ♪

Un dispositif de soudure utilise le phénomène d'induction pour chauffer le métal à souder. Pour cela, une bobine possédant $n$ spires par unité de longueur est parcourue par un courant alternatif $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ de forte intensité et à haute fréquence.
Au centre de cette bobine d'axe $(Oz)$ de longueur $\ell = 0,5$ m et de rayon $R \gtrsim 4$ cm est placé un cylindre en aluminium de conductivité électrique $\gamma$, de rayon, $a = 4$ cm et de longueur $\ell' = 0,2$ m, qui est le métal à chauffer.



Q1. Rappeler le cadre de l'ARQS magnétique. Pourquoi peut-on s'y placer ici ? Comment s'écrivent l'équation de Maxwell-Ampère et le théorème d'Ampère dans ce cadre ?

Q2. Établir l'expression du champ magnétique régnant à l'intérieur du solénoïde (supposé infini, et on rappelle que le champ magnétique est nul à l'extérieur).

Q3. À l'aide de la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que $\overrightarrow{E}(r,t) = \dfrac{\mu_0 n r\omega}{2} I_0\sin(\omega t)\overrightarrow{u_\theta}$

Q4. En déduire l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le matériau. Où le métal risque-t-il de fonde en premier ?

Q5. Déterminer l'expression de la valeur moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans tout le cylindre.

Q6. Déterminer alors l'ordre de grandeur du temps nécessaire à la fusion du barreau en aluminium.

**Données –**

- $n = 1$ spire par centimètre ; $I_0 = 1,0$ A ; fréquence : $f = 100$ Hz,
- température de fusion de l'aluminium : $T_\text{f} = 933$ K ;
- enthalpie massique de fusion : $\Delta h_f = 397$ kJ $\cdot$ kg$^{-1}$ ;
- masse volumique de l'aluminium : $\mu = 2699$ kg $\cdot$ m$^{-3}$ ;
- capacité thermique massique de l'aluminium solide : $c = 900$ J $\cdot$ kg$^{-1}$ $\cdot$ K$^{-1}$
- Conductivité électrique de l'aluminium : $\gamma = 37 \cdot 10^6$ S/m ;

## Exercice n°7 Câble haute tension ♪ ♪

Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $I_{\text{eff}} = 700$ A. Une bobine plate constituée de $N$ spires carrées de coté $a = 30$ cm de trouve à une distance $d = 50$ m de ce fil. Elle est fermée par une ampoule qui s'éclaire si la valeur efficace de la tension à ses bornes est supérieure à $1,5$ V. L'auto-induction est négligée au sein de cette bobine.

On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.

Q1. Justifier le choix de l'ARQS.

Q2. Déterminer en coordonnées cylindriques le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ crées par la ligne haute tension en tout point de l'espace.

Q3. Établir l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ * crées par la ligne haute tension en tout point de l'espace. On introduira une constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à exprimer.

Q4. Exprimer le flux du champ magnétique créé par le câble haute tension à travers la bobine plate. En déduire l'expression de l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

Q5. Rappeler la loi de Faraday. Établir la force électromotrice induite.

Q6. En déduire le nombre $N$ de spires peur que l'ampoule s'éclaire.

## Exercice n°8 Étude d'un supraconducteur ♪ ♪ ♪

La théorie des frères London est une première approche phénoménologique de la supraconductivité qui cherche à expliquer l'expulsion du champ magnétique du matériau. Elle postule l'existence d'un vecteur densité de courant électrique $\overrightarrow{j_L}$ relié au champ magnétique $\overrightarrow{B}$ : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{j_L} = -\dfrac{1}{\mu_0 \Lambda^2}\overrightarrow{B}$, où $\Lambda$ (c'est un lambda majuscule) est appelée constante de London.

On considère un plaque infinie d'épaisseur $2\ell$ et délimitée par les plans $z = -\ell$ et $z = \ell$. Cette plaque est constituée d'un matériau supraconducteur de constante de London $\Lambda$. On applique un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_x}$ uniforme et constant. Il apparaît alors un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur de la plaque.

Q1. Montrer par étude de symétries et invariances, que le champ recherché est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B_x(z)\overrightarrow{e_x}$.

Q2. À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer l'unité de la constante $\Lambda$.

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $B_x$ en régime stationnaire.

Q4. Déterminer l'expression de $B_x$ et la mettre sous la forme $B_x(z) = D\cosh\left(\dfrac{z}{\Lambda}\right)$, avec $B_x(-\ell) = B_x(\ell) = B_0$, où $D$ est à exprimer en fonction de $B_0$, $\Lambda$ et $\ell$.

Q5. Justifier que si $\Lambda \ll \ell$ : $B_x(z) \approx B_0 e^{-\frac{\ell - |z|}{\Lambda}}$
Tracer l'allure de $B_x(z)$ dans ce cadre. Commenter

Des courants volumiques $\overrightarrow{j_L}$ sont générés à l'intérieur de la plaque de la forme $\overrightarrow{j_L} = j_L(z)\overrightarrow{e_y}$.

Q6. Établir l'expression de $j_L(z)$ en utilisant la relation de London. Tracer l'allure de $j_L(z)$ dans le cas où $\Lambda \ll \ell$.

Q7. Pourquoi dit-on que la plaque supraconductrice plongée dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B_0}$ est le siège de courants superficiels due à la supraconductivité qui expulsent le champ imposé ?

**Données –**

$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$

*. On pourra utiliser l'équation locale de Maxwell-Faraday et le formulaire d'analyse vectorielle.