

## Révision d'analyse en lien avec l'étude des séries numériques

### Compléments sur les séries numériques

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$ .	La démonstration n'est pas exigible. <i>La démonstration a été faite en cours en utilisant des résultats, non redémontrés en détail, sur les intégrales de Wallis.</i>
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible. <i>La démonstration a été faite en cours.</i>

## Révision d'algèbre linéaire

### Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels</b>	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$ . Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie,	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
<b>Matrices par blocs et sous-espaces stables</b>	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si $u$ et $v$ commutent alors le noyau de $u$ est stable par $v$ .	

**Trace**


---

Trace d'une matrice carrée.	Notation $\text{tr}(A)$ .
Linéarité, trace d'une transposée.	
Relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .	
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

---

**Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées**


---

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .
Polynôme annulateur.	Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme $u$ commutent.	Le noyau de $P(u)$ est stable par $u$ .
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	

---

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

**Questions de cours possibles**

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
  - ▷ Le produit de Cauchy de deux séries à *termes positifs* absolument convergentes est une série absolument convergente dont la somme vaut le produit des sommes des deux séries.
  - ▷ Nature de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^b(n)}$  dans l'un des cas suivants :  $b \leq 0$ ;  $b \in ]0, 1[$ ;  $b = 1$  ou  $b > 1$ .
  - ▷ Si  $\sum u_n$  est une série alternée telle que la suite  $(|u_n|)$  est décroissante et tend vers 0. Alors  $\sum u_n$  converge.
  - ▷ Dimension d'un produit de deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.
  - ▷ Si  $u$  et  $v$  sont des endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tel que  $u \circ v = v \circ u$ , alors le noyau de  $u$  et l'image de  $u$  sont stables par  $v$ .
  - ▷ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ . Alors  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

**Prochain programme**

Algèbre linéaire de PCSI et compléments.

---