Électromagnétisme

TD EM2 Dipôle électrostatique – *Corrigé*

I Exercices d'application

Exercice n°1 Acide fluorhydrique

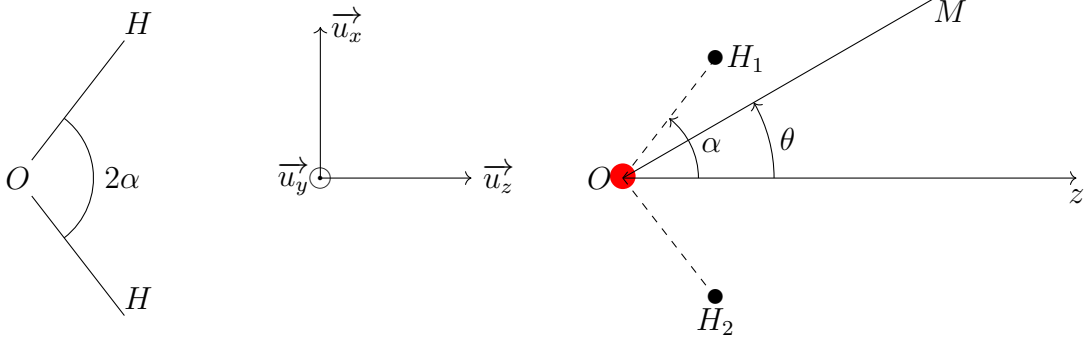
La molécule d'acide fluorhydrique HF a pour moment dipolaire 1,826 D et la distance interatomique est de 92 pm. Calculer la charge partielle portée par chaque atome et l'exprimer en pourcentage de la charge élémentaire.

Solution: $p = \delta e a$, donc $\delta e = \dfrac{p}{a} = 6,63.10^{-20}$ C, soit une charge de 41% de la charge élémentaire.
F étant le plus électronégatif, il porte la charge la charge $-6,63.10^{-20}$ C ; H porte la charge $+6,63.10^{-20}$ C

Exercice n°2 Potentiel et champ électrostatiques créés par l'eau ♪

La molécule d'eau possède un moment dipolaire permanent $p = 1,85$ D. L'angle entre les deux liaisons $O-H$ est $2\alpha = 104,5°$, leur longueur $a = 96$ pm.

L'atome d'oxygène étant plus électronégatif que celui d'hydrogène, il porte une charge négative $-2e\delta$ alors que chaque atome d'hydrogène porte une charge positive $+e\delta$ avec δ un réel positif sans dimension.



La molécule d'eau est assimilée à un ensemble de trois charges ponctuelles.

R1. Exprimer le moment dipolaire $\vec{p}$ de la molécule d'eau en fonction de α, δ, e, a et d'un vecteur unitaire de la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$.

Solution: $\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = +2\delta e\overrightarrow{OH}$, avec H le projeté de H_1 ou H_2 sur l'axe (Oz).
$\overrightarrow{OH} = a\cos(\alpha)\vec{u_z}$
Ainsi $\boxed{\vec{p} = 2\delta e a\cos(\alpha)\vec{u_z}}$

R2. Calculer δ.

Solution: $\delta = \dfrac{p}{2ea\cos(\alpha)} = 0,33$
Chaque atome d'hydrogène porte donc la charge $+0,33e$, et l'atome d'oxygène porte la charge $-0,66e$.

Nous cherchons le champ électrostatique créé par la molécule en un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans l'approximation dipolaire.

R3. Exprimer le potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par les trois charges.

Solution:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{O}}(M) &= \frac{-2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ V_{\mathrm{H}_1}(M) &= \frac{+\delta e}{4\pi\varepsilon_0 H_1 M} \\ V_{\mathrm{H}_2}(M) &= \frac{+\delta e}{4\pi\varepsilon_0 H_2 M} \end{aligned}$$

Par théorème de superposition : $\boxed{V(M) = V_{\mathrm{O}}(M) + V_{\mathrm{H}_1}(M) + V_{\mathrm{H}_2}(M) = \frac{\delta e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{r} + \frac{1}{H_1 M} + \frac{1}{H_2 M}\right)}$

R4. Qu'entend-on par approximation dipolaire ?
Exprimer $V(M)$ dans ce cadre en fonction de δ, e, a, α, θ, ε_0 et r *.

Solution: L'approximation dipolaire consiste à étudier le dipôle à très grande distance devant sa taille : soit $r \gg OH_1$. On effectue des développements limités au premier ordre en $\frac{a}{r}$.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{H_1M}\| &= \|\overrightarrow{H_1O} + \overrightarrow{OM}\| \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{H_1O}\|^2 + \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{H_1O}\cdot\overrightarrow{OM}} \\ &= \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\alpha-\theta)} \\ &= r\sqrt{1 - \frac{2a\cos(\alpha-\theta)}{r} + \frac{a^2}{r^2}} \\ &= r\left(1 - \frac{a\cos(\alpha-\theta)}{r} + o\left(\frac{a}{r}\right)\right) \\ \|\overrightarrow{H_2M}\| &= \|\overrightarrow{H_2O} + \overrightarrow{OM}\| \\ &= \sqrt{\|\overrightarrow{H_2O}\|^2 + \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{H_2O}\cdot\overrightarrow{OM}} \\ &= \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos(\pi-\alpha-\theta)} \\ &= \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\alpha+\theta)} \\ \|\overrightarrow{H_2M}\| &= r\left(1 + \frac{a\cos(\alpha+\theta)}{r} + o\left(\frac{a}{r}\right)\right) \end{aligned}$$

*. Il s'agit de la démo du cours, avec la particularité qu'il faut sommer trois termes. Attention à bien identifier les angles lors des calculs des produits scalaires nécessaires aux calculs des normes des distances.

Potentiel créé en M par les trois charges :

$$\begin{aligned}
V(M) &= \frac{\delta e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{r}+\frac{1}{r\left(1-\dfrac{a\cos(\alpha-\theta)}{r}+o\left(\dfrac{a}{r}\right)\right)}+\frac{1}{r\left(1-\dfrac{a\cos(\alpha+\theta)}{r}+o\left(\dfrac{a}{r}\right)\right)}\right)\\
V(M) &= \frac{\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(-2+1+\frac{a\cos(\alpha-\theta)}{r}+1+\frac{a\cos(\alpha+\theta)}{r}\right)\\
V(M) &= \frac{\delta e a(\cos(\alpha-\theta)+\cos(\alpha+\theta))}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\
V(M) &= \frac{\delta e a\times 2\cos(\alpha)\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\\
&= \frac{2\delta e a\cos(\alpha)\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

OU AUTRE METHODE PLUS RAPIDE!!!
La molécule est polaire :

$$\begin{aligned}
V(M) &= V_O(M)+V_H(M)\\
&= \frac{-2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 OM}+\frac{2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 HM}\\
&= \frac{-2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{2\delta e}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OM}\|}\\
&= \frac{-2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{2\delta e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2\cos^2(\alpha)+r^2-2a\cos(\alpha)r\cos(\theta)}}\\
&= \frac{-2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1+\dfrac{a^2}{r^2}\cos^2(\alpha)-2\dfrac{a}{r}\cos(\alpha)\cos(\theta)}}\\
&\approx \frac{-2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{2\delta e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{a}{r}\cos(\alpha)\cos(\theta)\right)\\
&= \frac{2\delta e a\cos(\alpha)\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}$$

R5. Montrer qu'on peut l'écrire $V(M)=\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$.

Solution: Or $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OM}=pr\cos(\theta)=2\delta e a\cos(\alpha)r\cos(\theta)$

Ainsi $\boxed{V(M)=\dfrac{2\delta e a\cos(\alpha)\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$

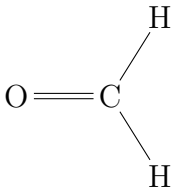
R6. En déduire l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé au point M par la molécule en fonction de p, r, θ et de vecteurs de la base sphérique.

Solution: Il vaut mieux repartir de l'expression obtenue directement.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}(M) &= -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V(M)) \\ &= -\frac{2\delta e a\cos(\alpha)}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2\cos(\theta)}{r^3}\overrightarrow{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\sin(\theta)}{r^2}\right) \\ &= \frac{2\delta e a\cos(\alpha)}{r^3}(2\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta}) \\ &= \frac{p}{r^3}(2\cos(\theta)\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_\theta})\end{aligned}$$

Exercice n°3 Interaction avec le formaldéhyde ♪ ♪

On donne ci-contre la formule développée du formaldéhyde. Nous connaissons l'angle $\widehat{\text{HCH}} = 116°$ et les normes des moments dipolaires respectifs des liaisons C – H et C = O : $p_{\text{CH}} = 0,40\text{D}$ et $p_{\text{CO}} = 2,30\text{D}$.
On donne les électronégativités : $\chi_{\text{H}} = 2,2$; $\chi_{\text{C}} = 2,55$; $\chi_{\text{O}} = 3,44$.

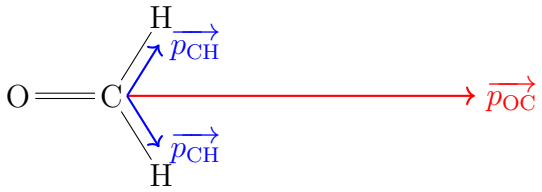


R1. En quelle autre unité que le debye peut-on exprimer un moment dipolaire ?

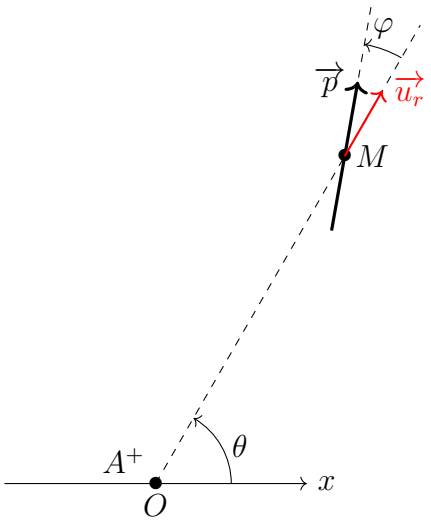
Solution: Le C.m

R2. Calculer la norme p du moment dipolaire du formaldéhyde.

Solution: L'oxygène est plus électronégatif que le carbone qui l'est plus que l'hydrogène.



Il faut faire une somme vectorielle : $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{p_{\text{CH}}} + \overrightarrow{p_{\text{OC}}} = (2p_{CH}\cos(\widehat{HCH}/2) + p_{OC})\overrightarrow{u_z}$
A.N. : $p = 2,4$ D



On considère un cation A^+ assimilé à une charge ponctuelle $+q$ fixe en un point O.

R3. Quel est le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé en M par ce cation ?

Solution: Le cation peut être assimilé à une charge ponctuelle, il crée donc le champ $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$

On place en $M(r = OM)$ la molécule de formaldéhyde assimilable à un dipôle rigide de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$. Nous notons φ l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{p}$, ce dernier appartenant toujours au plan de la figure ci-dessus.

R4. Quelle est l'énergie potentielle d'interaction de la molécule de formaldéhyde dans le champ créé par A^+ ? Exprimer cette énergie $\mathscr{E}_{\text{ion-dipôle}}$ en fonction de ε_0, q, p, r et φ.

Solution: Énergie potentielle : $\boxed{\mathscr{E}_{\text{ion-dipôle}} = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}(M) = -\dfrac{pq\cos(\varphi)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

R5. r étant fixé, quelle valeur φ_0 de φ correspond à un état d'équilibre stable de la molécule ?

Solution: L'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie potentielle, atteinte pour $\cos(\varphi) = +1$, soit $\boxed{\varphi_0 = 0}$

R6. C'est maintenant la valeur de l'angle φ qui est fixée : $\varphi = \varphi_0$. Quelle est alors la résultante des forces subies par la molécule ? Quel est le mouvement de la molécule de formaldéhyde dans ces conditions ?

Solution: $\overrightarrow{p}$ est donc selon $+\overrightarrow{u_r}$.
Force exercée par le cation sur la molécule de formaldéhyde :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(M)\\ &= (p\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{E}(M)\\ &= p\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{+e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}\right)\\ &= \frac{-2pe}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

Cette force est attractive : la molécule de formaldéhyde va donc être attirée par le cation. L'oxygène va se dirigé vers A^+

II Exercices d'approfondissement

Exercice n°4 Polarisabilité du méthane ♪ ♪ ♪

Lorsque la molécule de méthane (CH_4) est placée dans un champ électrique extérieur, un moment dipolaire induit est créé. L'objectif de cet exercice est d'expliquer cette polarisabilité à l'aide d'un modèle simple. On donne les rayons atomiques $r_C = 70$ pm et $r_H = 53$ pm respectivement du carbone et de l'hydrogène ainsi que le numéro atomique $Z_C = 12$ du carbone.

R1. La molécule de méthane CH_4 de géométrie tétraédrique possède-t-elle un moment dipolaire permanent ?

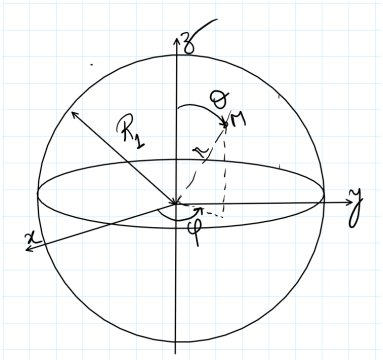
Solution: Le moment dipolaire permanent est nul par symétrie des 4 liaisons, les moments dipolaires de chaque liaison se compensent.

On suppose que les atomes d'hydrogène et de carbone sont constitués d'un noyau ponctuel situé à l'intérieur d'une boule sphérique de rayon r_H et r_C où se répartissent uniformément en volume les charges $-Z_H e$ et $-Z_C e$ où e est la charge élémentaire de l'électron.

On admet que lorsque ces atomes sont soumis à un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$, le noyau se déplace au sein du nuage électronique sphérique supposé indéformable.

R2. Déterminer le champ électrique créé par le nuage électronique à l'intérieur de ce dernier pour le carbone et l'hydrogène en l'absence de champ électrique extérieur.

Solution:



— Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\theta = 0$.
Le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge (car les cylindres sont infinis), donc $\overrightarrow{E}$ appartient à ce plan, donc $E_\varphi = 0$.
Donc $\overrightarrow{E} = E_r(r, \theta, \varphi)\overrightarrow{u_r}$
La distribution de charges est invariante par toute rotation d'angle θ et d'angle φ autour de O, donc E_r ne dépend pas de θ ni de φ.
$\boxed{\overrightarrow{E} = E_r(r)\overrightarrow{u_r}}$

— Théorème de Gauss : $\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

— Surface de Gauss : sphère de rayon r

— Flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la sphère :
$\oiint_{M\in\mathscr{S}_\mathscr{G}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} = 4\pi r^2 E_r(r)$

— Pour $r < r_H$: $Q_{\text{int}} = \dfrac{4\pi}{3} r^3 \rho$

Or la charge totale du nuage est $-Z_H e = \rho \times \dfrac{4}{3}\pi r_H^3$, donc $\rho = -\dfrac{3Z_H e}{4\pi r_H^3}$

Ainsi $Q_{\text{int}} = -Z_H e \dfrac{r^3}{r_H^3}$

— Ainsi, d'après le théorème de Gauss : $\boxed{\overrightarrow{E_H} = \dfrac{-Z_H e r}{4\pi\varepsilon_0 r_H^3}\overrightarrow{u_r}}$

De même pour l'atome de carbone : $\boxed{\overrightarrow{E_C} = \dfrac{-Z_C e r}{4\pi\varepsilon_0 r_C^3}\overrightarrow{u_r}}$

R3. On soumet la molécule au champ extérieur $\overrightarrow{E_{\text{ext}}} = E_{\text{ext}}\overrightarrow{u_x}$. Exprimer la position d'équilibre du noyau au sein du nuage électronique dans le cas du carbone et de l'hydrogène.

Solution: Le noyau d'hydrogène est de charge $+Z_H e = +e$, il est soumis à $+e\overrightarrow{E_H}$ et à $+e\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$
À l'équilibre : $\dfrac{-Z_H e r_{\text{H,éq}}}{4\pi\varepsilon_0 r_H^3}\overrightarrow{u_r} = -E_{\text{ext}}\overrightarrow{u_x}$, soit $\overrightarrow{r_{H,\text{éq}}} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 r_H^3 E_{\text{ext}}}{Z_H e}\overrightarrow{u_x}$
De même : $\overrightarrow{r_{C,\text{éq}}} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 r_C^3 E_{\text{ext}}}{Z_C e}\overrightarrow{u_x}$

R4. En déduire que le moment dipolaire induit par $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$ peut s'écrire $\overrightarrow{p_C} = \alpha_C\varepsilon_0\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$ pour le carbone et $\overrightarrow{p_H} = \alpha_H\varepsilon_0\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$ pour l'hydrogène, où α_C et α_H sont des constantes à déterminer.

Solution:
Moment dipolaire induit du carbone : $\overrightarrow{p_C} = +Z_C e\overrightarrow{r_{C,éq}} = 4\pi\varepsilon_0 r_C^3 \overrightarrow{E_{\text{ext}}}$, soit $\boxed{\alpha_C = 4\pi r_C^3 = 4,3.10^{-30}\ \text{m}^3}$
Pour l'hydrogène : $\boxed{\alpha_H = 4\pi r_H^3 = 1,8.10^{-30}\ \text{m}^3}$

R5. Les polarisabilités expérimentales du carbone et de l'hydrogène sont $\alpha_{C,e} = 19.10^{-30}$ m^3 et $\alpha_{H,e} = 8,3.10^{-30}$ m^3. Comparer ces valeurs aux valeurs associées au modèle présenté et conclure.

Solution:
Il y a un facteur presque 5 entre les valeurs du modèle et celles issues de l'expérience... Le modèle est à améliorer... Le nuage électronique se déforme quand il est soumis à un champ électrostatique extérieur.

R6. Évaluer numériquement la polarisabilité du méthane en utilisant les valeurs de α_C et α_H. Comparer à la valeur expérimentale de $\alpha_{CH_4} = 33 \cdot 10^{-30}$ m^3.

Solution: $\alpha_{CH_4} = \alpha_C + 4\alpha_H = 12.10^{-30}$ m^3, du même ordre de grandeur.

Exercice n°5 Cristal de NaCl soumis à un champ ♪ ♪ ♪

L'application d'un champ électrique à un monocristal de chlorure de sodium se traduit par des déplacements des ions qui le composent.

Soit $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_x}$ le champ électrostatique imposé aux ions du cristal, par exemple en appliquant une tension à des électrodes planes plaquées sur les faces opposées d'un échantillon parallélépipédique. Sous l'effet de ce champ, les ions Na^+ se déplacent en bloc selon Ox de δ_+ et les ions Cl de δ_-, le centre de masse de l'ensemble restant immobile. On posera $x = \delta_+ - \delta_-$.

Avant tout déplacement le moment dipolaire global du cristal est nul par symétrie de la répartition. On note N le nombre d'ions sodium et chlorure par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron.

R1. Montrer que ces déplacements ioniques se traduisent par un moment dipolaire réparti dans le volume du cristal, de densité volumique $\overrightarrow{P} = P\overrightarrow{u_x}$ et exprimer P en fonction de la charge élémentaire e, de x et du nombre N de paires d'ions Na^+Cl^- par unité de volume.

Solution: Pour une paire : $\overrightarrow{p} = +e\overrightarrow{ClNa} = ex\overrightarrow{u_x}$
Moment dipolaire volumique : $\boxed{P = Nex}$

L'expérience montre que la relation entre P et E est linéaire, de la forme $P = \varepsilon_0\chi_{\text{ion}}E$ où χ_{ion} est un coefficient positif caractéristique du cristal.

R2. En déduire que le groupe d'ions Na^+ est soumis à des forces de rappel élastique dont la moyenne par ion est de la forme $\overrightarrow{f} = -Kx\overrightarrow{u_x}$, les ions Cl^- étant soumis à des forces opposées. Exprimer la constante K en fonction de N, e, ε_0 et χ_{ion}.

Solution: À l'équilibre, un ion sodium est soumis à deux forces : la force électrique et une autre force qui l'empêche de s'éloigner davantage.
$e\overrightarrow{E} + \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{f} = -e\overrightarrow{E}$, donc $f = -e\dfrac{P}{\varepsilon_0\chi_{\text{ion}}} = -\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0\chi_{\text{ion}}}x = -Kx$, avec $\boxed{K = \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0\chi_{\text{ion}}}}$

R3. Après suppression du champ $\overrightarrow{E}$, les deux groupes d'ions évoluent librement. Écrire l'équation du mouvement d'un ion Na^+ et celle d'un ion Cl^- ; on désignera par m_+ et m_- leurs masses respectives.

Solution:
PFD à Cl^- : $m_-\ddot{\delta}_- = +Kx = K(\delta_+ - \delta_-)$ (1)
PFD à Na^- : $m_+\ddot{\delta}_+ = -Kx = -K(\delta_+ - \delta_-)$ (2)

R4. Montrer que leur mouvement relatif des deux ions est une oscillation à une pulsation ω_T que l'on explicitera en fonction de N, e, ε_0, χ_{ion}, m_+ et m_-. Pour cela, on fera les combinaison linéaires des équations du mouvement des deux ions qui permettent d'obtenir les équations vérifiées par $x_G = \dfrac{m_+\delta_+ + m_-\delta_-}{m_+ + m_-}$ et par $x = \delta_+ - \delta_-$.

Solution:
On somme les deux équations : $m_-\ddot{\delta}_- + m_+\ddot{\delta}_+ = 0$, donc $(m_- + m_+)\ddot{x}_G = 0$, donc $\dot{x_G} = At + B$
$\dfrac{(2)}{m_+} - \dfrac{(1)}{m_-}$: $\ddot{\delta}_+ - \ddot{\delta}_- = -K\left(\dfrac{1}{m_+} + \dfrac{1}{m_-}\right)(\delta_+ - \delta -)$
Soit $\ddot{x} + K\left(\dfrac{1}{m_+} + \dfrac{1}{m_-}\right)x = 0$: c'est un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_T = \sqrt{K\left(\dfrac{1}{m_+} + \dfrac{1}{m_-}\right)}}$