Électromagnétisme

TD EM1 Électrostatique – *Corrigé*

I Topographie du champ

Exercice n°1 Étude de cartes topographiques ♪

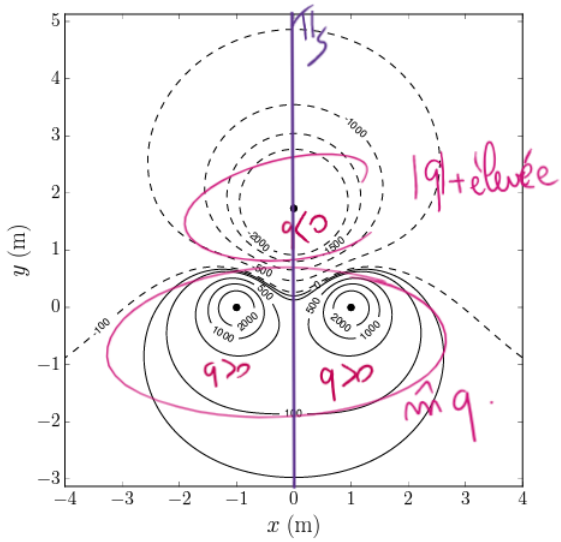


figure (a)

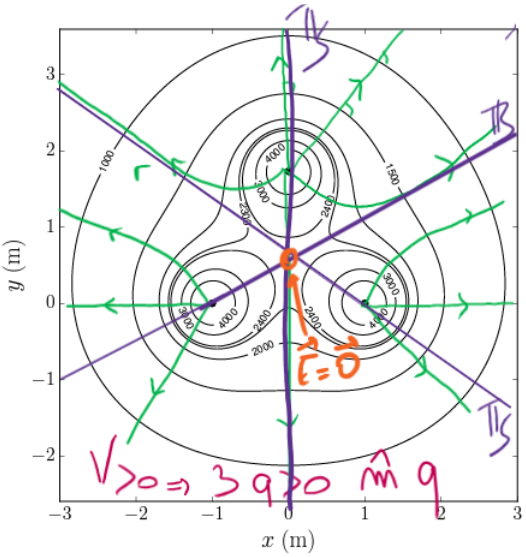


figure (b)

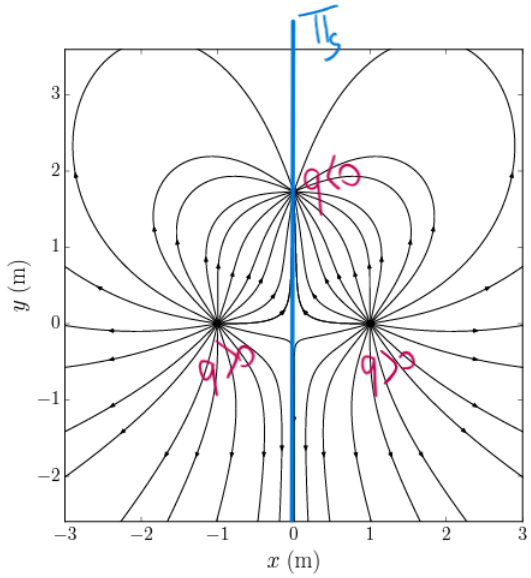


figure (c)

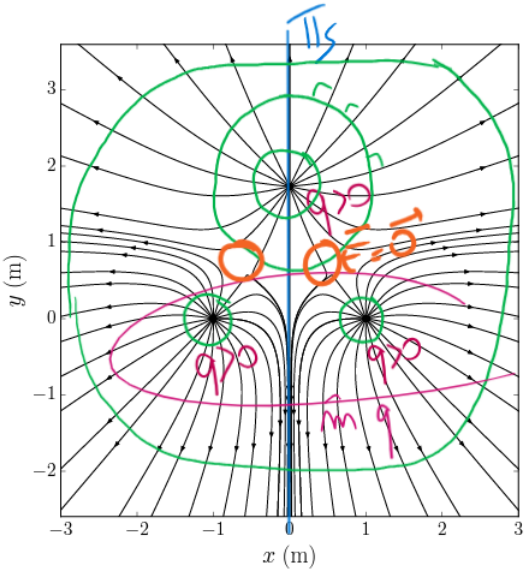


figure (d)

Les cartes ci-dessus ont été tracées avec quatre jeux de trois charges ponctuelles (A, B, C) disposées sur un triangle équilatéral : Jeu (1) : (q, q, q) ; Jeu (2) : $(q, q, 3q)$; Jeu (3) : $(q, q, -q)$; Jeu (4) : $(q, q, -3q)$

Les figures représentent les lignes de champ ou la trace des équipotentielles dans le plan des charges. Les valeurs des potentiels indiquées sur les graphes sont en volts.

R1. En utilisant des arguments simples, associer les figures (a), (b), (c), (d) aux quatre jeux de charges. Indiquer dans chaque cas la position des charges.

Solution: (b) : les équipotentielles sont positives, donc les trois charges sont positives. De plus, elles sont identiques autour des trois charges qui sont donc de même valeur : jeu (1)
(a) : une charge négative (au-dessus), et deux charges positives (en bas) : jeu (4). Les équipotentielles sont de valeur plus élevée plus loin autour de la charge du haut qu'autour de celles du bas, donc la charge négative est en valeur absolue plus élevée.
(c) : Les lignes de champ quittent les deux du bas, et arrivent sur la charge du haut, donc une charge négative et deux charges positives : (3) ou (4). Les lignes de champ sont aussi resserrées autour des deux du bas que celle du haut, donc les trois charges sont en valeur absolue égales, donc (3) (et jeu 4 déjà éliminé)
(d) : Les lignes de champ quittent les trois charges, donc les trois charges sont positives : Jeu (1) ou (2), par élimination (1 déjà pour b)) : jeu (2)

R2. Tracer l'allure de quelques lignes de champ pour la figure (b) et de quelques équipotentielles pour la figure (d).

Solution: cf ci-dessus

R3. En utilisant les graphes (a) ou (b), déterminer une valeur approchée de q.

Solution: (b) : je me place à proximité d'une charge (pour « éliminer » l'effet des deux autres). À 0,5 m le potentiel vaut 4000 V. Ainsi $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donc $q = 4\pi\varphi_0 r V = 2,2.10^{-7}$ C

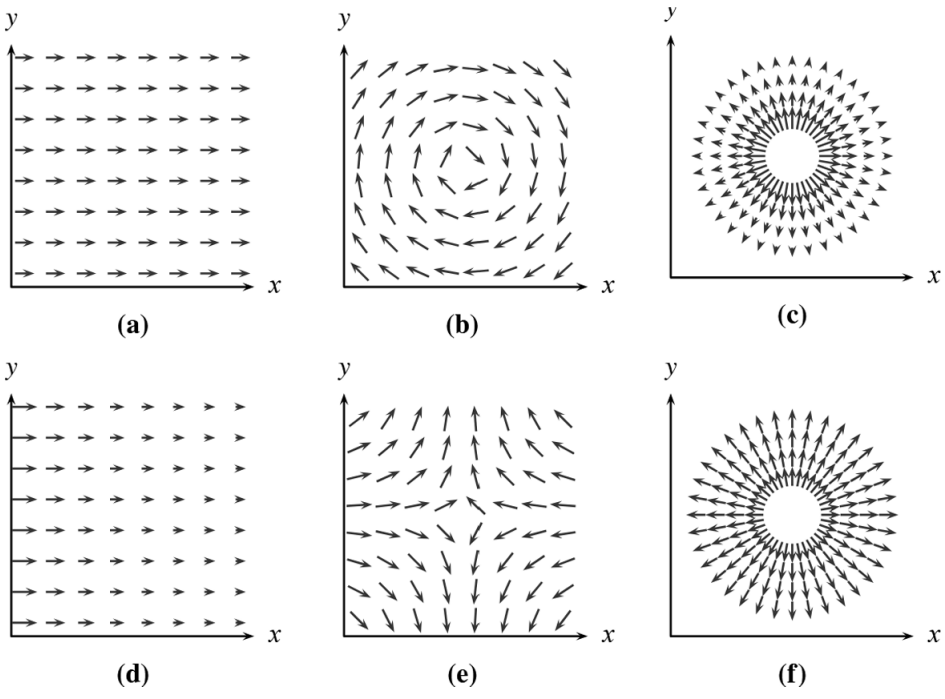
R4. Pour les figures (c) et (d), indiquer la localisation approximative des points de champ électrostatique nul, s'ils existent.

Solution:

Exercice n°2 Est-ce un champ électrostatique ? ♪ ♪

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan z =cste, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme $\overrightarrow{E}(x,y) = E_x(x,y)\overrightarrow{u_x} + E_y(x,y)\overrightarrow{u_y}$.

Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique, et si oui, si des charges sont présentes dans la région représentée.



Solution: Pour mémoire : $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative, donc ses lignes de champ ne peuvent pas être fermées, c'est-à-dire si le long de toute courbe fermée la circulation est nulle. De plus $\overrightarrow{E}$ est à flux conservatif dans une zone vide de charge.

(b) et (e) : on peut trouver une courbe fermée le long de laquelle la circulation n'est pas nulle, donc ce n'est pas la carte de champ d'un champ électrostatique.

(a) : le champ est uniforme. Le flux est conservatif, donc la zone est vide de charge.

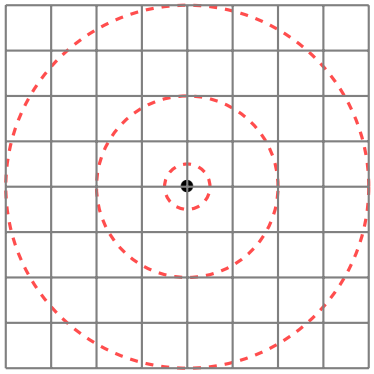
(d) : le flux n'est pas conservatif, il y a donc des charges.

(c) peut être la carte de champ de $\overrightarrow{E}$. La charge positive est au centre.

(f) le champ est uniforme, le flux n'est pas conservatif, il y a donc des charges.

Exercice n°3 Champ créé par une charge ponctuelle

Ci-contre, on donne 3 surfaces équipotentielles générées par une charge ponctuelle placée au centre. Leurs potentiels valent (en partant du centre) : -8 V ; -2 V ; -1 V.
Chaque carreau correspond à 1 nm.



R1. Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique.

Solution: $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$, or $\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$ est dirigé dans le sens des V décroissants, donc $\overrightarrow{E}$ est dirigé dans le sens des V croissants. $\overrightarrow{E}$ est donc dirigé vers le centre.

R2. Quel est le signe de la charge ponctuelle ? Sa valeur numérique ?

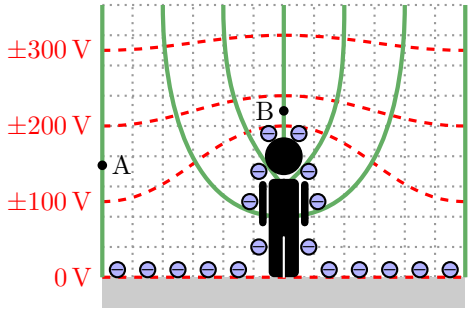
Solution: La charge est négative.
$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donc $q = 4\pi\varepsilon_0 r V = 4,4.10^{-19}$ C

R3. Évaluez le champ électrostatique généré.

Solution: $E \approx \dfrac{\Delta V}{\Delta r} = \dfrac{1\text{ V}}{2\text{ nm}} = 5.10^{8}\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

Exercice n°4 Effet de pointe

Un individu porte une charge négative, ce qui modifie localement les propriétés du champ électrostatique. La figure ci-dessous représente qualitativement les lignes de champ en trait plein tandis que les (surfaces) équipotentielles sont illustrées en pointillés. L'échelle du schéma est 1 division $\leftrightarrow$ 40 cm.



R1. Comment sont orientées les lignes de champ électrostatique ?

Solution: Les lignes de champ sont dirigées vers les charges négatives que portent l'individu.

R2. Quel est le signe des valeurs de potentiel électrostatique des équipotentielles représentées ?

Solution: Au voisinage de charges négatives, le potentiel électrostatique est négatif.

R3. Évaluer la valeur du champ électrostatique en A.

Solution: $E_A \approx \dfrac{\Delta V}{\Delta z} = \dfrac{100\text{ V}}{2,5 \times 0,40\text{ m}} = 100\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

R4. Comparer les champs électrostatiques en A et B.

Solution: Les équipotentielles sont plus resserrées au voisinage de B qu'en A, donc le champ varie plus vite, donc $E_B > E_A$.

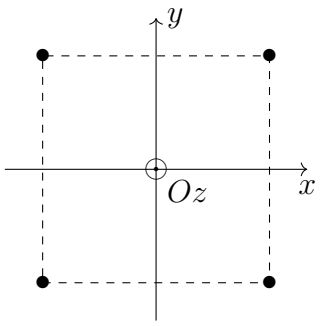
II Charges ponctuelles

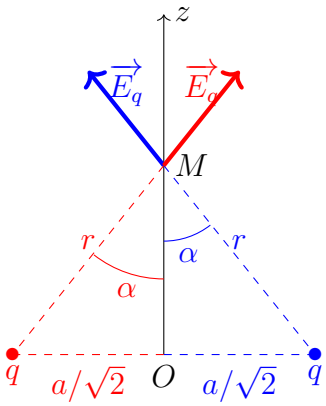
Exercice n°5 Champ créé par quatre charges ponctuelles ♪

Soit quatre charges ponctuelles q positives disposées aux sommets d'un carré de côté a, de centre O, placé dans le plan (Ox, Oy). Les axes (Ox) et (Oy) correspondent aux deux médiatrices des faces du carré.

R1. Exprimer le vecteur champ électrostatique sur l'axe (Oz). On s'aidera d'un schéma, et on commencera par étudier les symétries pour déterminer la direction de $\vec{E}$.

Solution: Par principe de superposition, le champ électrostatique est la somme des champs créés par chaque charge.
Par étude des symétries, les plans (Oxz) et (Oyz) sont des plans de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrostatique appartient à ces deux champs, donc $\vec{E}(O) = E_z\vec{u_z}$





La diagonale du carré vaut $\sqrt{2}a$, donc la demie diagonale $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.
En un point M de l'axe, la distance à chaque charge est $r = \sqrt{z^2 + (a/\sqrt{2})^2}$.
Pour une charge : $\vec{E} \cdot \vec{u_z} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(\alpha)$, avec $\cos(\alpha) = \dfrac{z}{r}$
Ainsi $\vec{E} = 4 \times \dfrac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_z} = \dfrac{qz}{\pi\varepsilon_0\left(z^2 + \dfrac{a^2}{2}\right)^{3/2}}\vec{u_z}$

R2. Exprimer le potentiel électrostatique sur l'axe (Oz). Retrouver $\vec{E}(M)$.

Solution: $V(M) = 4V_q(M) = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donc $\boxed{V(M) = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + \dfrac{a^2}{2}}}}$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) = -\frac{q(2z \times -1/2)}{\pi\varepsilon_0\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)^{3/2}}\overrightarrow{u_z}$$

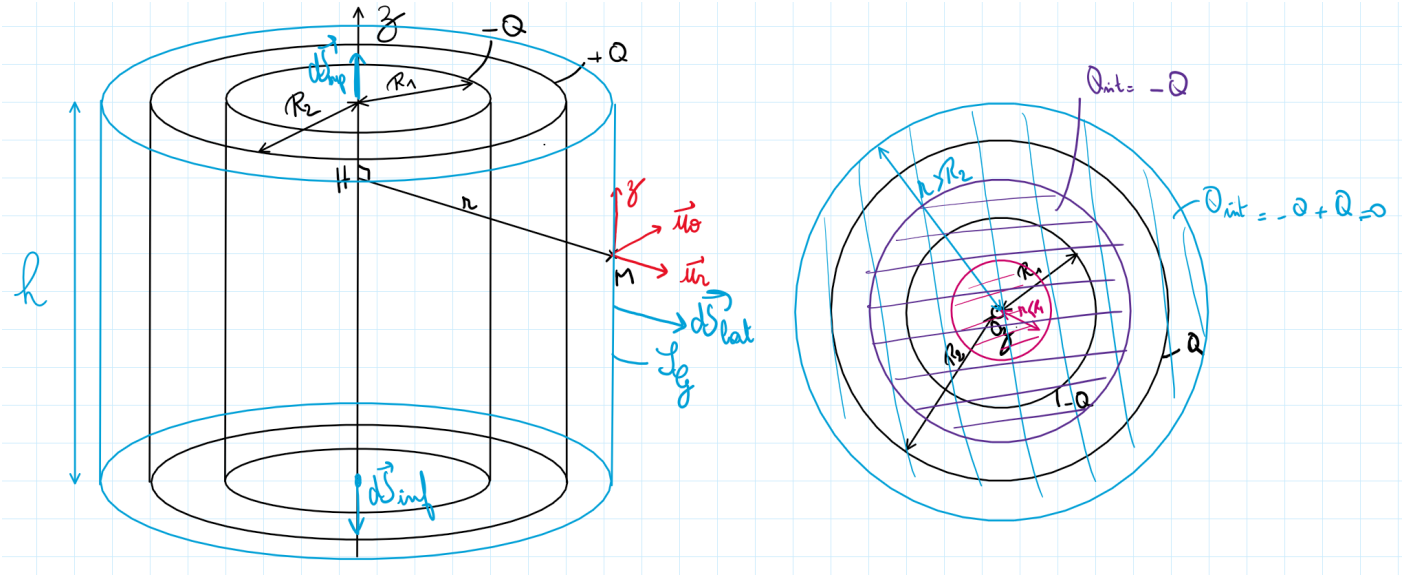
III Applications du théorème de Gauss

Exercice n°6 Condensateur cylindrique ♪

On considère une distribution de charge constituée de deux cylindres concentriques de même axe (Oz), de hauteur h. Les deux cylindres sont creux et chargés uniquement en surface avec une densité surfacique uniforme. Le cylindre intérieur de rayon R_1 porte la charge $-Q$, et le cylindre extérieur de rayon R_2 porte la charge $+Q$. On néglige les effets de bord (c'est-à-dire les cylindres sont supposés infinis).

R1. Déterminer la forme générale du champ électrostatique créé en tous points de l'espace.

Solution:



Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\theta = 0$.

Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge (car les cylindres sont infinis), donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_z = 0$.

Donc $\overrightarrow{E} = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}$

Le cylindre étant infini, la distribution de charges est invariante par toute translation le long de l'axe (Oz), donc E_r ne dépend pas de z.

La distribution de charges est invariante par toute rotation autour de (Oz), donc E_r ne dépend pas de θ.

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r}}$$

R2. Exprimer le champ électrostatique créé par cette distribution en tous points de l'espace.

Solution: Théorème de Gauss : $\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Surface de Gauss : cylindre d'axe (Oz) de rayon r de hauteur h avec ses chapeaux

Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers le cylindre :

$$\begin{aligned}\iint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} &= \iint_{M\in\mathscr{S}_{\text{lat}}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} + \iint_{M\in\mathscr{S}_{\text{inf}}} \underbrace{\overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}}_{0} + \iint_{M\in\mathscr{S}_{\text{sup}}} \underbrace{\overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}}_{0}\\ &= \iint_{M\in\mathscr{S}_{\text{lat}}} E_r(r)\mathrm{d}S_M\\ &= E(r)\times 2\pi rh\end{aligned}$$

Pour Q_{int}, il faut distinguer trois cas :

1. $r < R_1$: $Q_{\text{int}} = 0$
2. $R_1 < r < R_2$: $Q_{\text{int}} = -Q$ (toute la charge $-Q$ est l'intérieur de la surface de Gauss
3. $r > R_2$: $Q_{\text{int}} = -Q + Q = 0$

D'après le théorème de Gauss :

si $r < R_1$ ou $r > R_2$: $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0}$

si $R_1 < r < R_2$: $2\pi rhE_r(r) = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, ainsi $\overrightarrow{E} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 rh}\overrightarrow{u_r}$

R3. Exprimer la différence de potentiel $U = V(R_2) - V(R_1)$.

Solution: Tension :

$$\begin{aligned}U &= V(R_2) - V(R_1)\\ &= \int_2^1 \overrightarrow{E}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\\ &= \int_{R_2}^{R_1} E_r(r)\mathrm{d}r\\ &= \int_{R_2}^{R_1} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 rh}\mathrm{d}r\\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_1}{R_2}\end{aligned}$$

Soit $\boxed{U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

R4. En déduire l'expression de la capacité du condensateur.

Solution: Capacité : $\boxed{C = \dfrac{+Q}{U} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$

Exercice n°7 Modèle d'un noyau atomique ♪ ♪

La répartition de charge au sein de certains noyaux atomiques peut être modélisée par une densité volumique de la forme

$$\rho(r) = \begin{cases}\rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right) & \text{si } r \le a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où a est le rayon du noyau et r est la distance au centre O.

R1. Déterminer l'expression de la charge totale du noyau à partir de la densité volumique de charges fournie.

Solution:

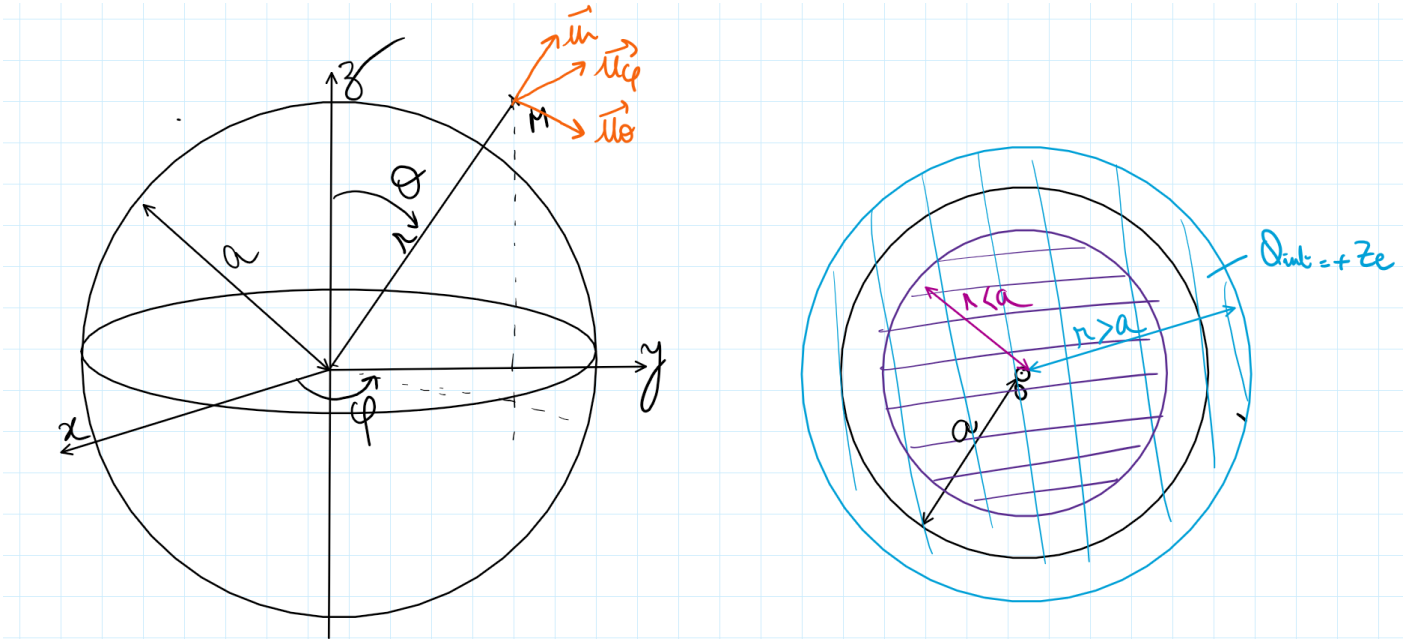
$$\begin{aligned} Q &= \iiint_{M\in\text{noyau}} \rho \mathrm{d}\tau_M \\ &= \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho(r) r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\pi\int_0^a r^2\rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5a^2}\right]_0^a \\ &= 4\pi\rho_0\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^5}{5a^2}\right) \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3 \end{aligned}$$

R2. En déduire une expression de ρ_0 en fonction du numéro atomique Z du noyau, du rayon a et de la charge élémentaire.

Solution: $Q = Ze = \frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3$, donc $\boxed{\rho_0 = \frac{15Ze}{8\pi a^3}}$

R3. Exprimer le champ électrostatique créé par le noyau en tout point de l'espace.

Solution:



— Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\theta = 0$.
Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge (car les cylindres sont infinis), donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\varphi = 0$.
Donc $\overrightarrow{E} = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{u_r}$

La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angle θ et d'angle φ autour de O, donc E_r ne dépend pas de θ ni de φ.

$\boxed{\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r}}$

— Théorème de Gauss : $\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

— Surface de Gauss : sphère de rayon r

— Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la sphère :
$\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = 4\pi r^2 E_r(r)$

— Pour Q_{int}, il faut distinguer deux cas :

— Si $r < a$:

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \iiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \rho(r')\mathrm{d}r' \\ &= 4\pi\rho_0\left[\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5a^2}\right]_0^r \\ &= 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right) \\ &= 4\pi\frac{15Q}{8\pi a^3}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right) \\ &= \frac{Ze}{2a^3}\left(5r^3 - \frac{3r^5}{a^2}\right) \end{aligned}$$

— Si $r < a$: $Q_{\text{int}} = Q = Ze$

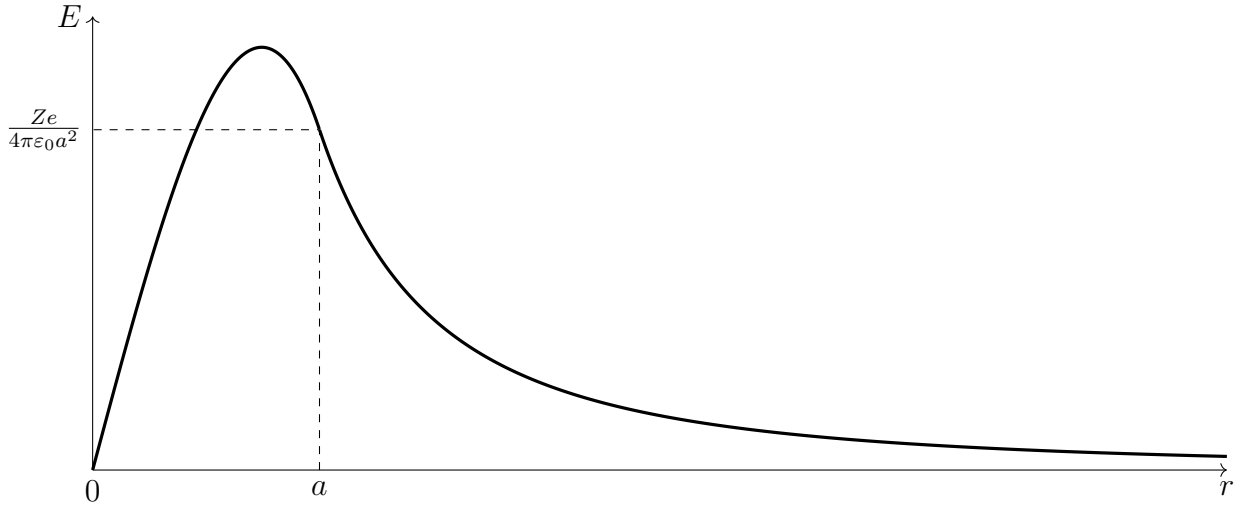
— Ainsi, d'après le théorème de Gauss :

— Si $r < a$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{Ze}{8\pi a^3}\left(5r - \dfrac{3r^3}{a^2}\right)\overrightarrow{u_r} = \dfrac{Ze}{8\pi a^2}\left(\dfrac{5r}{a} - \dfrac{3r^3}{a^3}\right)$

— Si $r < a$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$

R4. Représenter graphiquement sa norme en fonction de r.

Solution:



R5. Si on avait souhaité calculer seulement le champ ressenti par un électron de l'atome, quelle démarche

beaucoup plus simple aurait-on pu adopter ? Expliquer pourquoi elle s'applique.

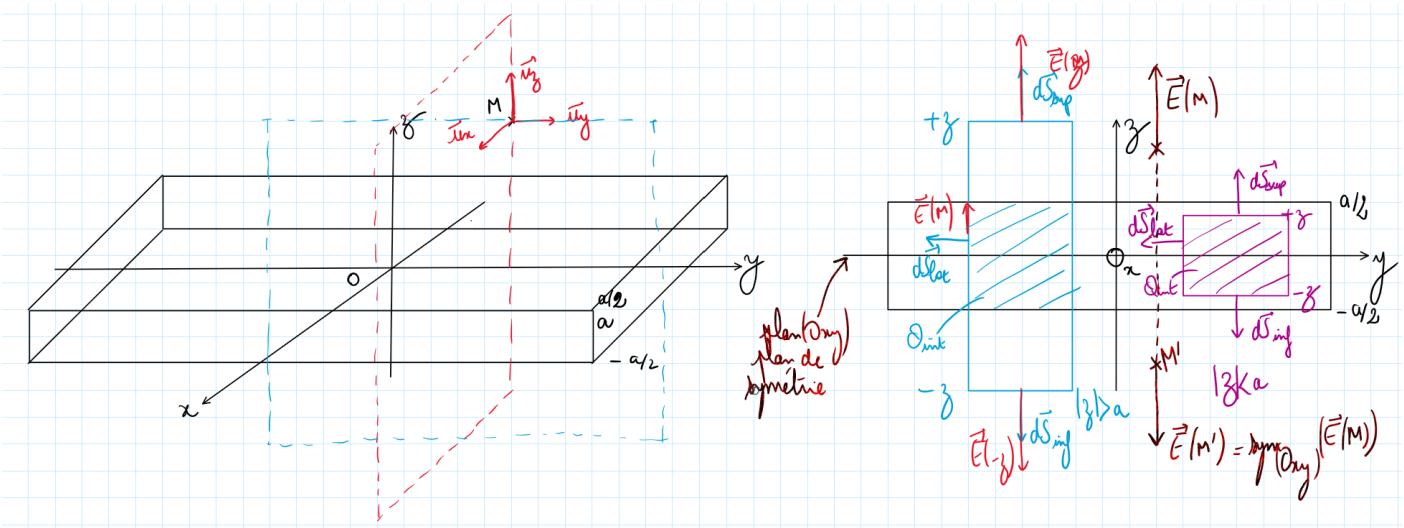
Solution: À l'extérieur du noyau, tout se passe comme si la charge Ze était ponctuelle. Cela est possible car la charge du noyau est répartie uniformément dans la boule de rayon a.

Exercice n°8 Couche épaisse ♪ ♪

On considère une couche épaisse, comprise entre les deux plans d'équation $z = -a/2$ et $z = +a/2$ et infinie dans les directions x et y, chargée uniformément en volume avec une densité volumique de charge ρ_0.

R1. Montrer que le champ électrique prend en tout point M de l'espace la forme $\overrightarrow{E}(M) = E_z(z)\overrightarrow{e_z}$

Solution:
Les plans $(M, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ et $(M, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, donc le champ électrostatique appartient aux deux plans, donc $\overrightarrow{E}(M) = E_z(x, y, z)\overrightarrow{u_z}$
La distribution de courant étant infinie, elle est invariante par toute translation selon les axes (Ox) et (Oy), donc E_z ne dépend pas de x et de y.
Ainsi $\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_z(z)\overrightarrow{u_z}}$



R2. Déterminer la parité de $E_z(z)$.

Solution: Le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\overrightarrow{E}(-z) = \mathrm{sym}_{(Oxy)}\left(\overrightarrow{E}(z)\right)$ ainsi $\boxed{E_z(-z) = -E_z(z)}$

R3. Exprimer le champ créé par la distribution dans tout l'espace.

Solution: Théorème de Gauss : $\oiint_{M\in\mathcal{S}_\mathcal{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$
Surface de Gauss : cylindre de section S de hauteur $2z$ (avec $z > 0$), centré sur le plan (Oxy)
Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers le cylindre, avec $M(z > 0)$:

$$\begin{aligned}\oiint_{M\in\mathcal{S}_\mathcal{G}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} &= \iint_{M\in\mathcal{S}_{\text{lat}}} \underbrace{\overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}}_{0} + \iint_{M\in\mathcal{S}_{\text{inf}}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} + \iint_{M\in\mathcal{S}_{\text{sup}}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} \\ &= -E_z(-z)S + E_z(z)S \\ &= 2E_z(z)S\end{aligned}$$

Deux cas à distinguer :
- Si $0 < z < a/2$: $Q_{\text{int}} = \rho_0 \times S \times 2z$
- Si $z > a/2$: $Q_{\text{int}} = \rho_0 \times S \times a$

D'après le théorème de Gauss, en $z > 0$:
- Si $0 < z < a/2$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{2z\rho_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$
- Si $z > a/2$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

Pour $z < 0$, de sorte que E_z soit impaire :
- Si $-a/2 < z < 0$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{2z\rho_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$
- Si $z < -a/2$: $\overrightarrow{E} = -\dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

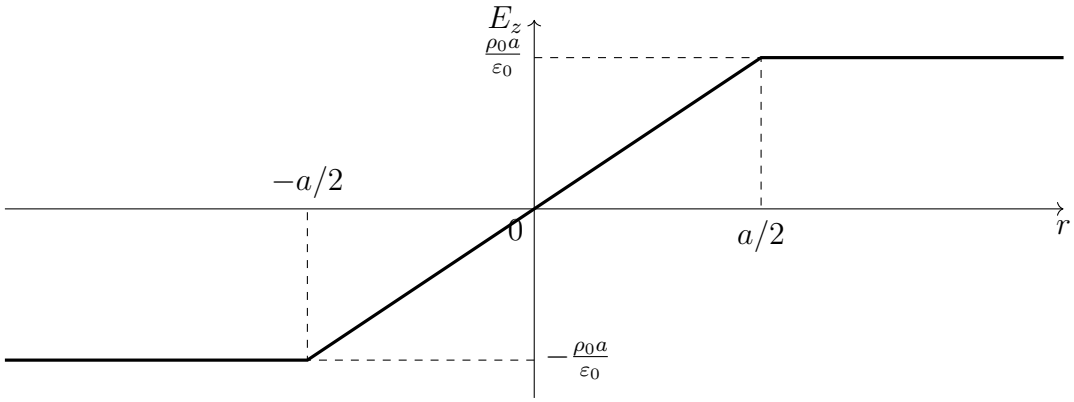
Ainsi : $\overrightarrow{E} = \begin{cases} z < -a/2 & -\dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \\ -a/2 < z < a/2 & \dfrac{2z\rho_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \\ z > a/2 & \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \end{cases}$

R4. Que vaut le champ dans le plan (xOy) ? Interpréter par des arguments de symétrie.

Solution: $\overrightarrow{E}(z=0) = \overrightarrow{0}$. En effet (Oxy) est un plan de symétrie, donc $\overrightarrow{E}$ appartient au plan, or $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$, donc il est nécessairement nul.

R5. Tracer le graphe représentant $E_z(z)$ pour $\rho_0 > 0$. Commenter le comportement de $\overrightarrow{E}$ en $z = \pm a/2$ où la densité de charge est discontinue.

Solution: $\overrightarrow{E}$ est partout en tous points y compris en $z = \pm a/2$ où ρ subit une discontinuité.

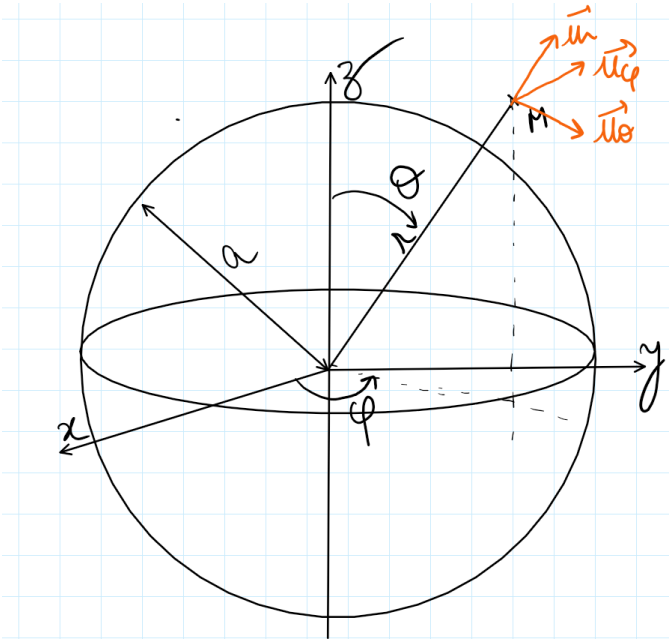


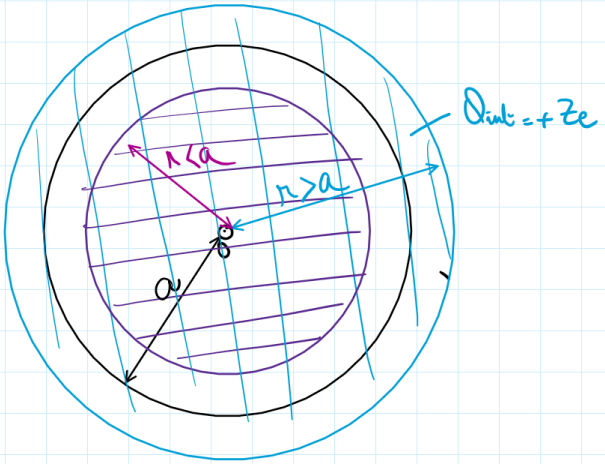
Exercice n°9 Distribution de masse ? ♪ ♪ ♪

On considère une planète sphérique de rayon R dont la masse est répartie de façon invariante par toute rotation. Elle crée un champ gravitationnel au sein de la planète (pour $r < R$) de composante $\mathscr{G}_0$ uniforme.

R1. Déterminer la direction du champ créé par cette distribution et les variables dont il peut dépendre.

Solution:





Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\overrightarrow{\mathscr{G}}$ appartient à ce plan, donc $\mathscr{G}_\theta = 0$.
Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge (car les cylindres sont infinis), donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $\mathscr{G}_\varphi = 0$.
Donc $\overrightarrow{\mathscr{G}} = \mathscr{G}_r(r, \theta, \varphi)\overrightarrow{u_r}$
La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angle θ et d'angle φ autour de O, donc E_r ne dépend pas de θ ni de φ.
$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{G}} = \mathscr{G}_r(r)\overrightarrow{u_r}}$

R2. Déterminer la charge $M(r)$ contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon $r < R$ quelconque.

Solution:
Théorème de Gauss : $\iint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{\mathscr{G}}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = -4\pi G M_{\text{int}}$
Surface de Gauss : sphère de rayon r
Flux de $\overrightarrow{\mathscr{G}}$ à travers la sphère :
$\iint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{\mathscr{G}}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = 4\pi r^2 \mathscr{G}_r(r) = 4\pi r^2 \mathscr{G}_0$
D'après le théorème de Gauss : $4\pi r^2 \mathscr{G}_0 = -4\pi G M(r)$, soit $\boxed{M(r) = -\dfrac{\mathscr{G}_0 r^2}{G}}$, or $M(r) > 0$ donc $\mathscr{G}_0 < 0$

R3. En déduire la densité volumique de masse $\rho(r)$.

Solution:

$$\begin{aligned} M(r) &= \iiint \rho(r)\mathrm{d}\tau_M \\ M(r) &= 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2\mathrm{d}r' \\ \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} &= 4\pi\rho(r)r^2 \\ -\frac{2\mathscr{G}_0 r}{G} &= 4\pi\rho(r)r^2 \\ \rho(r) &= -\frac{\mathscr{G}_0}{2\pi G r} \end{aligned}$$

R4. Déterminer le champ créé par cette distribution pour $r > R$.

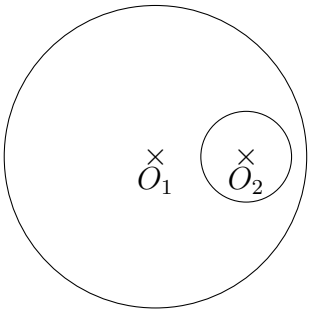
Solution: Pour $r > R$, la masse à l'intérieur de la sphère de Gauss :

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= \iiint \rho(r)\mathrm{d}\tau \\ &= 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\times -\frac{\mathscr{G}_0}{2\pi G}\int_0^R \frac{r^2}{r}\mathrm{d}r \\ &= -2\frac{\mathscr{G}_0}{G}\times\frac{R^2}{2} \\ &= -\frac{\mathscr{G}_0 R^2}{G} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Gauss : $4\pi r^2\mathscr{G}(r) = -4\pi G\times -\frac{\mathscr{G}_0 R^2}{G}$, donc $\boxed{\vec{\mathscr{G}} = -\frac{\mathscr{G}_0 R^2}{r^2}\vec{u_r}}$

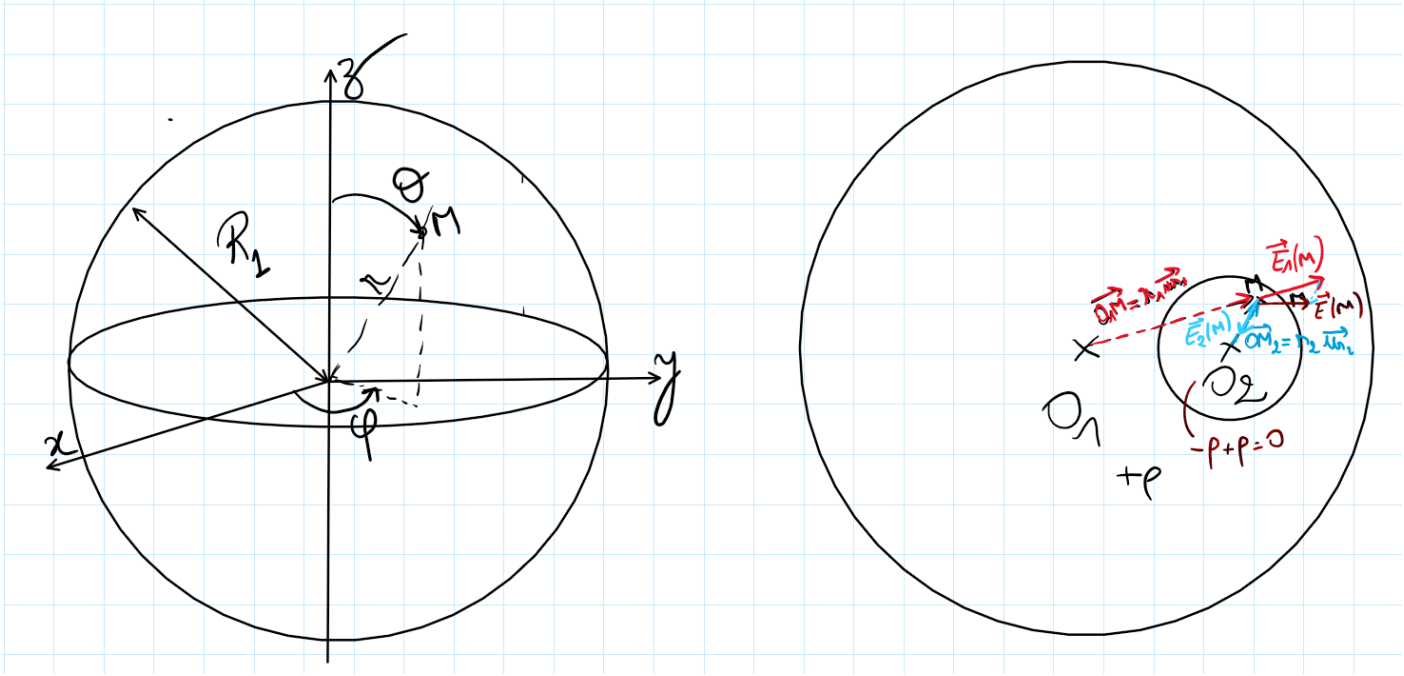
Exercice n°10 Grotte sphérique ♪ ♪ ♪

On considère une boule de centre O_1 et de rayon R_1, de densité volumique de charge ρ uniforme.
On y creuse une cavité sphérique de centre O_2 et de rayon $R_2 < R_1$.



R1. ♪ Exprimer le champ électrostatique créé par la boule B_1 pleine (sans la cavité) à l'intérieur de la boule.

Solution:



— Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\theta = 0$.
Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge (car les cylindres sont infinis), donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\varphi = 0$.
Donc $\overrightarrow{E} = E_r(r, \theta, \varphi)\overrightarrow{u_r}$
La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angle θ et d'angle φ autour de O, donc E_r ne dépend pas de θ ni de φ.
$\boxed{\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r}}$

— Théorème de Gauss : $\oiint_{M\in\mathcal{S}_\mathcal{G}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

— Surface de Gauss : sphère de rayon r

— Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la sphère :
$\oiint_{M\in\mathcal{S}_\mathcal{G}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = 4\pi r^2 E_r(r)$

— Pour $r < R_1$: $Q_{\text{int}} = \dfrac{4\pi}{3} r^3 \rho$

— Ainsi, d'après le théorème de Gauss : $\overrightarrow{E_1} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$

R2. En exploitant le théorème de superposition, exprimer le champ électrostatique au centre de la cavité sphérique.

Solution: On voit la distribution étudiée comme la superposition d'une sphère chargée ρ de centre O_1 de rayon R_1 et d'une sphère chargée $-\rho$ de centre O_2 de rayon R_2.

On considère la boule de centre O_2 de rayon R_2 chargée uniformément avec $-\rho$: $\overrightarrow{E_2} = \dfrac{-\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$

Par théorème de superposition dans la cavité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} &= \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} \\ &= \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_{r1}} + \frac{-\rho r_2}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_{r2}} \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_1\overrightarrow{u_{r1}} - r_2\overrightarrow{u_{r2}}\right) \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right) \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}\end{aligned}$$

Le champ électrostatique est donc uniforme au sein de la cavité.

Exercice n°11 Énergie potentielle de gravitation d'une boule ♪ ♪ ♪

Nous nous proposons d'utiliser la méthode de calcul de l'énergie de constitution d'un noyau atomique pour déterminer l'énergie potentielle de gravitation E_p d'une boule homogène de masse m, de centre O et de rayon R. La masse volumique de la boule est notée μ.

Pour obtenir cette énergie, nous construisons la boule par adjonction progressive de masse apportée de l'infini.

R1. La boule est partiellement construite et possède un rayon $u < R$. Quelle est l'énergie potentielle d'une masse ponctuelle m' située à la distance $r > u$ de O et plongée dans le champ de gravitation créé par la boule de rayon u ?

Solution: La boule partiellement construite est de masse $m(u) = \mu \times \dfrac{4\pi u^3}{3}$

Pour une masse m' situé à la distance $r > u$ (c'est-à-dire à l'extérieur de la boule partiellement construite) : $\mathscr{E}_p = -\dfrac{Gm'm(u)}{r} = -G\dfrac{4\pi m'\mu u^3}{3r}$

R2. Exprimer la masse δm d'une couche de matière comprise entre les rayons u et $u + \mathrm{d}u$ en fonction de μ, u et $\mathrm{d}u$.

Solution: La masse de la couronne mince entre u et $u + \mathrm{d}u$: $\delta m = \mu \times 4\pi u^2 \mathrm{d}u$

R3. Déterminer le travail δW que doit fournir un opérateur pour amener très lentement la masse δm de l'infini vers la surface de la boule de rayon u.

Solution: D'après le théorème de l'énergie mécanique appliqué à la masse δm entre l'infini et la surface de la boule de rayon u :

$$\begin{aligned}\Delta E_m &= W_{\text{op}} \\ W_{\text{op}} &= \Delta\mathscr{E}_c + \Delta\mathscr{E}_p \\ &= 0 + (\mathscr{E}_p(u) - \mathscr{E}_p(\infty)) \\ &= = -G\frac{4\pi\delta m\mu u^3}{3u} - 0 \\ &= -\frac{4\pi G\delta m\mu u^2}{3}\end{aligned}$$

R4. En déduire l'énergie potentielle de gravitation de la boule, c'est-à-dire son énergie de constitution. Commenter son signe.

Solution: Pour construire toute la boule, il faut apporter de la masse de $u = 0$ à $u = R$ par couches successives :

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int_0^R -\frac{4\pi G\delta m \mu u^2}{3} \\ &= -\frac{4\pi G\mu}{3}\int_0^R u^2\mu \times 4\pi u^2 \mathrm{d}u \\ &= -\frac{4\pi G\mu}{3} \times 4\pi\mu \int_0^R u^4 \mathrm{d}u \\ &= -\frac{16\pi^2\mu^2 G}{3} \times \frac{R^5}{5} \\ &= -\frac{16\pi^2\mu^2 G R^5}{15} \end{aligned}$$

Donc l'énergie de constitution est $\mathscr{E} = -\dfrac{16\pi^2 G R^5}{15} < 0$: la constitution de la boule permet de récupérer de l'énergie. En effet la force gravitationnelle est attractive, et le travail fournit par l'opérateur est négatif.