

Révision d'algèbre linéaire

Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.

Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

Trace

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité, trace d'une transposée.

Relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Notation $\text{tr}(A)$.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Polynôme annulateur.

Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.

Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Application au calcul de l'inverse et des puissances.

Le noyau de $P(u)$ est stable par u .

Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} .

Déterminant de Vandermonde.

Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1.

Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

Durant la colle, des questions de cours pourront être posées.

Questions de cours possibles

- La démonstration d'une propriété parmi les suivantes :
 - ▷ Dimension d'un produit de deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.
 - ▷ Si u et v sont des endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel tel que $u \circ v = v \circ u$, alors le noyau de u et l'image de u sont stables par v .
 - ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 - ▷ Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} et expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
 - ▷ Expression du déterminant de Vandermonde.
- Un énoncé d'une proposition, d'un théorème ou d'une définition.

Prochain programme

Algèbre linéaire de PCSI et compléments et intégrales généralisées.
